

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 1.

УДК 511.4

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-135-144

Об алгебраических тождествах между фундаментальными матрицами обобщённых гипергеометрических уравнений

В. А. Горелов

Горелов Василий Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (г. Москва).

e-mail: gorelov.va@mail.ru

Аннотация

В настоящей работе получены примеры алгебраических тождеств между фундаментальными матрицами обобщённых гипергеометрических уравнений. В некоторых случаях эти тождества порождают все алгебраические соотношения между компонентами решений гипергеометрических уравнений.

Обобщённые гипергеометрические функции (см. [1–5]) — это функции вида

$${}_l\varphi_q(z) = {}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) = {}_{l+1}F_q \left(\begin{matrix} 1, \nu_1, \dots, \nu_l \\ \lambda_1, \dots, \lambda_q \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu_1)_n \dots (\nu_l)_n}{(\lambda_1)_n \dots (\lambda_q)_n} z^n,$$

где $0 \leq l \leq q$, $(\nu)_0 = 1$, $(\nu)_n = \nu(\nu+1) \dots (\nu+n-1)$, $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_l) \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$.

Функция ${}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$ удовлетворяет (обобщённому) гипергеометрическому дифференциальному уравнению

$$L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) y = (\lambda_1 - 1) \dots (\lambda_q - 1),$$

где

$$L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) \equiv \left(\prod_{j=1}^q (\delta + \lambda_j - 1) - z \prod_{k=1}^l (\delta + \nu_k) \right), \quad \delta = z \frac{d}{dz}.$$

В теории трансцендентных чисел одним из основных методов является метод Зигеля-Шидловского (см. [4], [5]), который позволяет доказывать трансцендентность и алгебраическую независимость значений целых функций некоторого класса, включающего в себя функции ${}_l\varphi_q(\alpha z^{q-l})$, при условии алгебраической независимости этих функций над $\mathbb{C}(z)$.

В статье [6] Ф. Бейкерсом, В. Браунвеллом и Г. Хекманом были введены важные для установления алгебраической зависимости и независимости функций понятия коградиентности и контрградиентности дифференциальных уравнений (фактически эти понятия возникли ранее в статье Е. Колчина [7]).

Настоящая работа посвящена подробному доказательству и дальнейшему развитию результатов о коградиентности и контрградиентности, опубликованных в заметках [8] и [9]. В частности, уточняются некоторые результаты статьи [6].

Ключевые слова: гипергеометрические функции, метод Зигеля, алгебраическая независимость.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

В. А. Горелов. Об алгебраических тождествах между фундаментальными матрицами обобщённых гипергеометрических уравнений // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 135–144.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 1.

UDC 511.4

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-135-144

On algebraic identities between solution matrices of generalized hypergeometric equations

V. A. Gorelov

Gorelov Vasily Alekzandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate Professor, National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (Moscow).
e-mail: gorelov.va@mail.ru

Abstract

The examples of algebraic identities between solution matrices of generalized hypergeometric equations are found in paper. These identities generate all the algebraic identities between components of solutions of hypergeometric equations in some cases.

Generalized hypergeometric functions (see [1–5]) are defined as

$${}_l\varphi_q(z) = {}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) = {}_{l+1}F_q \left(\begin{matrix} 1, \nu_1, \dots, \nu_l \\ \lambda_1, \dots, \lambda_q \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu_1)_n \dots (\nu_l)_n}{(\lambda_1)_n \dots (\lambda_q)_n} z^n,$$

where $0 \leq l \leq q$, $(\nu)_0 = 1$, $(\nu)_n = \nu(\nu+1)\dots(\nu+n-1)$, $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_l) \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$.

The function ${}_l\varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$ satisfies the (generalized) hypergeometric differential equation

$$L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) y = (\lambda_1 - 1) \dots (\lambda_q - 1),$$

where

$$L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) \equiv \prod_{j=1}^q (\delta + \lambda_j - 1) - z \prod_{k=1}^l (\delta + \nu_k), \quad \delta = z \frac{d}{dz}.$$

The Siegel-Shidlovskii method (see [4], [5]) is one of the main methods in the theory of transcendental numbers. It permits to establish the transcendency and the algebraic independence of the values of entire functions of some class, which contains the functions ${}_l\varphi_q(\alpha z^{q-l})$, provided that these functions are algebraically independent over $\mathbb{C}(z)$.

F. Beukers, W.D. Brownawell and G. Heckman introduced in paper [6] notions of cogredience and contragredience of differential equations, which are important for determination of algebraic dependence and independence of functions (these notions appeared firstly in paper [7] of E. Kolchin really).

This work contains detailed proof and further development of results connected with cogredience and contragredience, that have been published in notes [8], [9]. Some results in [6] have been revised particularly.

Keywords: hypergeometric functions, Siegel's method, algebraic independence.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

V. A. Gorelov, 2020, "On algebraic identities between solution matrices of generalized hypergeometric equations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 135–144.

1. Введение

Пусть $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{C}[z^{\pm 1}] = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, δ_i^j — символ Кронекера, $M(q, K)$ — множество всех матриц размера $q \times q$ с элементами из кольца K , $GL(q, K)$ — полная линейная группа в $M(q, K)$. При $\gamma, \beta \in \mathbb{C}$, $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ положим $\gamma\vec{\mu} + \beta = (\gamma\mu_1 + \beta, \dots, \gamma\mu_n + \beta)$. Для векторов $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ будем писать $\vec{\mu} \sim \vec{\eta}$, если существует перестановка π чисел $1, \dots, n$ такая, что $\mu_i - \eta_{\pi(i)} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$.

Если Φ_1, Φ_2 — произвольные фундаментальные матрицы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ и выполняется одно из равенств

$$\Phi_1 = gB\Phi_2C, \quad \Phi_1(\Phi_2C)^T = gB,$$

где $C \in GL(q, \mathbb{C})$, $B \in GL(q, \mathbb{C}(z))$, $g = g(z)$ — функция с условием $g'/g \in \mathbb{C}(z)$, то (см. [6]) исходные дифференциальные уравнения называются коградиентными (соответственно контрградиентными).

Явный вид уравнения $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p) y = 0$, получаемого из $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) y = 0$ подстановкой $z \rightarrow \alpha z^p$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, приведён в лемме 1 и (6). Фундаментальную систему решений уравнения $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p) y = 0$ при $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$, $i \neq k$ образуют, например, функции (следствие леммы 1)

$$z^{(1-\lambda_k)p} {}_lF_{q-1}(\vec{\nu} + 1 - \lambda_k; \vec{\lambda} + 1 - \lambda_k; \alpha z^p), \quad k = 1, \dots, q. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geq \max(2, l)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, Φ_1, Φ_2 — произвольные фундаментальные матрицы дифференциальных операторов $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)$ и $L(1 - \vec{\nu}; 2 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l} \alpha z^p)$. Тогда:

1°. Существует матрица $C \in GL(q, \mathbb{C})$ такая, что

$$\Phi_1(\Phi_2C)^T = B, \quad (2)$$

где $B = \|b_{i,j}\|_{i,j} \in GL(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}, (1 - \alpha z^p)^\varepsilon])$, $\varepsilon = -\delta_q^l$, причём

$$b_{k,q-k+1} = (-1)^k c_0 z^{1-q} (1 - \alpha z^p)^\varepsilon, \quad c_0 \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \dots, q,$$

а выше этих элементов стоят нули.

2°. Если $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{N}$, $i, k = 1, \dots, q$, а Φ_1, Φ_2 соответствуют множествам функций (1) и

$$f_k = z^{(\lambda_k-1)p} {}_lF_{q-1}(\lambda_k - \vec{\nu}; \lambda_k + 1 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l} \alpha z^p), \quad k = 1, \dots, q, \quad (3)$$

то в равенстве (2) $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_q)$,

$$c_k = (-1)^k \prod_{1 \leq i < j \leq q; i, j \neq k} (\lambda_i - \lambda_j); \quad c_0 = p^{q-1} \prod_{1 \leq i < j \leq q} (\lambda_i - \lambda_j),$$

пустое произведение скобок равно 1.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $q \geq \max(2, l)$, $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{N}$, $i, k = 1, \dots, q$, числа c_k определены в теореме 1. Тогда

$$\sum_{k=1}^q c_k {}_lF_{q-1}(\vec{\nu} + 1 - \lambda_k; \vec{\lambda} + 1 - \lambda_k; z) {}_lF_{q-1}(\lambda_k - \vec{\nu}; \lambda_k + 1 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l} z) = 0. \quad (4)$$

Различные формулировки теоремы 1 и нескольких следствий из неё были опубликованы автором в 2008 – 2013 гг. ([10], [8], [11, лемма 5]). В 2015 г. Ф. Бейкерс и Ф. Жуэ [12], а в 2016 г. Р. Фенг, А. Кузнецов и Ф. Янг [13] опубликовали результаты, часть из которых вытекает из формул (2) и (4).

Теорема 1 даёт нетривиальные примеры контргradientности дифференциальных уравнений. Из статей [6, 7], где введено это понятие, не было ясно, существует ли контргradientность вообще и насколько она характерна для случая гипергеометрических уравнений.

Если разности соответствующих параметров двух гипергеометрических функций являются целыми числами, то такие функции называются смежными или ассоциированными. Из [11, лемма 12] и [14] следует, что однородные линейные дифференциальные уравнения, соответствующие уравнениям, которым удовлетворяют смежные функции, являются когradientными.

В следующей теореме решается вопрос о том, возможны ли когradientность или контргradientность гипергеометрических уравнений при несовпадающих l .

ТЕОРЕМА 2. Уравнения $L(\vec{\nu}_k; \vec{\lambda}_k; \alpha_k z^{p_k})y = 0$, где $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $p_k \in \mathbb{N}$, $\vec{\nu}_k = (\nu_{k,1}, \dots, \nu_{k,l_k}) \in \mathbb{C}^{l_k}$, $\vec{\lambda}_k = (\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,q_k}) \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^{q_k}$, $k = 1, 2$, с условием

$$q_1 = q_2 = 2, \quad l_1 = 1, \quad l_2 = 0, \quad p_2 = 2p_1, \quad \alpha_1^2 = 16\alpha_2, \quad (5)$$

$$\vec{\lambda}_1 - \lambda_{1,j} \sim \pm 2(\vec{\lambda}_2 - \lambda_{2,1}), \quad 1 \leq j \leq 2, \quad 2\nu_{1,1} - \lambda_{1,1} - \lambda_{1,2} \in \mathbb{Z},$$

являются когradientными и контргradientными.

2. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1 (см. [11, лемма 1]). Функция (либо, при $l > q$, формальный степенной ряд) $z^{\gamma} \varphi_q(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)$, где $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$, $l, q \in \mathbb{Z}^+$, $l+q \neq 0$, $p \in \mathbb{Z}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\prod_{i=1}^q (\delta + p(\lambda_i - 1) - \gamma) - \alpha p^{q-l} z^p \prod_{i=1}^l (\delta + p\nu_i - \gamma) \right) y = p^q z^{\gamma} \prod_{i=1}^q (\lambda_i - 1),$$

пустое произведение скобок равно 1.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$, $i \neq k$, $q \geq \max(1, l)$, то функции (1) образуют фундаментальную систему решений уравнения $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)y = 0$.

ЛЕММА 2 (см. [11, лемма 2]). Пусть $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geq \max(1, l)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_q$ — фундаментальная система решений уравнения

$$L(\vec{\nu} + 1 - \lambda_s; \vec{\lambda} + 1 - \lambda_s; \alpha z^p)y = 0, \quad 1 \leq s \leq q.$$

Тогда функции $z^{(1-\lambda_s)p} f_1, \dots, z^{(1-\lambda_s)p} f_q$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)y = 0$.

ЛЕММА 3. [9, лемма 1]. Пусть Φ, Φ_1, Φ_2 — фундаментальные матрицы, отвечающие наборам функций $\{v_1, \dots, v_q\}$, $\{z^{\beta} v_1, \dots, z^{\beta} v_q\}$ и $\{e^{\gamma z} v_1, \dots, e^{\gamma z} v_q\}$ соответственно, $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\Phi_1 = z^{\beta} B_1 \Phi, \quad \Phi_2 = e^{\gamma z} B_2 \Phi,$$

где $B_1 \in GL(q, \mathbb{C}[z^{-1}])$, $B_2 \in GL(q, \mathbb{C})$, причём матрицы B_1, B_2 являются нижнетреугольными с единицами на главной диагонали и не зависят от $v_1, \dots, v_q$.

Из лемм 2 и 3 вытекает

ЛЕММА 4. Пусть $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geq \max(2, l)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, Φ_1, Φ_2 — произвольные фундаментальные матрицы дифференциальных операторов $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)$ и $L(\vec{\nu} + 1 - \lambda_s; \vec{\lambda} + 1 - \lambda_s; \alpha z^p)$, $1 \leq s \leq q$. Тогда

$$\Phi_1 = z^{(1-\lambda_s)p} B \Phi_2 C,$$

где $C \in GL(q, \mathbb{C})$, B — нижнетреугольная матрица из $SL(q, \mathbb{C}[z^{-1}])$ с единицами на главной диагонали.

ЛЕММА 5. [9, лемма 2]. Пусть $\Phi = \Phi(z)$, $\Psi = \Psi(z)$ — фундаментальные матрицы, отвечающие наборам функций $\{v_1(z), \dots, v_q(z)\}$ и $\{v_1(\alpha z^p), \dots, v_q(\alpha z^p)\}$ соответственно, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\Psi(z) = B\Phi(\alpha z^p),$$

где $B \in M(q, \mathbb{C}[z])$ — нижнетреугольная матрица с определителем $|B| = (\alpha p z^{p-1})^{q(q-1)/2}$, не зависящая от $v_1, \dots, v_q$.

Как следует из леммы 1, уравнение $L(\vec{v}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)y = 0$ при $q \geq l$ имеет вид

$$\begin{aligned} (1 - \alpha z^p)^\varepsilon z^q y^{(q)} + \left((\lambda_1 + \dots + \lambda_q - q)p + (q-1)\frac{q}{2} - \varepsilon_1 \alpha p z^p - \right. \\ \left. - \varepsilon \alpha \left((\nu_1 + \dots + \nu_q)p + (q-1)\frac{q}{2} \right) z^p \right) z^{q-1} y^{(q-1)} + \\ + \dots + p^q ((\lambda_1 - 1) \dots (\lambda_q - 1) - \alpha \nu_1 \dots \nu_l z^p) y = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\varepsilon = \delta_q^l$, $\varepsilon_1 = \delta_q^{l+1}$.

ЛЕММА 6. Пусть $\vec{v} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$, $l, q \in \mathbb{Z}^+$, $q \geq \max(1, l)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда:

1°. Определитель Вронского уравнения $L(\vec{v}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)y = 0$ равен

$$W = c z^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_q - q)p - (q-1)q/2} (1 - \alpha z^p)^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_q - \nu_1 - \dots - \nu_q - q)\varepsilon} e^{\alpha z^p \varepsilon_1}, \quad (7)$$

где $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\varepsilon = \delta_q^l$, $\varepsilon_1 = \delta_q^{l+1}$.

2°. Если $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$, $i \neq k$, а W отвечает функциям (1), то

$$c = p^{q(q-1)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq q} (\lambda_i - \lambda_j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\alpha = p = 1$ равенство (7) вытекает из (6) и формулы Лиувилля. Отсюда, сделав подстановку $z \rightarrow \alpha z^p$, с помощью леммы 5 получаем утверждение 1° леммы 6 при произвольных α и p . Для доказательства утверждения 2° в предположении, что $\lambda_1, \dots, \lambda_q \notin \mathbb{Z}$, рассмотрим члены наименьшей степени разложений по z функций (1) и их производных, составляющих определитель W :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} z^{p-\lambda_1 p} & \dots & z^{p-\lambda_q p} \\ (z^{p-\lambda_1 p})' & \dots & (z^{p-\lambda_q p})' \\ \dots & \dots & \dots \\ (z^{p-\lambda_1 p})^{(q-1)} & \dots & (z^{p-\lambda_q p})^{(q-1)} \end{vmatrix} = z^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_q - q)p - (q-1)q/2} \cdot \\ \cdot \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ p - \lambda_1 p & \dots & p - \lambda_q p \\ \dots & \dots & \dots \\ \prod_{0 \leq i \leq q-2} (p - \lambda_1 p - i) & \dots & \prod_{0 \leq i \leq q-2} (p - \lambda_q p - i) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

В полученном числовом определителе элемент, стоящий в k -й строке и j -м столбце, является многочленом от $-\lambda_j p$ с коэффициентами, не зависящими от j и старшим членом $(-\lambda_j p)^{k-1}$. Поэтому, последовательно вычитая из каждой строки некоторую линейную комбинацию предыдущих, мы получим определитель Вандермонда от $-\lambda_1 p, \dots, -\lambda_q p$, равный c . Если же какое-либо из $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ принадлежит $\mathbb{Z}$, то утверждение 2° получается с помощью предельного перехода, так как функции ${}_l F_q(z)$ непрерывно зависят от параметров (см. [3, §§2.1, 2.2]). Лемма 6 доказана.

Напомним, что сопряжённым к дифференциальному уравнению

$$Ly \equiv a_m y^{(m)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

называется уравнение

$$\bar{L}v \equiv (-1)^m (a_m v)^{(m)} + \dots - (a_1 v)' + a_0 v = 0$$

(см., например, [15, гл. 2, §5]). Таким же образом определяются сопряжённые дифференциальные операторы L и $\bar{L}$.

ЛЕММА 7. [11, лемма 4]. Пусть $\vec{v} - \zeta \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} - \eta \in \mathbb{C}^q$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$, $l, q \in \mathbb{Z}^+$, $l + q \neq 0$, $p \in \mathbb{N}$, ζ, η — произвольные аналитические функции. Тогда

$$\overline{z^\gamma L(\vec{v}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)} = (-1)^q z^\gamma L\left(1 - \vec{v} + \frac{1 + \gamma}{p}; 2 - \vec{\lambda} + \frac{1 + \gamma}{p}; (-1)^{q-l} \alpha z^p\right).$$

ЛЕММА 8. Пусть $\vec{v} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geq \max(2, l)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, Φ_1, Φ_2 — произвольные фундаментальные матрицы дифференциальных операторов $L(\vec{v}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)$ и $L(1 - \vec{v}; 2 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l} \alpha z^p)$. Тогда существует матрица $C \in GL(q, \mathbb{C})$ такая, что

$$\Phi_1(\Phi_2 C)^T = B \in GL(q, \mathbb{C}[z^{\pm 1}, (1 - \alpha z^p)^\varepsilon]), \quad \varepsilon = -\delta_q^l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 7, в которой положим $\gamma = -1$, $\zeta \equiv \eta \equiv 0$, свойствам решений сопряжённых дифференциальных уравнений (см., например, [15, гл. 2, §5.2]) и формулам (6), для любой фундаментальной матрицы Φ_1 уравнения $L(\vec{v}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)y = 0$ найдётся фундаментальная матрица Φ_2 уравнения $L(1 - \vec{v}; 2 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l} \alpha z^p)y = 0$ такая, что $\Phi_1 \Phi_2^T = B = \|b_{i,j}\|_{i,j}$ является матрицей, у которой

$$b_{k,q-k+1} = (-1)^k a_0^{-1}, \quad a_0 = z^{q-1} (1 - \alpha z^p)^{-\varepsilon}, \quad k = 1, \dots, q,$$

а выше этих элементов стоят нули. Здесь a_0 — старший коэффициент уравнения $z^{-1} L(\vec{v}; \vec{\lambda}; \alpha z^p)y = 0$. Другими словами, если $\vec{v}$ и $\vec{g}$ — фундаментальные системы решений, соответствующие Φ_1, Φ_2 , то для скалярных произведений их производных имеем $(\vec{v}^{(s)}, \vec{g}^{(k)}) = 0$ при $s + k < q - 1$ и $(\vec{v}^{(s)}, \vec{g}^{(k)}) = (-1)^k a_0^{-1}$ при $s + k = q - 1$. Дифференцируя эти скалярные произведения и заменяя с помощью дифференциальных уравнений (6) производные $\vec{v}^{(q)}, \vec{g}^{(q)}$ на линейные комбинации векторов $\vec{v}^{(0)}, \dots, \vec{v}^{(q-1)}$, $\vec{g}^{(0)}, \dots, \vec{g}^{(q-1)}$, получим, что все элементы матрицы B принадлежат $\mathbb{C}[z^{\pm 1}, (1 - \alpha z^p)^\varepsilon]$. Лемма 8 доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Первое утверждение теоремы 1 следует из леммы 8 и её доказательства. Перейдём к доказательству второго утверждения теоремы. Предположим, что разность любых двух параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ не принадлежит $\mathbb{Z}$. Согласно леммам 1 и 7 функции (3) образуют фундаментальную систему решений оператора $L(1 - \vec{v}; 2 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l} \alpha z^p)$. В качестве Φ_1 и Φ_2 возьмём фундаментальные матрицы, соответствующие множествам функций (1) и (3). Тогда, как уже было сказано, найдётся вектор $\vec{g} = \{g_1, \dots, g_q\}$, где все g_k являются линейными комбинациями функций (3) с коэффициентами из $\mathbb{C}$, такой, что скалярные произведения вектора с компонентами (1) и векторов $\vec{g}, \vec{g}', \dots, \vec{g}^{(q-2)}$ равны нулю. Рассмотрев в этих скалярных произведениях слагаемые, не содержащие дробных степеней z , приходим к выводу, что можно положить $g_k = a_k f_k$, $k = 1, \dots, q$. Числа a_k найдём следующим образом. Рассмотрим вектор,

компоненты которого являются членами наименьшей степени разложений по z соответствующих компонент вектора $\vec{g}$, т. е. вектор $\{a_1 z^{(\lambda_1-1)p}, \dots, a_q z^{(\lambda_q-1)p}\}$. Известно (см. [15, гл. 2, §5.2], что в качестве $\vec{g}$ можно взять вектор $\{A_{q,1}, \dots, A_{q,q}\}(a_0 W)^{-1}$, где $A_{q,k}$ — алгебраические дополнения к элементам последней строки вронскиана W , отвечающего функциям (1), $a_0 = z^{q-1}(1 - \alpha z^p)^{-\varepsilon}$ — старший коэффициент соответствующего уравнения (6), делённого на z . Заменяем каждый элемент фундаментальной матрицы, соответствующей (1), на младший член его разложения по степеням z . В предположении, что $\lambda_1, \dots, \lambda_q \notin \mathbb{Z}$, получаем, что член наименьшей степени разложения по z функции $A_{q,k}$ равен алгебраическому дополнению элемента с такими же индексами определителя в левой части равенства (8). Следовательно,

$$A_{q,k} = (-1)^{q+k} z^{(\lambda_k - \sum \lambda_s + q-1)p - (q-1)(q-2)/2} p^{(q-1)(q-2)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq q; i, j \neq k} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Умножив члены наименьшей степени разложений по z компонент вектора $\{A_{q,1}, \dots, A_{q,q}\}$ на член наименьшей степени произведения $z^{1-q}(1 - \alpha z^p)^\varepsilon W^{-1}$, получим вектор $\{a_1 z^{(\lambda_1-1)p}, \dots, a_q z^{(\lambda_q-1)p}\}$, где числа a_k совпадают с диагональными элементами матрицы C в формулировке теоремы 1, делёнными на число c , вычисленное в лемме 6. Таким образом, для рассматриваемого случая утверждение 2° теоремы 1 доказано. Если же некоторые из параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ совпадают между собой или с целыми числами, то утверждение 2° получается с помощью предельного перехода, так как функции ${}_tF_q(z)$ и, следовательно, все компоненты матрицы $\Phi_1(\Phi_2 C)^T$ непрерывно зависят от параметров (см. [3, §§2.1, 2.2]).

4. Доказательство теоремы 2

Прежде всего заметим, что для дифференциальных уравнений 2-го порядка понятия коградиентности и контрградиентности совпадают (см. [7]).

Рассмотрим гипергеометрические функции Куммера

$$A_{\mu,\nu}(z) = {}_1\varphi_2(\nu; 1, \mu; z) = {}_1F_1\left(\nu \middle| \mu; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu)_n}{n!(\mu)_n} z^n,$$

удовлетворяющие уравнениям

$$z^{-2}L(\nu; 1, \mu; z) y \equiv y'' + \left(-1 + \frac{\mu}{z}\right) y' - \frac{\nu}{z} y = 0, \quad (9)$$

и функции

$$K_\lambda(z) = {}_0\varphi_2(1, \lambda + 1; -z^2/4) = {}_0F_1\left(\lambda + 1 \middle| -\frac{z^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\lambda + 1)_n} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

отличающиеся от функций Бесселя $J_\lambda(z)$ с индексом λ только множителем $(z/2)^\lambda(\Gamma(\lambda + 1))^{-1}$ и удовлетворяющие уравнениям

$$z^{-2}L(1, \lambda + 1; -z^2/4) y \equiv y'' + \frac{2\lambda + 1}{z} y' + y = 0. \quad (10)$$

Имеет место тождество (см., например, [2, п. 7.1, формула (46)])

$$K_\lambda(z) = e^{\mp iz} A_{2\lambda+1, \lambda+1/2}(\pm 2iz). \quad (11)$$

Более того, нетрудно проверить, что для произвольного решения $f(z)$ уравнения (10) функция $e^{z/2}f(\mp iz/2)$ удовлетворяет уравнению (9), где $\mu = 2\lambda + 1$, $\nu = \lambda + 1/2$.

Отсюда с помощью подстановки $z \rightarrow \pm 2iz$ получаем, что фундаментальная матрица уравнения $L(1, \lambda + 1; -z^2/4) e^{\pm iz} y = 0$ является фундаментальной матрицей уравнения $L(\lambda + 1/2; 1, 2\lambda + 1; \pm 2iz) y = 0$. Если Φ_1, Φ_2 — произвольные фундаментальные матрицы операторов $L(\lambda + 1/2; 1, 2\lambda + 1; \pm 2iz)$ и $L(1, \lambda + 1; -z^2/4)$ соответственно, то из этого согласно лемме 3 (и её доказательству из [9]) вытекают тождества

$$e^{\pm iz} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm i & 1 \end{pmatrix} \Phi_2 = \Phi_1 C, \quad \Phi_2 = e^{\mp iz} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp i & 1 \end{pmatrix} \Phi_1 C, \quad C \in GL(q, \mathbb{C}),$$

обобщающие тождество (11). Таким образом, уравнения $L(1, \lambda + 1; -z^2/4) y = 0$ и $L(\lambda + 1/2; 1, 2\lambda + 1; \pm 2iz) y = 0$ коградиентны, что и должно быть согласно теореме 2. Рассмотрим три следующих преобразования: подстановку $z \rightarrow \alpha z^p$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$; переход от набора параметров $\vec{\nu}, \vec{\lambda}$ к $\vec{\nu} + 1 - \lambda_s, \vec{\lambda} + 1 - \lambda_s$, где $1 \leq s \leq q$; изменение любого параметра на целое число. При этих преобразованиях согласно леммам 5, 4 и [11, лемма 12] коградиентность уравнений не нарушается, как и условие (5).

Предположим теперь, что для каких-либо двух гипергеометрических уравнений условие (5) справедливо. Пусть $\vec{\lambda}_1 - \lambda_{1,j} \sim 2(\vec{\lambda}_2 - \lambda_{2,1})$. Поскольку нумерация параметров в нашем распоряжении, будем считать $j = 1$. Ввиду леммы 4 коградиентность уравнений достаточно установить в случае $\lambda_{1,1} = \lambda_{2,1} = 1$, откуда, учитывая [11, лемма 12], $(0, \lambda_{1,2} - 1) = 2(0, \lambda_{2,2} - 1)$ и $\lambda_{1,2} = 2\lambda_{2,2} - 1$. Пусть $\vec{\lambda}_1 - \lambda_{1,j} \sim -2(\vec{\lambda}_2 - \lambda_{2,1})$. Рассуждая аналогично и считая $j = 2$, получим $(1 - \lambda_{1,2}, 0) \sim -2(0, \lambda_{2,2} - 1)$, откуда снова $\lambda_{1,2} = 2\lambda_{2,2} - 1$. В обоих случаях, полагая $\lambda_{2,2} = \lambda + 1$, имеем $\lambda_{1,2} = 2\lambda + 1$, $\nu_{1,1} = \lambda + 1/2$. Сделав подстановку $z^p \rightarrow (\pm 2i/\alpha_1)z$, приходим к гипергеометрическим уравнениям, коградиентность которых установлена выше.

5. Заключение

Условия для коградиентности и контрградиентности гипергеометрических уравнений и, следовательно, для алгебраической зависимости их решений, исследовались в статьях [6] и [16]. Необходимо отметить, что в этих работах, а также в статье автора [11], выпал из рассмотрения описанный в теореме 2 случай алгебраической зависимости между элементами фундаментальных матриц уравнений 2-го порядка. Можно показать, что в остальных случаях теоремы статей [6], [11], [16] справедливы. Таким образом, согласно результатам статьи [11], коградиентность и контрградиентность однородных гипергеометрических уравнений, элементы фундаментальных матриц которых связаны только соотношением Лиувилля, может возникнуть лишь по причинам, описанным в теоремах 1 и 2, лемме 4 и лемме 12 статьи [11] либо при сочетании этих причин.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М: Мир, 1980.
2. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М: ИЛ, 1963.
3. Аски Р., Рой Р., Эндрюс Дж. Специальные функции. М: МЦНМО, 2013.
4. Siegel C.L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys. Math. Kl. 1929 – 1930. № 1. S. 1 – 70.
5. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М: Наука, 1987.
6. Beukers F., Brownawell W.D., Heckman G. Siegel normality // Annals of Math. 1988. Vol. 127. P. 279 – 308.

7. Kolchin E.R. Algebraic groups and algebraic dependence // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90, № 4. P. 1151 – 1164.
8. Горелов В.А. Об алгебраических тождествах между обобщёнными гипергеометрическими функциями // Матем. заметки. 2010. Т. 88, вып. 4. С. 511 – 516.
9. Горелов В.А. Об алгебраических тождествах между фундаментальными матрицами уравнений Бесселя и Куммера // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 258 – 262.
10. Горелов В.А. О новых алгебраических тождествах между обобщёнными гипергеометрическими функциями // Вестник МЭИ. 2008. № 6. С. 129 – 138.
11. Горелов В.А. Об алгебраической независимости значений обобщённых гипергеометрических функций // Матем. заметки. 2013. Т. 94, вып. 1. С. 94 – 108.
12. Beukers F., Jouhet F. Duality relations for hypergeometric series // Bulletin of the London Math. Soc. 2015. Vol. 47. P. 343 – 358.
13. Feng R., Kuznetsov A., Yang F. A short proof of duality relations for hypergeometric functions // J. of Math. Analysis and Applications. 2016. Vol. 443. P. 116 – 122.
14. Горелов В.А. On contiguity relations for generalized hypergeometric functions // Problemy Analiza – Issues of Analysis. 2018. Vol. 7(25), № 2. P. 39 – 46.
15. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М: ИЛ, 1953.
16. Черепнёв М.А. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций // Матем. заметки. 1995. Т. 57, вып. 6. С. 896 – 912.

REFERENCES

1. Luke, Y. 1975, *Mathematical functions and their approximations*, Academic Press, New York.
2. Kratzer, A. & Franz, W. 1960, *Transzendente Funktionen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig. (German)
3. Andrews, G., Askey, R. & Roy, R. 2000, *Special Functions*, Cambridge University Press.
4. Siegel C.L. 1929 – 1930, “Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen“, *Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys. – Math. Kl.*, no. 1, pp. 1 – 70. (German)
5. Shidlovskii, A.B. 1989, *Transcendental numbers*, Walter de Gruyter, Berlin–New York.
6. Beukers, F., Brownawell, W.D. & Heckman, G. 1988, “Siegel Normality“, *Annals of Math.*, vol. 127, pp. 279–308.
7. Kolchin, E.R. 1968, “Algebraic groups and algebraic dependence“, *Amer. J. Math.*, vol. 90, no. 4, pp. 1151–1164.
8. Gorelov, V.A. 2010, “On algebraic identities between generalized hypergeometric functions“, *Mathematical Notes*, vol. 88, no. 4, pp. 487–491. DOI: 10.1134/S0001434610090208
9. Gorelov, V.A. 2019, “On algebraic identities between solution matrices of Bessel’s and Kummer’s equations“, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 16, pp. 258–262. DOI: 10.33048/semi.2019.16.017. (Russian)

10. Gorelov, V.A. 2008, "About new algebraic identities between generalized hypergeometric functions", *Vestnik Moskovskogo energeticheskogo instituta*, no. 6, pp. 129-138. (Russian)
11. Gorelov, V.A. 2013, "On the algebraic independence of values of generalized hypergeometric functions", *Mathematical Notes*, vol. 94, no. 1, pp. 82-95. DOI: 10.1134/S0001434613070080
12. Beukers, F. & Jouhet, F. 2015, "Duality relations for hypergeometric series", *Bulletin of the London Math. Soc.*, vol. 47, pp. 343-358.
13. Feng, R., Kuznetsov, A. & Yang, F. 2016, "A short proof of duality relations for hypergeometric functions", *J. of Math. Analysis and Applications*, vol. 443, pp. 116-122.
14. Gorelov, V.A. 2018, "On contiguity relations for generalized hypergeometric functions", *Problemy Analiza – Issues of Analysis*, vol. 7(25), no. 2, pp. 39-46. DOI:10.15393/j3.art.2018.4490
15. Sansone, G. 1948, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Bologna. (Italian)
16. Cherepnev, M.A. 1995, "Algebraic independence of values of hypergeometric E-functions", *Mathematical Notes*, vol. 57, no. 6, pp. 630-642.

Получено 17.05.2019 г.

Принято в печать 20.03.2020 г.