ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 1.

УДК 512.547 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-62-81

О многообразиях представлений некоторых свободных произведений циклических групп с одним соотношением

В. В. Беняш-Кривец, А. Н. Адмиралова

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации, Белорусский государственный университет (г. Минск).
e-mail: benyash@tut.by
Адмиралова Александра Николаевна — инженер-программист, ООО «СОФТКЛУБ» (г. Минск).
e-mail: al.admiralova@gmail.com

Аннотация

В работе исследуются многообразия представлений двух классов конечно порожденных групп. Первый класс состоит из групп с копредставлением

$$G = \langle a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k, x_1, \ldots, x_g \mid$$
$$a_1^{m_1} = \ldots = a_s^{m_s} = x_1^2 \ldots x_g^2 W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k) = 1\rangle,$$

где $g \geqslant 3$, $m_i \geqslant 2$ для $i = 1, \ldots, s$ и $W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ — элемент в нормальной форме в свободном произведении циклических групп $H = \langle a_1 \mid a_1^{m_1}\rangle * \ldots * \langle a_s \mid a_s^{m_s}\rangle * \langle b_1\rangle * \ldots * \langle b_k\rangle$.

Второй класс состоит из групп с копредставлением

$$G(p,q) = \langle a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k, x_1, \ldots, x_g, t \mid a_1^{m_1} = \ldots = a_s^{m_s} = 1,\ tU^p t^{-1} = U^q\rangle,$$

где p и q — целые числа, такие, что $p > |q| \geq 1$, $(p,q) = 1$, $m_i \geqslant 2$ для $i = 1, \ldots, s$, $g \geqslant 3$, $U = x_1^2 \ldots x_g^2 W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ и $W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ — элемент, определенный выше.

Найдены неприводимые компоненты многообразий представлений $R_n(G)$ и $R_n(G(p,q))$, вычислены их размерности и доказано, что каждая неприводимая компонента является рациональным многообразием.

Ключевые слова: копредставление группы, многообразие представлений, размерность многообразия, рациональное многообразие.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
В. В. Беняш-Кривец, А. Н. Адмиралова. О многообразиях представлений некоторых свободных произведений циклических групп с одним соотношением // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 62–81.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 1.

UDC 512.547 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-62-81

On representation varieties of some one-relator products of cyclic groups

V. V. Beniash-Kryvets, A. N. Admiralova

Beniash-Kryvets Valery Vatslavovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, head of the Department of higher algebra and information security, Belarusian State University (Minsk).

e-mail: benyash@tut.by

Admiralova Alexandra Nikolaevna — software engineer, Limited Liability Company "SoftClub" (Minsk).

e-mail: al.admiralova@gmail.com

Abstract

In the paper representation varieties of two classes of finitely generated groups are investigated. The first class consists of groups with the presentation

$$G = \langle a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k, x_1, \ldots, x_g \mid$$
$$a_1^{m_1} = \ldots = a_s^{m_s} = x_1^2 \ldots x_g^2 W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k) = 1\rangle,$$

where $g \geqslant 3$, $m_i \geqslant 2$ for $i = 1, \ldots, s$ and $W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ is an element in normal form in the free product of cyclic groups

$$H = \langle a_1 \mid a_1^{m_1}\rangle * \ldots * \langle a_s \mid a_s^{m_s}\rangle * \langle b_1\rangle * \ldots * \langle b_k\rangle.$$

The second class consists of groups with the presentation

$$G(p,q) = \langle a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k, x_1, \ldots, x_g, t \mid a_1^{m_1} = \ldots = a_s^{m_s} = 1,\ tU^p t^{-1} = U^q\rangle,$$

where p and q are integer numbers such that $p > |q| \geq 1$, $(p,q) = 1$, $m_i \geqslant 2$ for $i = 1, \ldots, s$, $g \geqslant 3$, $U = x_1^2 \ldots x_g^2 W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ and $W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ is an above defined element.

Irreducible components of representation varieties $R_n(G)$ and $R_n(G(p,q))$ are found, their dimensions are calculated and it is proved, that every irreducible component is a rational variety.

Keywords: a group presentation; a representation variety; a dimension of a variety; a rational variety.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

V. V. Beniash-Kryvets, A. N. Admiralova, 2020, "On representation varieties of some one-relator products of cyclic groups" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 62–81.

1. Введение

Пусть $G = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$ — конечно порожденная группа, $H \subset GL_n(K)$ — связная линейная алгебраическая группа, определенная над полем K, которое всюду далее предполагается алгебраически замкнутым и имеющим нулевую характеристику. Тогда любое линейное представление $\rho : G \to H$ однозначно определяется набором элементов $\rho(g_1), \ldots, \rho(g_m)$. Эти элементы удовлетворяют всем определяющим соотношениям группы G, и, таким образом, имеет место вложение $\rho \mapsto (\rho(g_1), \ldots, \rho(g_m))$ множества $\mathrm{Hom}(G, H)$ в H^m. Образ множества $\mathrm{Hom}(G, H)$ относительно этого вложения является аффинным K-многообразием $R_n(G, H) \subset H^m$, и это многообразие называют многообразием представлений группы G в алгебраическую группу H. В случае $H = GL_n(K)$ мы будем обозначать многообразие $R_n(G, GL_n(K))$ через $R_n(G)$ и называть многообразием n-мерных представлений группы G.

Детально изучены многообразия $R_n(G)$ для конечных групп G. В этом случае каждое представление является вполне приводимым и с точностью до эквивалентности существует лишь конечное число представлений, каждое из которых однозначно определяется своим характером. Поэтому каждая неприводимая компонета многообразия $R_n(G)$ является орбитой некоторого вполне приводимого представления группы G и эти компоненты не пересекаются между собой. Для бесконечных нильпотентных групп большая часть известных результатов была собрана А. Любоцким и Э. Магидом в работе [1]. В ней были описаны многообразия характеров для бесконечных нильпотентных групп G. В статье [2] З. Рудник обобщил эти результаты на разрешимые группы. Кольцо характеров Фрике исследовалось в работе [3].

Однако в общем случае о структуре многообразий $R_n(G)$ известно немного. Такие описания получены только для некоторых классов групп. В статьях [4] и [5] описаны многообразия представлений фундаментальных групп компактных ориентируемых и неориентируемых поверхностей.

В работе [6] описаны многообразия представлений групп, имеющих копредставление вида:

$$\Gamma_g = \left\langle x_1, \ldots x_s, y_1, \ldots, y_g \mid x_1^{m_1} = \ldots = x_s^{m_s} = x_1 \ldots x_s y_1^2 \ldots y_g^2 = 1 \right\rangle,$$

где $m_i \geqslant 2$ для $i = 1, \ldots, s$. В статье [7] описаны все неприводимые компоненты многообразий представлений F-групп и их обобщений, т.е. групп, имеющих копредставление вида:

$$\Gamma_g = \langle (x_1, \ldots x_s, t_1, \ldots, t_k, y_1, \ldots, y_g, z_1, \ldots, z_g) \mid$$
$$x_1^{m_1} = \ldots = x_s^{m_s} = W(x_1, \ldots, x_s, t_1, \ldots, t_k)[y_1, z_1], \ldots, [y_g, z_g] = 1 \rangle,$$

где $m_i = 0$ или $m_i \geqslant 2$ для $i = 1, \ldots, s$, а $W(x_1, \ldots, x_s, t_1, \ldots, t_k)$ — элемент в нормальной форме (возможно, равный единице) в свободном произведении циклических групп $H = \langle x_1 \mid x_1^{m_1} \rangle * \ldots * \langle x_s \mid x_s^{m_s} \rangle * \langle t_1 \rangle * \ldots * \langle t_k \rangle$.

В работе [8] исследовано многообразие представлений группы $SL_2(\mathbb{Z})$. В статье [9] были описаны многообразия представлений $R_n(BS(p, q))$ групп Баумслага-Солитера $BS(p, q)$, т. е. групп, имеющих копредставление вида

$$BS(p, q) = \langle a, b \mid ba^p b^{-1} = a^q \rangle$$

для взаимно простых показателей p и q, таких, что $|p| > q > 1$. В [10] исследования групп Баумслага-Солитера были продолжены, и результаты [9] были расширены на случай не взаимно простых p и q.

В работе [11] получено описание всех подгрупп конечного индекса групп Баумслага-Солитера. Установлено, что все подгруппы индекса m в группе $BS(p, q)$ изоморфны группе H_m, имеющей копредставление

$$H_m = \langle a_1, \ldots, a_m, b \mid a_i^p = a_{i+1}^q, i = 1, \ldots, m-1, ba_m^p b^{-1} = a_1^q \rangle.$$

В работе [12] найдены все неприводимые представления групп H_m над полем $\mathbb{C}$. Используя эти результаты, в [13] получено описание многообразий представлений $R_n(H_m)$ подгрупп конечного индекса групп Баумслага-Солитера.

В [14] были описаны структура и свойства многообразий представлений групп, имеющих копредставление

$$H = \langle x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g, t \mid t([x_1, y_1] \ldots [x_g, y_g])^p t^{-1} = ([x_1, y_1] \ldots [x_g, y_g])^q \rangle,$$

где $g \geqslant 2$, $p > |q| \geq 1$, p и q взаимно просты.

В настоящей статье мы будем рассматривать 2 класса групп. Первый класс — это группы с копредставлением

$$G = \langle a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k, x_1, \ldots, x_g \mid a_1^{m_1} = \ldots = a_s^{m_s} = 1, x_1^2 \ldots x_g^2 W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k) = 1 \rangle, \tag{1}$$

где $g \geqslant 3$, $m_i \geqslant 2$ для $i = 1, \ldots, s$ и $W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ — элемент в нормальной форме (возможно, равный единице) в свободном произведении циклических групп

$$H = \langle a_1 \mid a_1^{m_1} \rangle * \ldots * \langle a_s \mid a_s^{m_s} \rangle * \langle b_1 \rangle * \ldots * \langle b_k \rangle.$$

Отметим, что при этом числа s и k допускаются равными нулю, и в случае $s = 0, k = 0$ такая группа G совпадает с фундаментальной группой компактной неориентируемой поверхности. Многообразия представлений таких групп рассмотрены в [5].

Второй класс — это группы с копредставлением

$$G(p, q) = \langle a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k, x_1, \ldots, x_g, y_1, \ldots, y_g, t \mid a_1^{m_1} = \ldots = a_s^{m_s} = 1,\ tU^p t^{-1} = U^q \rangle, \tag{2}$$

где p и q — целые числа, такие, что $p > |q| \geq 1$, $g \geqslant 3$, $m_i \geqslant 2$ для $i = 1, \ldots, s$, $U = x_1^2 \ldots x_g^2 W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ и элемент $W(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_k)$ удовлетворяет условиям, описанным выше. Отметим, что если $s = 0, k = 0$, то класс таких групп $G(p, q)$ совпадает с рассмотренным в [15]. Заметим также, что группа $G(p, q)$ является HNN-расширением свободного произведения циклических групп $\langle a_1 \mid a_1^{m_1} \rangle * \ldots * \langle a_s \mid a_s^{m_s} \rangle * \langle b_1 \rangle * \ldots * \langle b_k \rangle * \langle x_1 \rangle * \ldots * \langle x_g \rangle$ с проходной буквой t и связанными бесконечными циклическими подгруппами $\langle U^p \rangle$ и $\langle U^q \rangle$. Группы G и $G(p, q)$ можно также рассматривать как свободное произведение циклических групп с одним соотношением. Такие группы изучались в монографии [16].

2. Многообразия представлений групп с копредставлением (1)

Следующее предложение дает описание многообразия представлений конечной циклической группы. В дальнейшем через E_n будем обозначать единичную матрицу порядка n.

Предложение 1. *Пусть $C_l = \langle a \mid a^l = 1 \rangle$ — циклическая группа порядка l, γ — первообразный корень из единицы степени l. Для произвольного разбиения $\alpha = (k_1, \ldots, k_l)$ числа n на l неотрицательных частей (т.е. $n = k_1 + \ldots + k_l$, $k_i \geqslant 0$) положим*

$$V_\alpha = \left\{ X Z_\alpha X^{-1} \mid X \in GL_n(K) \right\},$$

где $Z_\alpha = \operatorname{diag}(\gamma E_{k_1}, \gamma^2 E_{k_2}, \ldots, \gamma^l E_{k_l})$ (если $k_i = 0$, то блок $\gamma^i E_{k_i}$ в матрице V_α отсутствует). Тогда V_α является неприводимой компонентой многообразия представлений $R_n(C_l)$ размерности $n^2 - \sum_{i=1}^{l} k_i^2$ и V_α — рациональное многообразие. При этом $V_\alpha \cap V_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$ и $R_n(C_l) = \cup V_\alpha$, где объединение берется по всем возможным разбиениям α. Общее число неприводимых компонент $R_n(C_l)$ равно числу сочетаний C_{n+l-1}^{l-1}.

Доказательство. V_α является неприводимым замкнутым множеством, поскольку класс сопряженности полупростого элемента в $GL_n(K)$ неприводим и замкнут в топологии Зарисского

(см., например, [17]). Очевидно, что $Y_\alpha^l = E_n$, $V_\alpha \cap V_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$ и $\cup_\alpha V_\alpha = R_n(C_l)$, где объединение берется по всем разбиениям n на l частей. Таким образом, множества V_α составляют полный набор неприводимых компонент $R_n(C_l)$. Размерность V_α равна коразмерности централизатора Z_α в $GL_n(K)$, т. е. $\dim V_\alpha = n^2 - \sum_{i=1}^l k_i^2$. Покажем, что V_α — рациональное многообразие. Пусть T — множество блочных матриц вида (T_{ij}), где $T_{ii} = E_{k_i}$, и пусть $\varphi : T \to V_\alpha$ — морфизм, задаваемый формулой $\varphi(t) = tZ_\alpha t^{-1}$. Ясно, что $\dim T = \dim V_\alpha$, и непосредственное вычисление показывает, что φ — инъективный (и, следовательно, доминантный) морфизм. Значит, φ — бирациональный изоморфизм (см. [18, предложение 3.17]). Очевидно, что T — рациональное многообразие, поэтому и V_α рационально. Наконец, общее число неприводимых компонент $R_n(C_l)$ совпадает с числом решений в целых неотрицательных числах уравнения $x_1 + \dots + x_l = n$. В [19, глава 1] показано, что это число равно C_{n+l-1}^{l-1}. □

Введем следующие обозначения. Пусть T — группа, определенная в (1). Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant s$, обозначим через n_i сумму всех показателей, с которыми элемент b_i входит в слово $W(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_k)$ (если b_i не входит в $W(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_k)$, то полагаем $n_i = 0$). Пусть d — наибольший общий делитель чисел $2, n_1, \dots, n_s$. Таким образом, $d = 2$, если все n_i четны, и $d = 1$ в противном случае. Далее, положим ε_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, — первообразный корень из 1 степени m_i. Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant s$, выберем разбиение $\alpha_i = (k_{i,1}, \dots, k_{i,m_i})$ числа n на m_i неотрицательных слагаемых. Пусть

$$V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)} = V_{\alpha_1} \times \dots \times V_{\alpha_s} \times GL_n(K)^k$$

и для фиксированной матрицы $A \in GL_n(K)$ рассмотрим следующее многообразие:

$$T(\alpha_1, \dots, \alpha_s, A) = \big\{(A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_k, X_1, \dots, X_g) \in V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)} \times GL_n(K)^g \mid \\ X_1^2 \dots X_g^2 W(A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_k) = A\big\}.$$

Нам также необходим морфизм

$$f_W : GL_n(K)^{s+k} \to GL_n(K), \qquad f_W(A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_k) = W(A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_k). \quad (3)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *1. Предположим, что выполнено одно из условий: 1) пара (n, g) отлична от $(2, 3)$; 2) $(n, g) = (2, 3)$ и A — не скалярная матрица; 3) $n = 2$, $g = 3$, $A = \alpha E_2$ и $f_W(V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)})$ содержит более одной точки. Тогда многообразие $T(\alpha_1, \dots, \alpha_s, A)$ состоит из d неприводимых компонент, каждая из которых является рациональным многообразием.*

2. Если $n = 2$, $g = 3$, $A = \alpha E_2$ и $f_W(V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)})$ состоит из одной точки, то $T(\alpha_1, \dots, \alpha_s, A)$ состоит из 3 неприводимых компонент, каждая из которых является рациональным многообразием.

Размерность любой неприводимой компоненты U многообразия $T(\alpha_1, \dots, \alpha_s, A)$ равна

$$\dim U = (g + k + s - 1)n^2 - \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{m_i} (k_{i,j}^2). \quad (4)$$

Легко видеть, что

$$R_n(G) = \cup T(\alpha_1, \dots, \alpha_s, E_n),$$

где объединение берется по всем наборам разбиений $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, где α_i — разбиение n на m_i неотрицительных частей. Из теоремы 1 получаем описание многообразий представлений $R_n(G)$ группы G, заданной копредставлением (1).

Теорема 2. *1. Если пара (n,g) отлична от $(2,3)$, то многообразие $T(\alpha_1,\dots,\alpha_s,E_n)$ состоит из d неприводимых компонент многообразия $R_n(G)$, каждая из которых является рациональным многообразием. Общее число неприводимых компонент $R_n(G)$ равно $d\prod_{i=1}^{s} C_{n+m_i-1}^{m_i-1}$.*

2. Если $n=2$, $g=3$ и образ $f_W(V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)})$ содержит более одной точки, то многообразие $T(\alpha_1,\dots,\alpha_s,E_2)$ состоит из d неприводимых компонент многообразия $R_n(G)$, каждая из которых является рациональным многообразием.

2. Если $n=2$, $g=3$ и образ $f_W(V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)})$ состоит из одной точки, то $T(\alpha_1,\dots,\alpha_s,E_2)$ состоит из 3 неприводимых компонент многообразия $R_2(G)$, каждая из которых является рациональным многообразием.

В случае $n=2$, $g=3$ многообразие $R_n(G)$ состоит из $(3-d)f+d\prod_{i=1}^{s} C_{n+m_i-1}^{m_i-1}$ компонент, где f — число таких наборов разбиений $(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$, что $f_W(V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)})$ состоит из одной точки.

Размерности неприводимых компонент описываются формулой (4).

Для доказательства теоремы 1 нам необходим ряд лемм. Следующая лемма может быть доказана дословным повторением рассуждений из [5].

Лемма 1. *Пусть $A\in GL_n(K)$. Положим*

$$V_g(A)=\{(y_1,\dots,y_g)\in GL_n(K)^g \mid y_1^2\dots y_g^2=A\}.$$

Пусть $g\geqslant 3$. Справедливы следующие утверждения.

1) Если $(n,g)\neq(2,3)$, либо $(n,g)=(2,3)$ и A не является скалярной матрицей, то $V_g(A)$ состоит из двух непересекающихся рациональных компонент размерности $(g-1)n^2$.

2) Если $n=2$, $g=3$, $A=\beta E_2$, то $V_3(A)$ состоит из трех рациональных компонент размерности 8.

Лемма 2. *Если U — неприводимая компонента многообразия $T(\alpha_1,\dots,\alpha_s,A)$, то*

$$\dim U=(g-1)n^2+\dim V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}.$$

Доказательство. Так как $T(\alpha_1,\dots,\alpha_s,A)$ является подмногообразием в

$$V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}\times GL_n(K)^g,$$

задаваемым n^2 уравнениями, то

$$\dim U\geqslant \dim V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}\times GL_n(K)^g-n^2=(g-1)n^2+\dim V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}. \tag{5}$$

Чтобы доказать противоположное неравенство, рассмотрим морфизм

$$\pi: T(\alpha_1,\dots,\alpha_s,A)\to V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)},$$
$$\pi(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k,C_1,\dots,C_g)=(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k). \tag{6}$$

Пусть π' — ограничение π на U. Для произвольной точки $(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k)\in V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}$ слой

$$\pi'^{-1}(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k)=\{(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k,C_1,\dots,C_g)\mid$$
$$C_1,\dots,C_g\in GL_n(K), C_1^2\dots C_g^2W(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k)=A\},$$

можно отождествить с подмногообразием в $V_g(D)$, где $D=AW(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k)^{-1}$. Поэтому по лемме 1 все слои морфизма π' имеют размерность не более чем $(g-1)n^2$. Тогда по теореме о размерности слоев морфизма,

$$\dim U\leqslant \dim V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}+(g-1)n^2. \tag{7}$$

Из неравенств (5), (7) следует требуемое равенство. □

Лемма 3. *Для любой неприводимой компоненты U многообразия $T(\alpha_1,\dots,\alpha_s,A)$ ограничение π' мофизма π на U является доминантным морфизмом $U\to V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}$. При этом все слои морфизма π' имеют размерность $(g-1)n^2$.*

Доказательство. В самом деле, предположим, что $\dim\overline{\pi(U)}<\dim V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}$. Для точки $v=(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k)\in V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}$ слой $\pi^{-1}(v)$ можно отождествить с подмногообразием в $V_g(D)$, где $D=AW(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k)^{-1}$. Поэтому по лемме 1 все слои морфизма π' имеют размерность не более чем $(g-1)n^2$. Тогда по теореме о размерности слоев морфизма,

$$\dim U<\dim V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}+(g-1)n^2. \tag{8}$$

Получили противоречие, доказывающее доминантность π'. Для того, чтобы в (8) было равенство, также необходимо, чтобы все слои π' имели размерность $(g-1)n^2$. Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Для любой неприводимой компоненты V многообразия $T(\alpha_1,\dots,\alpha_s,A)$ справедливы утверждения:*

1) множество

$$U=\{(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k,C_1,\dots,C_g)\in V\mid C_1,\dots,C_g\ -\text{ регулярные элементы}\}\ -$$

непустое открытое по Зарисскому подмножество в V;

2) если пара (n,g) отлична от $(2,3)$, то множество

$$U'=\{(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k,C_1,\dots,C_g)\in V\mid C_1^2,\dots,C_g^2\ -\\ \text{регулярные полупростые элементы}\}\ -$$

непустое открытое по Зарисскому подмножество в V;

Лемма доказывается аналогично доказательству предложений 1.1 и 1.3 в [5].

Лемма 5. *Если пара (n,g) отлична от $(2,3)$, то многообразие $T(\alpha_1,\dots,\alpha_s,A)$ имеет не более двух неприводимых компонент.*

Доказательство. Допустим противное, пусть $T(\alpha_1,\dots,\alpha_s,A)$ имеет l компонент W_i, где $l>2$. Обозначим через W_i' открытое подмножество в W_i, получающееся удалением из W_i всех пересечений $W_i\cap W_j$, $j\neq i$. Тогда $W_i'\cap W_j'=\varnothing$ при $i\neq j$. Поскольку все множества $\pi(W_i')$ плотны в $V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}$, то $\cap_i\pi(W_i')\neq\varnothing$. Пусть $x\in\cap_i\pi(W_i')$. В силу леммы 1, слой $\pi^{-1}(x)$ состоит из двух неприводимых непересекающихся компонент T_1 и T_2. Тогда $T_1\subset W_i$, $T_2\subset W_j$ для некоторых индексов i,j. При этом $T_1\cap W_i'\neq\varnothing$, $T_2\cap W_j'\neq\varnothing$. Но поскольку мы допустили, что $l\geqslant 3$ и по построению $x\in\cap_i\pi(W_i')$, то для любого k, отличного от i,j, мы должны иметь $\pi^{-1}(x)\cap W_k'\neq\varnothing$. Следовательно, либо $T_1\cap W_k'\neq\varnothing$, либо $T_2\cap W_k'\neq\varnothing$. В первом случае $T_1\cap W_k'$ и $T_1\cap W_i'$ — два плотных подмножества в T_1. Следовательно, $W_i'\cap W_k'\neq\varnothing$ — противоречие. Аналогично получаем противоречие и во втором случае. Лемма 5 доказана. □

Лемма 6. *Если пара (n,g) отлична от $(2,3)$ и $d=2$, то многообразие $T(\alpha_1,\dots,\alpha_s,A)$ состоит из двух непересекающихся неприводимых компонент.*

Доказательство. Пусть

$$U=\{(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k,C_1,\dots,C_g)\in V_{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}\times GL_n(K)^g\mid\\ \det(C_1^2\dots C_g^2W(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k))=\det A\}. \tag{9}$$

Так как $d=2$, т.е. все n_i четны, то уравнение, задающее U, можно записать в виде

$$(\det C_1\dots\det C_g(\det B_1)^{\frac{n_1}{2}}\dots(\det B_k)^{\frac{n_k}{2}})^2=b,$$

где $b \in K$ — константа, определяемая равенством

$$b = \det A(\det A_1)^{-p_1} \dots (\det A_s)^{-p_s}.$$

Здесь p_i — сумма показателей, с которыми A_i входит в слово W. Элемент b является константой, поскольку каждая матрица A_i сопряжена с фиксированной матрицей Z_{α_i}, определенной в предложении 1, и, следовательно, $\det A_i$ не зависит от выбора матрицы $A_i \in V_{\alpha_i}$. Пусть $b_1 \in K$ такой элемент, что $b_1^2 = b$. Тогда многообразие U является объединением двух замкнутых непересекающихся подмножеств U_1 и U_2, задаваемых уравнениями

$$U_1 = \{(A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_k, C_1, \dots, C_g) \in U \mid \det(C_1 \dots C_g)(\det B_1)^{\frac{n_1}{2}} \dots (\det B_k)^{\frac{n_1}{2}} = b_1,$$
$$U_2 = \{(A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_k, C_1, \dots, C_g) \in U \mid \det(C_1 \dots C_g)(\det B_1)^{\frac{n_1}{2}} \dots (\det B_k)^{\frac{n_1}{2}} = -b_1.$$

Следовательно, $T(\alpha_1, \dots, \alpha_s, A)$ является объединением двух непустых непересекающихся замкнутых подмножеств $T_1 = T(\alpha_1, \dots, \alpha_s, A) \cap U_1$ и $T_2 = T(\alpha_1, \dots, \alpha_s, A) \cap U_2$. Значит, $T(\alpha_1, \dots, \alpha_s, A)$ имеет не менеее двух неприводимых компонент. Учитывая лемму 5, получаем, что $T(\alpha_1, \dots, \alpha_s, A)$ имеет ровно две неприводимые компоненты. □

Лемма 7. *Если пара (n, g) отлична от $(2, 3)$ и $d = 1$, то многообразие $T(\alpha_1, \dots, \alpha_s, A)$ неприводимо.*

Доказательство. Покажем, что в этом случае многообразие U, определенное в (9), неприводимо. Уравнение, задающее U, можно записать в виде

$$(\det C_1)^2 \dots (\det C_g)^2 (\det B_1)^{n_1} \dots (\det B_k)^{n_k} = b, \tag{10}$$

где b определено в доказательстве леммы 6. По условию леммы существует нечетное n_i. Пусть для определенности $n_1 = 2k + 1$. Сделаем замену переменных

$$C_1 = \bar{C}_1 \bar{B}_1^{-k},\ C_i = \bar{C}_i,\ 2 \leqslant i \leqslant s,\ B_j = \bar{B}_j,\ 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Тогда уравнение (10) можно переписать в виде

$$\det \bar{B}_1((\det \bar{C}_1)^2 \dots (\det \bar{C}_g)^2 (\det \bar{B}_2)^{n_2} \dots (\det \bar{B}_k)^{n_k}) - b = 0.$$

Нетрудно убедиться, что многочлен в левой части неприводим, поскольку $\det \bar{B}_1$ входит в него в первой степени.

Многообразие $T(\alpha_1, \dots, \alpha_s, A)$ содержится в U. Дальнейшее доказательство с незначительными модификациями повторяет доказательство теоремы из § 3 в [5]. Для произвольной неприводимой компоненты $V \subset T(\alpha_1, \dots, \alpha_s, A)$ строится коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi} & W \\ \delta \searrow & & \swarrow \varphi \\ & V_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)} \times GL_n(K)^{g-1} & \end{array}$$

где W — некоторое неприводимое многообразие размерности $(g-1)n^2$, φ, ψ — регулярные морфизмы, а δ — проекция, задаваемая формулой

$$\delta(A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_k, C_1, \dots, C_g) = (C_2, \dots, C_g).$$

Доказывается, что морфизмы δ, φ, ψ являются доминантными и

$$[K(W) : \delta^*(K(V_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)} \times GL_n(K)^{g-1}))] = 2^n.$$

Отсюда и из коммутативности диаграммы непосредственно следует, что листность морфизма δ на некотором открытом множестве не меньше, чем 2^n. С другой стороны, легко убедиться, что слой $\widetilde{\delta}^{-1}(z)$ для аналогичной проекции

$$\widetilde{\pi} : T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A) \to V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)} \times GL_n(K)^{g-1},$$

где $z \in V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)} \times GL_n(K)^{g-1}$ — точка "общего"положения, состоит в точности из 2^n элементов. Это означает, что V обязано совпадать с $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$, т.е. $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ — неприводимое многообразие. □

Лемма 8. *Пусть $n = 2$, $g = 3$.*

1. Если $\operatorname{Im} f_W$ состоит из одной точки B, то B — скалярная матрица.

2. Если $\operatorname{Im} f_W$ содержит более одной точки, то $\operatorname{Im} f_W$ содержит нескалярную матрицу.

Доказательство. 1. Отметим, что если $(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k) \in V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$, то для любой матрицы $C \in GL_2(K)$

$$(CA_1C^{-1}, \ldots, CA_sC^{-1}, CB_1C^{-1}, \ldots, CB_kC^{-1}) \in V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}.$$

Поэтому

$$W(CA_1C^{-1}, \ldots, CA_sC^{-1}, CB_1C^{-1}, \ldots, CB_kC^{-1}) =$$
$$= CW(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k)C^{-1} = CBC^{-1} = B.$$

Значит, матрица B перестановочна со всеми матрицами из $GL_2(K)$ и поэтому B — скалярная матрица.

2. Вначале предположим, что существует $n_i \neq 0$. Положим

$$B_i = \operatorname{diag}(d_1, d_2),\ B_j = E_2 \text{ при } \ j \neq i,\ A_r = Z_{\alpha_r},$$

где диагональные матрицы Z_{α_r} определены в предложении 1. Тогда

$$W(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k) = \begin{pmatrix} d_1^{n_i} b_1 & 0 \\ 0 & d_2^{n_i} b_2 \end{pmatrix}$$

для некоторых констант b_1, b_2 и поэтому $W(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k)$ не скалярная матрица при подходящем выборе d_1, d_2.

Пусть теперь все $n_i = 0$. Тогда для любой точки $(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k) \in V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$

$$\det W(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k) = b$$

для некоторой константы b. Допустим, что $\operatorname{Im}\ f_W \subset \{\gamma E_2 \mid \gamma \in K^*\} = L$. Поскольку $\dim \overline{\operatorname{Im}\ f_W} \geqslant 1$, то $\operatorname{Im}\ f_W$ плотное подмножество в L, поэтому функция det не может быть константой на $\operatorname{Im}\ f_W$. □

Лемма 9. *Пусть $n = 2$, $g = 3$.*

1. Пусть $\operatorname{Im} f_W$ состоит из одной точки. Тогда если A — скалярная матрица, то $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ состоит из 3 неприводимых компонент, а если A — не скалярная матрица, то $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ состоит из 2 неприводимых компонент.

2. Пусть $\operatorname{Im} f_W$ — не точка. Тогда $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ состоит из d неприводимых компонент.

Во всех случаях каждая неприводимая компонента является рациональным многообразием размерности $8 + \dim V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$.

Доказательство. 1. По лемме 8 $W(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k) = \gamma E_2$ для некоторой константы $\gamma \in K^*$ и для всех точек $(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k) \in V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$. Поэтому многообразие $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ задается уравнением

$$C_1^2 C_2^2 C_3^2 = \gamma^{-1} A.$$

Следовательно,

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A) = V_3(\gamma^{-1}A) \times V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$$

и утверждение пункта 1 следует из леммы 1.

2. Покажем вначале, что $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ имеет не более двух неприводимых компонент. Пусть $L = \overline{\operatorname{Im} f_W}$, $M = \{\gamma A \mid \gamma \in K^*\}$.

Проверим, что $L \not\subset M$. По лемме 8 $\operatorname{Im} f_W$ содержит нескалярную матрицу D. Если A — скалярная матрица, то очевидно, что $L \not\subset M$. Пусть A — нескалярная матрица и допустим, что $L \not\subset M$. Тогда $D = \gamma A$, $\gamma \in K^*$. Поскольку $CDC^{-1} \in L$ для любой матрицы $C \in GL_2(K)$, то $CDC^{-1} = \gamma_C A$, $\gamma_C \in K^*$. Следовательно, $\gamma CAC^{-1} = \gamma_C A$ и это равенство выполняется для всех матриц $C \in GL_2(K)$, что невозможно для нескалярной матрицы A.

Таким образом, $U = L \setminus M$ — открытое по Зарисскому подмножество в L. Кроме того, существует открытое подмножество $U_1 \subset L$ такое, что $U_1 \subset \operatorname{Im} f_W$. Пусть $U_2 = U_1 \cap U$. Для любой точки $z \in U_2$ по лемме 1 слой $\pi^{-1}(z)$ состоит из двух непересекающихся неприводимых компонент. Рассуждая как при доказательстве леммы 5, получаем, что $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ имеет не более двух неприводимых компонент.

Пусть теперь $d = 2$. Как и при доказательстве леммы 6, получаем, что $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ является объединением двух замкнутых непересекающихся подмножеств. Следовательно, эти подмножества являются неприводимыми компонентами $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$.

Пусть $d = 1$. Как и при доказательстве леммы 7, можно показать, что существует только одна неприводимая компонента S многообразия $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ такая, что открытое подмножество

$$U = \{(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, C_1, C_2, C_3) \in S \mid C_1^2, C_2^2, C_3^2 \text{ — регулярные полупростые}\}$$

непусто. Таким образом, объединение S_1 оставшихся компонент должно совпадать с замыканием множества

$$U_1 = \{(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, C_1, C_2, C_3) \in T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A) \mid C_1^2, C_2^2, C_3^2 \text{ — нерегулярны}\}$$

Мы знаем также по лемме 4, что на любой неприводимой компоненте многообразия $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ найдется точка $(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, C_1, C_2, C_3)$ с регулярными C_1, C_2, C_3. Но условие X — регулярная, а X^2 — нерегулярная матрица эквивалентно тому, что X сопряжена диагональной матрице вида $\operatorname{diag}(\mathrm{a}, -\mathrm{a})$; в частности, в этом случае X^2 — скалярная матрица. Поэтому S_1 обязано совпадать с замыканием множества

$$U_2 = \{(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X\operatorname{diag}(a, -a)X^{-1}, Y\operatorname{diag}(b, -b)Y^{-1}, Z\operatorname{diag}(c, -c)Z^{-1}) \mid \\ a, b, c \in K^*,\ X, Y, Z \in GL_2(K)\} \cap T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A).$$

Пусть V — неприводимая компонента $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$, содержащаяся в S_1. По лемме 3 проекция $\pi' : V \to V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$ доминантна. Пусть U_3 — открытое подмножество, содержащееся в $V \cap U_2$ и U_4 — открытое подмножество $V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$, содержащееся в $\pi'(U_3)$. Тогда для любой точки $(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k) \in U_4$ справедливо

$$W(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k) = tA$$

для некоторой константы $t \in K^*$. Обозначим $P = \{tA \mid t \in K^*\}$. Тогда $f_W(U_4) \subset P$. Поскольку $\overline{U_4} = V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$, то $f_W(V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}) = \overline{f_W(U_4)} \subset P$ в силу того, что P замкнуто в $GL_2(K)$.

Если A — скалярная матрица, то получаем противоречие с леммой 8. Если же A — не скалярная матрица, то для любой точки $(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k) \in V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$ и для любой матрицы

$C \in GL_2(K)$ имеем

$$W(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k) = tA,$$
$$W(CA_1C^{-1}, \ldots, CA_sC^{-1}, CB_1C^{-1}, \ldots, CB_kC^{-1}) = t_1A =$$
$$= CW(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k)C^{-1} = tCAC^{-1}$$

для некоторых $t, t_1 \in K^*$. Таким образом, для любой матрицы C найдется $t_1 \in K^*$ такой, что $t_1A = tCAC^{-1}$. Нетрудно видеть, что для нескалярной матрицы A это не так. Полученное противоречие и доказывает, что многообразие $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ неприводимо. □

Лемма 10. *Каждая неприводимая компонента многообразия $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ является рациональным многообразием.*

Доказательство рациональности неприводимых компонент многообразия $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ полностью аналогично доказательству рациональности неприводимых компонент многообразия представлений фундаментальной группы компактной неориентируемой поверхности в [5].

Леммы 1–10 в совокупности дают доказательство теоремы 1, а теорема 2 является непосредственным следствием теоремы 1.

3. Многообразия представлений групп с копредставлением (2)

Введем некоторые необходимые обозначения. Через f обозначим наибольший общий делитель p и q, через $\Omega(p, q)$ — множество матриц $A \in GL_n(K)$, таких, что A^p и A^q сопряжены. Для матрицы $A \in GL_n(K)$ обозначим через $Z(A)$ ее централизатор. Пусть $A \in \Omega(p, q)$, T_0 — некоторая фиксированная матрица, для которой справедливо равенство:

$$T_0A^pT_0^{-1} = A^q \tag{11}$$

Отметим, что в силу леммы 2.3 из [9], следующие централизаторы совпадают:

$$Z(A^f) = Z(A^p) = Z(A^q) \tag{12}$$

Для матрицы $A \in GL_n(K)$ обозначим через $V_g(A)$ следующее многообразие:

$$V_g(A) = \bigcup_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)} T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, E_n),$$

где объединение берется по всем наборам разбиений $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, а α_i — разбиение n на m_i неотрицательных частей. Пусть d_A число неприводимых компонент многообразия $V_g(A)$, формулу для вычисления d_A можно получить из теоремы 1, а сами неприводимые компоненты будем обозначать $L_i(A)$, $1 \leqslant i \leqslant d_A$. Для каждой пары матриц A, T_0 и числа i, $1 \leqslant i \leqslant d_A$, рассмотрим морфизм

$$f_{A,i,T_0} : L_i(A) \times Z(A^f) \times GL_n(K) \to GL_n(K)^{s+k+g+1},$$
$$(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g, z, T) \mapsto T(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g, T_0z)T^{-1} \tag{13}$$

Докажем следующие утверждения о свойствах морфизма f_{A,i,T_0}.

Лемма 11. *Образ морфизма $\operatorname{Im} f_{A,i,T_0}$ содержится в многообразии $R_n(G(p, q))$.*

Доказательство. Для произвольного набора

$$T(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g, T_0z)T^{-1} \in \operatorname{Im} f_{A,i,T_0}$$

имеем:

$$\begin{gathered}T(T_0z)T^{-1}((TX_1T^{-1})^2\dots(TX_gT^{-1})^2W(TA_1T^{-1},\dots,TA_sT^{-1},\\ TB_1T^{-1},\dots,TB_kT^{-1}))^pT(T_0z)^{-1}T^{-1}=\\ =TT_0z(X_1^2\dots X_g^2W(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k))^pz^{-1}T_0^{-1}T^{-1}=TT_0zA^pz^{-1}T_0^{-1}T^{-1}\end{gathered}\tag{14}$$

Так как $z\in Z(A^f)$, то в силу (12) правая часть (14) преобразуется к виду

$$TT_0A^pT_0^{-1}T^{-1}=TA^qT^{-1}.$$

С другой стороны, мы имеем равенство

$$\begin{gathered}((TX_1T^{-1})^2\dots(TX_gT^{-1})^2W(TA_1T^{-1},\dots,TA_sT^{-1},TB_1T^{-1},\dots,TB_kT^{-1})^q=\\ =T(X_1^2\dots X_g^2W(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k))^qT^{-1}=TA^qT^{-1}\end{gathered}$$

Это означает, что точка $T(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k,X_1,\dots,X_g,T_0z)T^{-1}$ принадлежит многообразию $R_n(G(p,q))$, что и завершает доказательство леммы 11. □

Лемма 12. *Образ морфизма* $\operatorname{Im} f_{A,i,T_0}$ *не зависит от выбора матрицы* T_0.

Доказательство. Пусть T_1, $T_1\neq T_0$, — другая матрица, для которой также справедливо равенство $T_1A^pT_1^{-1}=A^q$, и f_{A,i,T_0}, f_{A,i,T_1} — соответствующие морфизмы. Тогда с учётом (11) имеем $T_1^{-1}T_0A^pT_0^{-1}T_1=A^p$, откуда следует, что $T_1^{-1}T_0\in Z(A^p)$. Следовательно, для любого элемента централизатора $z_0\in Z(A^f)$ в силу равенств (12) имеем $z_1=T_1^{-1}T_0z_0\in Z(A^f)$ и $T_0z_0=T_1z_1$. Следовательно, для любого упорядоченного набора $(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k,X_1,\dots,X_g,T)\in L_i(A)\times GL_n(K)$ справедливо равенство

$$\begin{gathered}f_{A,i,T_0}(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k,X_1,\dots,X_g,z_0,T)=\\ =f_{A,i,T_1}(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k,X_1,\dots,X_g,z_1,T),\end{gathered}$$

что и требовалось доказать. □

Таким образом, ввиду независимости образа $\operatorname{Im} f_{A,i,T_0}$ от выбора матрицы t_0 далее для образов морфизмов f_{A,i,T_0} мы будем пользоваться обозначением $\operatorname{Im} f_{A,i}$. Замыкание образа $\operatorname{Im} f_{A,i}$ в топологии Зарисского будем обозначать $W_i(A)$). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *1. Многообразие* $W_i(A)$ *является неприводимой компонентной* $R_n(G(p,q))$, *и этими компонентами исчерпываются все неприводимые компоненты* $R_n(G(p,q))$.

2. Размерность компоненты $W_i(A)$ *равна* $\dim V_g(A)+\dim Z(A^f)-\dim Z(A)$.

3. Число неприводимых компонент многообразия $R_n(G(p,q))$ *равно* $\sum_{A\in X}d_A$, *где* X — *множество представителей всех классов сопряженности в* $\Omega(p,q)$.

Для доказательства теоремы 3 нам необходим ряд лемм.

Лемма 13. *Многообразие* $R_n(G(p,q))$ *является объединением всех своих замкнутых неприводимых подмножеств вида* $W_i(A)$.

Доказательство. Многообразие $W_i(A)$ неприводимо как замыкание образа неприводимого многообразия относительно регулярного морфизма. Покажем, что многообразия $W_i(A)$ покрывают $R_n(G(p,q))$. Рассмотрим произвольную точку

$$(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k,X_1,\dots,X_g,t)\in R_n(G(p,q)).$$

Пусть $\tilde A=X_1^2\dots X_g^2W(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k)$. Нетрудно видеть, что$\tilde A\in\Omega(p,q)$, и найдется неприводимая компонента $L_k(\tilde A)$, такая, что $(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k,X_1,\dots,X_g)\in L_k(\tilde A)$. Легко проверить, что в таком случае точка $(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k,X_1,\dots,X_g,t)$ является образом упорядоченного набора $(A_1,\dots,A_s,B_1,\dots,B_k,X_1,\dots,X_g,E,E)\in L_k(\tilde A)\times Z(\tilde A^d)\times GL_n(K)$ относительно морфизма$f_{\tilde A,k,t}$. □

Лемма 14. *Если $A, B \in \Omega(p,q)$ — подобные матрицы, то при подходящей нумерации компонент $W_i(A) = W_i(B)$, $1 \leqslant i \leqslant d_A$.*

Доказательство. Пусть $B = SAS^{-1}$. Тогда для всякой матрицы T_0, такой, что $T_0 A^p T_0^{-1} = A^q$, справедливо равенство $(ST_0S^{-1})B^p(ST_0S^{-1})^{-1} = B^q$. Отображение

$$f : V_g(A) \to V_g(B),$$
$$f(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g) = S(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g)S^{-1},$$

очевидно, является бирегулярным изоморфизмом. Положим $L_i(B) = f(L_i(A))$. Рассмотрим произвольную точку $(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g, z, T) \in L_i(A) \times Z(A^f) \times GL_n(K)$. Тогда, так как $Z(A^f) = S^{-1}Z(B^f)S$, то

$$(S^{-1}A_1S, \ldots, S^{-1}A_sS, S^{-1}B_1S, \ldots, S^{-1}B_kS, S^{-1}X_1S, \ldots, S^{-1}X_gS, S^{-1}zS, TS) \in$$
$$\in L_i(B) \times Z(B^d) \times GL_n(K)$$

и

$$f_{A,i,T_0}(x_1, \ldots, x_g, z, T) = f_{B,i,S^{-1}T_0S}(S^{-1}x_1S, \ldots, S^{-1}x_gS, S^{-1}zS, TS).$$

Значит, $\operatorname{Im} f_{A,i} \subset \operatorname{Im} f_{B,i}$. Аналогично доказывается противоположное включение. Таким образом, $\operatorname{Im} f_{A,i} = \operatorname{Im} f_{B,i}$ и, переходя к замыканиям, получаем, что $W_i(A) = W_i(B)$. $\square$

Лемма 15. *Если матрицы $A, B \in \Omega(p,q)$ не подобны, то многообразия $W_i(A)$ и $W_j(B)$ не содержатся друг в друге.*

Доказательство. Для доказательства нам понадобится описание многообразий представлений групп Баумслага-Солитера $R_n(BS(p,q))$, полученное в [10]. Пусть $A \in \Omega(p,q)$ — фиксированная матрица, $A_1 = A^f$, где $f = (p,q)$ — наибольший общий делитель p и q, и $T_0 \in GL_n(K)$ такая матрица, что $T_0 A_1^{p_1} T_0^{-1} = A_1^{q_1}$, где $p_1 = \frac{p}{f}, q_1 = \frac{q}{f}$. Рассмотрим отображение

$$g_A : Z(A_1) \times GL_n(K) \to GL_n(K) \times GL_n(K),\ (Z, X) \mapsto (XAX^{-1}, XT_0ZX^{-1}).$$

Обозначим через $H(A)$ замыкание в топологии Зарисского образа $\operatorname{Im} g_A$. В [10] доказано, что многообразия $H(A)$ являются в точности неприводимыми компонентами $R_n(BS(p,q))$, и если матрицы A и B не подобны, то многообразия $H(A)$и $H(B)$ не содержатся друг в друге.

Рассмотрим теперь следующий морфизм:

$$\alpha : R_n(G(p,q)) \to R_n(BS(p,q)), \alpha(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g, t) =$$
$$= (x_1^2 \ldots x_g^2 W(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k), t).$$

Поскольку для произвольной точки $z = (A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g, t) \in \operatorname{Im} f_{A,i}$ справедливо $\alpha(z) \in H(A)$и $\operatorname{Im} f_{A,i}$ плотно в $W_i(A)$, то $\alpha(W_i(A)) \subset H(A)$, $1 \leqslant i \leqslant d_A$. Покажем теперь, что $\alpha(W_i(A))$ плотно в $H(A)$. Рассмотрим произвольную точку

$$y = g_A(Z, X) = X(A, T_0Z)X^{-1} \in \operatorname{Im} g_A.$$

Тогда для любой точки $(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g) \in L_i(A)$ имеем

$$\alpha \circ f_{A,i,T_0}(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g, Z, X) =$$
$$= X(x_1^2, \ldots, x_g^2 W(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k), T_0Z)X^{-1} = X(A, T_0Z)X^{-1} = y.$$

Значит, $\alpha(W_i(A)) \supset \operatorname{Im} g_A$, следовательно, $\alpha(W_i(A))$ является плотным подмножеством в $H(A)$.

Допустим теперь, что матрицы $A, B \in \Omega(p,q)$ не подобны, но имеет место включение $W_i(A) \supset W_j(B)$. Тогда $\alpha(W_i(A)) \supset \alpha(W_j(B))$ и мы имеем

$$H(A) = \overline{\alpha(W_i(A))} \supset \overline{\alpha(W_j(B))} = H(B).$$

Приходим к противоречию. Следовательно, многообразия $W_i(A)$ и $W_j(B)$ не содержатся друг в друге. □

Лемма 16. *Размерность многообразия* $W_i(A)$ *равна* $\dim L_i(A)+n^2+\dim Z(A^f)-\dim Z(A)$, *где размерность* $\dim L_i(A)$ *вычислена в теореме 1.*

Доказательство. Для вычисления размерности $W_i(A)$ воспользуемся теоремой о размерности слоев морфизма. Вычислим размерность слоев морфизма f_{A,i,T_0}. Пусть

$$w_0 = f_{A,i,T_0}(A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_k, X_1, \dots, X_g, z_0, T_0).$$

Вычислим $\dim f^{-1}_{A,i,T_0}(w_0)$. Пусть

$$u = (C_1, \dots, C_s, D_1, \dots, D_k, Y_1, \dots, Y_g, z, T)$$

и пусть $f_{A,i,T_0}(u) = w_0$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} &T_0(A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_k, X_1, \dots, X_g, T_0 z_0)T_0^{-1} = \\ &= T(C_1, \dots, C_s, D_1, \dots, D_k, Y_1, \dots, Y_g, T_0 z)T^{-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_i &= T^{-1}T_0A_iT_0^{-1}T, 1 \leqslant i \leqslant s, \\ D_i &= T^{-1}T_0B_iT_0^{-1}T, 1 \leqslant i \leqslant k, \\ Y_i &= T^{-1}T_0X_iT_0^{-1}T, 1 \leqslant i \leqslant g. \end{aligned} \tag{16}$$

Поскольку для точек

$$(A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_k, X_1, \dots, X_g), (C_1, \dots, C_s, D_1, \dots, D_k, Y_1, \dots, Y_g) \in L_i(A)$$

справедливо равенство

$$X_1^2 \dots X_g^2 W(A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_k) = Y_1^2 \dots Y_g^2 W(C_1, \dots, C_s, D_1, \dots, D_k) = A, \tag{17}$$

то из равенств (16)–(17) получаем $A = T_0^{-1}TAT^{-1}T_0$. Следовательно, $T_0^{-1}T \in Z(A)$, откуда

$$T = T_0 Z_1, \tag{18}$$

где $Z_1 \in Z(A)$. Тогда

$$\begin{aligned} C_i &= Z_1^{-1}A_iZ_1, 1 \leqslant i \leqslant s, \\ D_i &= Z_1^{-1}B_iZ_1, 1 \leqslant i \leqslant k, \\ Y_i &= Z_1^{-1}X_iZ_1, 1 \leqslant i \leqslant g, \end{aligned} \tag{19}$$

и из равенств (15) и (18) получаем $T_0 z_0 = Z_1 T_0 z Z_1^{-1}$, а значит,

$$z = t_o^{-1} Z_1^{-1} T_0 z_0 Z_1. \tag{20}$$

Проверим, что элемент z, определяемый формулой (20), принадлежит $Z(A^f)$. Поскольку $Z(A^f) = Z(A^p) = Z(A^q)$ в силу (12), то следующее вычисление показывает, что $z \in Z(A^f)$:

$$zA^pz^{-1} = (t_o^{-1}Z_1^{-1}T_0z_0Z_1)A^p(Z_1^{-1}z_0^{-1}T_0^{-1}Z_1T_0) =$$
$$= t_o^{-1}Z_1^{-1}T_0A^pT_0^{-1}Z_1T_0 = t_o^{-1}Z_1^{-1}A^qZ_1T_0 = t_o^{-1}A^qT_0 = A^p.$$

Из равенств (18)–(20) следует, что слой $f_{A,i,T_0}^{-1}(w_0)$ изоморфен $Z(A)$. Следовательно, все слои морфизма f_{A,i,T_0} имеют одинаковую размерность, равную $\dim Z(A)$. Поэтому размерность многообразия $W_i(A)$ равна

$$\dim W_i(A) = (\dim L_i(A) + \dim Z(A^f) + \dim GL_n(K)) - \dim Z(A) =$$
$$= \dim L_i(A) + n^2 + \dim Z(A^f) - \dim Z(A).$$

□

Лемма 17. *$W_i(A) \neq W_j(A)$ при $i \neq j$.*

Доказательство. Пусть

$$W_i(A) = \overline{f_{A,i}(L_i(A))},\ W_j(A) = \overline{f_{A,j}(L_j(A))},$$

где $L_i(A) \subset T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$, $L_i(A) \subset T(\beta_1, \ldots, \beta_s, A)$. Допустим, что $W_i(A) = W_j(A)$ при $i \neq j$. Покажем вначале, что тогда $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$. Предположим противное и рассмотрим морфизм

$$\gamma : W_i(A) \to GL_n(K)^s, \quad \gamma(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g, z) = (A_1, \ldots, A_s).$$

Тогда легко видеть, что $\gamma(W_i(A)) \subset V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}$, а $\gamma(W_j(A)) \subset V_{(\beta_1,\ldots,\beta_s)}$.
Но $V_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)} \cap V_{(\beta_1,\ldots,\beta_s)} = \varnothing$ — противоречие.

Таким образом, $L_i(A),\ L_j(A) \subset T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$. Если многообразие $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ состоит из одной неприводимой компоненты, то $i = j$ — противоречие. Если многообразие $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ состоит из двух неприводимых компонент, то $L_i(A),\ L_j(A)$ являются этими компонентами. По теореме 1 все показатели n_i, с которыми B_i входит в слово $W(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k)$, четны. Рассмотрим регулярную функцию

$$\delta : W_i(A) \to K,$$
$$(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g, z) \mapsto detX_1 \ldots \det X_g(\det B_1)^{\frac{n_1}{2}} \ldots (\det B_k)^{\frac{n_k}{2}}. \qquad (21)$$

Как и при доказательстве леммы 6 видим, что функция δ принимает значения b на $W_i(A)$ и $-b$ на $W_j(A)$ для некоторой константы b, что невозможно в случае равенства $W_i(A) = W_j(A)$.

Пусть теперь $(g, n) = (3, 2)$, матрица A скалярна и $\operatorname{Im} f_W$ состоит из одной точки. В этом случае многообразие $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A)$ по теореме 1 состоит из трех неприводимых компонент $L_1(A)$, $L_2(A)$, и $L_3(A)$ равной размерности. Тогда по лемме 16 размерности многообразий $W_1(A), W_2(A), W_3(A)$ равны между собой. Как и выше, регулярная функция δ, определенная в (21), принимает значение b и $-b$ соответственно на многообразиях $W_1(A)$ и $W_2(A)$, поэтому $W_1(A) \bigcap W_2(A) = \emptyset$.

Остается доказать, что $W_3(A)$ не совпадает ни с $W_1(A)$, ни с $W_2(A)$. Допустим, что $W_1(A) = W_3(A)$. Рассмотрим регулярную функцию

$$\delta_1 : W_1(A) \to K, (A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g, z) \mapsto \mathrm{tr}X_1.$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что функция δ_1 тождественно равна нулю на $W_3(A)$, но не обращается тождественно в 0 на $W_1(A)$, что противоречит равенству $W_1(A) = W_3(A)$. □

Доказательство теоремы 3 следует из лемм 13-17.

Теорема 4. *Каждая неприводимая компонента $W_i(A)$ многообразия $R_n(G(p,q))$ является рациональным многообразием.*

Доказательство. Введем необходимые обозначения. $(m \times n)$-матрицу X будем называть правильной верхней треугольной, если она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_1 \end{pmatrix} \text{ если } m \leqslant n, \text{ и } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ если } m \geqslant n.$$

Без ограничения общности можно считать, что A имеет жорданову нормальную форму $A = diag(A_1, \dots, A_s)$, где $A_i = diag(J_{m_{i,1}}(\alpha_i), \dots, J_{m_{i,s_i}}(\alpha_i))$ — $(n_i \times n_i)$-матрица, являющаяся прямой суммой всех клеток Жордана $J_{m_{i,j}}(\alpha_i)$ из A с собственным значением α_i. Тогда централизатор $Z(A)$ состоит из невырожденных матриц вида

$$C = diag(C_1, \dots, C_s), \text{ где } C_i = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1,s_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{s_i,1} & \dots & X_{s_i,s_i} \end{pmatrix} \tag{22}$$

и X_{rt} — произвольная правильная верхняя треугольная $(m_{i,r} \times m_{i,t})$-матрица (см. [20, гл. 3]). Рассмотрим множество $T(A)$ матриц вида $Y = (Y_{ij}) \in GL_n(K)$, где Y_{ij} при $i \neq j$ — произвольная $(n_i \times n_j)$-матрица, а Y_{ii} имеет следующий вид:

$$Y_{ii} = \begin{pmatrix} Z_{11}^{(i)} & \dots & Z_{1,s_i}^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{s_i,1}^{(i)} & \dots & Z_{s_i,s_i}^{(i)} \end{pmatrix} -$$

блочная матрица, блоки которой описываются следующим образом. Матрица $Z_{rr}^{(i)}$ размера $m_{ir} \times m_{ir}$ имеет вид

$$Z_{rr}^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2,m_{ir}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m_{ir},1} & u_{m_{ir},2} & \dots & u_{m_{ir},m_{ir}} \end{pmatrix}.$$

Если же $r \neq k$, то $Z_{rk}^{(i)}$ — матрица размера $m_{ir} \times m_{ik}$ следующего вида: если $m_{ir} \leqslant m_{ik}$, то

$$Z_{rk}^{(i)} = \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1,m_{ik}-m_{ir}} & 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & \dots & \dots & \dots & \dots & w_{2,m_{ik}} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ w_{m_{ir},1} & \dots & \dots & \dots & \dots & w_{m_{ir},m_{ik}} \end{pmatrix},$$

если же $m_{ir} \geqslant m_{ik}$, то

$$Z_{rk}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & \dots & w_{2,m_{ik}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m_{ir},1} & \dots & w_{m_{ir},m_{ik}} \end{pmatrix}$$

Нетрудно видеть, что $\dim T(A) = n^2 - \dim Z(A)$. Обозначим через h_{A,i,T_0} ограничение морфизма f_{A,i,T_0} на $L_i(A) \times Z(A^f) \times T(A)$. Несложное вычисление показывает, что h_{A,i,T_0} — инъективный морфизм. Действительно, если

$$h_{A,i,T_0}(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g, Z_1, T_1) = \\ h_{A,i,T_0}(A'_1, \ldots, A'_s, B'_1, \ldots, B'_k, X'_1, \ldots, X'_g, Z_2, T_2),$$

то

$$T_1(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k, X_1, \ldots, X_g, T_0 Z_1)T_1^{-1} = \\ T_2(A'_1, \ldots, A'_s, B'_1, \ldots, B'_k, X'_1, \ldots, X'_g, T_0 Z_2)T_2^{-1}. \tag{23}$$

Значит,

$$T_1 A_i T_1^{-1} = T_2 A'_i T_2^{-1},\ 1 \leqslant i \leqslant s, \\ T_1 B_j T_1^{-1} = T_2 B'_j T_2^{-1},\ 1 \leqslant j \leqslant k, \\ T_1 X_r T_1^{-1} = T_2 X'_r T_2^{-1},\ 1 \leqslant r \leqslant g,$$

откуда

$$T_1 X_1^2 \ldots X_g^2 W(A_1, \ldots, A_s, B_1, \ldots, B_k) T_1^{-1} = T_2 {X'}_1^2 \ldots {X'}_g^2 W(A'_1, \ldots, A'_s, B'_1, \ldots, B'_k) T_2^{-1}.$$

Следовательно, $T_1 A T_1^{-1} = T_2 A T_2^{-1}$, поэтому $T_2 = T_1 B$ для некоторой матрицы $B \in Z(A)$. Учитывая вид (22) матриц из централизатора $Z(A)$ и вид матриц из $T(A)$, мы получаем, что $B = E$ и, следовательно, $T_1 = T_2$. Тогда равенство (23) влечет $A'_i = A_i$, $B'_j = B_j$, $X'_r = X_r$ для всех индексов i, j, r и $Z_1 = Z_2$, что и доказывает инъективность h_{A,i,T_0}.

Так как $\dim L_i(A) \times Z(A^f) \times T(A) = \dim W_i(A)$, то морфизм h_{A,i,T_0} доминантен. Следовательно, h_{A,i,T_0} — бирациональный изоморфизм (см. [18]), и $W_i(A)$ бирационально изоморфно многообразию $L_i(A) \times Z(A^f) \times T(A)$. По теореме 1 $L_i(A)$ рационально и, очевидно, $Z(A^f)$ и $T(A)$ также рациональны. Следовательно, $W_i(A)$ — рациональное многообразие. Теорема 4 доказана. □

4. Заключение

В статье исследованы многообразия представлений двух классов конечно порожденных групп, которые являются свободными произведениями циклических групп с одним соотношением. Получено описание неприводимых компонент этих многообразий, найдены размерности этих компонент и доказана их рациональность.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lubotzky A., Magid A. Varieties of representations of finitely generated groups // Memoirs AMS. 1985. Vol. 58, № 336. P. 1-116.

2. Rudnick Z. Representation varieties of solvable groups // J. Pure Appl. Algebra. 1987. Vol. 45. P. 261-272.

3. Беняш-Кривец В. В., Платонов В. П. Кольца характеров представлений конечно порожденных групп // Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова. 1990. Т. 183. С. 169–178.

4. Benyash-Krivetz V. V., Rapinchuk A. S., Chernousov V. I. Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces // Israel J. Math. 1996. Vol. 93. P. 29-71.

5. Беняш-Кривец В. В., Черноусов В. И. Многообразия представлений фундаментальных групп компактных неориентируемых поверхностей // Матем. сборник. 1997. Т. 188, № 7. С. 47-92.

6. Беняш-Кривец В. В. Многообразия представлений неевклидовых кристаллографических групп // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44, № 4. С. 37-40.

7. Беняш-Кривец В. В. Многообразия представлений F-групп и их обобщений // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45, № 1. С. 9-12.

8. Беняш-Кривец В. В. Многообразия представлений группы $SL_2(\mathbb{Z})$ // Известия НАН Беларуси. 2001. № 1. С. 8-11.

9. Беняш-Кривец В. В., Говорушко И. О. Многообразия представлений и характеров групп Баумслага-Солитера // Алгебра, геометрия и теория чисел. Сборник статей. К 75-летию со дня рождения академика Владимира Петровича Платонова.Труды МИАН. 2016. Т. 292. С. 26-42.

10. Беняш-Кривец В. В., Говорушко И. О. Многообразия представлений групп Баумслага-Солитера в случае не взаимно простых показателей // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. 2016, № 1. С. 52-56.

11. Дудкин Ф. А. Подгруппы конечного индекса в группах Баумслага–Солитера // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3. С. 331-345.

12. Дудкин Ф. А. Неприводимые представления подгрупп конечного индекса групп Баумслага–Солитера // Сиб. матем. журнал. 2013. Т. 54, № 6.

13. Беняш-Кривец В. В., Говорушко И. О. Многообразия представлений подгрупп конечного индекса групп Баумслага-Солитера // Труды Института математики НАН Беларуси. 2015. Т. 23, № 2. С. 1273-1279.

14. Адмиралова А. Н., Беняш-Кривец В. В. О многообразиях представлений и характеров одного класса групп с одним соотношением // Вестник БГУ, сер. 1. 2016. № 3. С. 166-172.

15. Адмиралова А. Н., Беняш-Кривец В. В. О многообразиях представлений некоторых HNN расширений свободных групп // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2018. № 2. С. 10-16.

16. Fine B., Rosenberger G. Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. New York, Basel: Marcel Dekker, 1999.

17. Спрингер Т. А., Штейнберг Р. Классы сопряженных элементов // Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973. С. 162-262.

18. Мамфорд Д. Алгебраическая геометрия. (I). Комплексные проективные многообразия. М.: Мир, 1979.

19. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

20. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

REFERENCES

1. Lubotzky A.& Magid A. 1985, "Varieties of representations of finitely generated groups", *Memoirs AMS.*, vol. 58, no 336, pp. 1-116.

2. Rudnick Z. 1987, "Representation varieties of solvable groups", *J. Pure Appl. Algebra*, vol. 45, pp. 261-272.

3. Benyash-Krivets V. V.& Platonov V. P. 1991, "Character rings of representations of finitely generated groups", *Proc. of the Steklov Institute of Math.*, no. 4, pp. 203-213.

4. Benyash-Krivetz V. V.& Rapinchuk A. S.& Chernousov V. I. 1996, "Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces" *Israel J. Math.*, vol. 93, pp. 29-71.

5. Benyash-Krivetz V. V.& Chernousov V. I. 1997, "Representation varieties of the fundamental groups of compact non-orientable surfaces", *Sbornik: Mathematics*, vol. 188, no. 7, pp. 997-1039.

6. Benyash-Krivetz V. V. 2000, "Representation varieties of non-Euclidean crystallographic groups", *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, vol. 44, no. 4, pp. 37-40.

7. Benyash-Krivetz V. V. 2001, "Representation varieties of F-groups and their generalizations", *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, vol. 45, no. 1, pp. 9-12.

8. Benyash-Krivetz V. V. 2001, "Representation varieties of the group $SL_2(\mathbb{Z})$", *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, no. 1, pp. 8-11.

9. Benyash-Krivets V. V.& Govorushko I. O. 2016, "Representation and character varieties of the Baumslag–Solitar groups", *Proc. of the Steklov Institute of Math.*, vol. 92, pp. 20-36.

10. Benyash-Krivets V. V.& Govorushko I. O. 2016, "Representation varieties of the Baumslag–Solitar groups in the case of not coprime exponents", *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, no. 1, pp. 52-56.

11. Dudkin F. A. 2010, "Subgroups of finite index in Baumslag–Solitar groups", *Algebra and Logic*, vol. 49, no. 3, pp. 221-232.

12. Dudkin F. A., 2013, "Irreducible representations of subgroups of finite index in Baumslag–Solitar groups", *Siberian Math. J.*, vol. 54, no. 6, pp. 1013-1017.

13. Benyash-Krivets V. V.& Govorushko I. O. 2015. "Representation varieties of finite index subgroups of the Baumslag–Solitar groups", *Trudy Inst. Math.*, vol. 23, no. 2, pp. 24–28.

14. Admiralova A. N.&Benyash-Krivets V. V. 2016. "On representation varieties and characters of one class of groups with one relation", *Vestn. Belarus. Gos. Univ. Ser. 1, Fiz. Mat. Inform.*, no. 3, pp. 166–172.

15. Admiralova A. N.&Benyash-Krivets V. V. 2018, "On representation varieties of some HNN-extensions of free groups", *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, no. 2, pp. 10–16. (Russian)

16. Fine B., Rosenberger G. 1999, "Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products", New York, Basel: Marcel Dekker.

17. Springer T. A. 1970, "Conjugacy classes", *Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, vol. 131.

18. Mumford D. 1976, “Algebraic Geometry, Vol. 1: Complex Projective Varietie“, Springer, Berlin.

19. Hall M.“Combinatorial Theory“, John Wiley & Sons Inc, 1975.

20. Gantmacher F. R. “The Theory of Matrices“, Nauka, Moscow, 1967; AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 1998.

Получено 5.01.2020 г.
Принято в печать 20.03.2020 г.