

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 14 Выпуск 2 (2013)

УДК 511.361

О ЗНАЧЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОДНОРОДНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

П. Л. Иванков (г. Москва)

Аннотация

В работе рассматриваются гипергеометрические функции и их производные (в том числе и по параметру). С помощью новой конструкции однородных совместных приближений получена оценка снизу модуля линейной формы от значений таких функций.

Ключевые слова: Аппроксимации Паде второго рода, обобщенные гипергеометрические функции, дифференцирование по параметру, оценки снизу линейных форм.

ON THE VALUES OF SOME FUNCTIONS SATISFYING HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS

P. L. Ivankov (Moscow)

Abstract

In this paper we consider hypergeometric functions and their derivatives (including with respect to parameter). By means of a new construction of homogeneous simultaneous approximations low estimate of the modulus of linear form in the values of such functions is obtained.

Keywords: Padé approximations of the second type, generalized hypergeometric functions, differentiation with respect to parameter, low estimates of linear forms.

Пусть

$$a(x) = (x + \alpha_1) \dots (x + \alpha_r), \quad b(x) = (x + \beta_1) \dots (x + \beta_m), \quad m \geq 1, \quad b(0) = 0;$$

$$a(x)b(x) \neq 0 \text{ при } x = 1, 2, \dots;$$

$$\lambda_k, \lambda_{k_1} - \lambda_{k_2}, \alpha_i - \beta_j, \alpha_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}, \\ k_1 \neq k_2, \quad k, k_1, k_2 = 1, \dots, t, \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, r. \quad (1)$$

Предположим также, что $0 < r < u$, $u = m + 1$, и все числа

$$\lambda_1, \dots, \lambda_t, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}$$

рациональны, а многочлен $(x + \beta_r) \dots (x + \beta_m)$ лежит в кольце $\mathbb{I}[x]$, где $\mathbb{I}$ — некоторое мнимое квадратичное поле или поле рациональных чисел.

Рассмотрим при $k = 1, \dots, t$, $j = 1, \dots, u$ следующие функции

$$F_{k0j}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)(\lambda_k + x)},$$

а также функции, полученные из них дифференцированием по параметру λ_k :

$$F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_k + x}, \quad (2)$$

$k = 1, \dots, t$, $l_k = 0, \dots, \tau_k - 1$, $j = 1, \dots, u$; $\tau_1, \dots, \tau_t$ — некоторые натуральные числа. При выполнении всех перечисленных условий справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть степени алгебраических чисел $\beta_r, \dots, \beta_m$ равны соответственно $\varkappa_r, \dots, \varkappa_m$, и пусть

$$\eta = 1 - \frac{1}{u - r} \left(\frac{1}{\varkappa_r} + \dots + \frac{1}{\varkappa_m} \right),$$

а число ξ отлично от нуля и лежит в поле $\mathbb{I}$. Тогда для любого ϵ и для любого нетривиального набора целых чисел из этого поля

$$h_{kl_kj}, \quad k = 1, \dots, t, \quad l_k = 0, \dots, \tau_k - 1, \quad j = 1, \dots, u, \quad (3)$$

выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^t \sum_{l_k=0}^{\tau_k-1} \sum_{j=1}^u h_{kl_kj} F_{kl_kj}(\xi) \right| > H^{-\frac{w-1+\eta}{1-\eta}-\epsilon},$$

где H есть максимум модулей коэффициентов (3), причем H достаточно велико (нижняя граница зависит от ϵ);

$$w = uT, \quad T = \tau_1 + \dots + \tau_t.$$

Заметим, что если применить в рассматриваемой ситуации теорему из работы [1], положив в ней $h_0 = 0$, то мы получим аналогичную, но менее точную оценку: в показателе степени $\frac{w-1+\eta}{1-\eta}$ заменится на $\frac{w+\eta}{1-\eta}$. Таким образом, учет однородности (т.е. условия $b(0) = 0$) приводит к уточнению соответствующей

оценки. Это явление хорошо известно в теории трансцендентных чисел; см., например, теоремы 1 и 2 из [2, гл. 11, § 2].

Пусть n — натуральное число; рассмотрим многочлен с неопределенными коэффициентами

$$P(z) = \sum_{\mu=0}^{N_1} p_{\mu} z^{\mu}, \quad (4)$$

где $N_1 = \left[\frac{wn}{w-1} \right]$. Пусть

$$P(z)F_{klkj}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} p_{klkj\mu} z^{\mu}; \quad (5)$$

$$P_{klkj}(z) = \sum_{\mu=0}^{N_1} p_{klkj\mu} z^{\mu}. \quad (6)$$

При любых исходных коэффициентах p_{μ} многочлена (4) функция

$$P_{klkj}(z)F_{k'l'_{kj'}}(z) - P_{k'l'_{kj'}}(z)F_{klkj}(z) \quad (7)$$

при всех допустимых значениях индексов будет иметь порядок нуля при $z = 0$ не меньше $N_1 + 1$. Пользуясь этим, можно построить совместные приближения (учитывающие специфику однородного случая) для функций (2). Подберем коэффициенты многочлена (4) так, чтобы в равенстве (6) было

$$p_{klkj\nu} = 0, \quad \nu = n + 1, \dots, N_1. \quad (8)$$

Если условие (8) будет выполнено, то для совместных приближений можно взять многочлены

$$P_{klkj}^*(z) = \frac{1}{((N_1 - n)!)^u} \sum_{\mu=0}^n p_{klkj\mu} z^{\mu}. \quad (9)$$

Из вышесказанного следует, что функции

$$P_{klkj}^*(z)F_{k'l'_{kj'}}(z) - P_{k'l'_{kj'}}^*(z)F_{klkj}(z) \quad (10)$$

имеют при $z = 0$ порядок нуля не ниже $N_1 + 1$. Свойства многочленов (9) рассмотрим ниже, а нашей ближайшей задачей будет подбор коэффициентов многочлена (4).

Определим вспомогательную функцию

$$Q(z) = \prod_{k=1}^t \prod_{\sigma=0}^{N_2-1} (z - \lambda_k + \sigma)^{\tau_k}, \quad (11)$$

где $N_2 = \left[\frac{wn}{w-1} \right]$. Т.к. $N_2 T \leq N_1$, то существуют числа ϑ_{μ} , такие, что тождественно по z выполняется равенство

$$\sum_{\mu=0}^{N_1} \vartheta_{\mu} \prod_{x=N_1-\mu+1}^{N_1} (z + x) = Q(z), \quad (12)$$

и, как следствие,

$$\sum_{\mu=0}^{N_1} \vartheta_{\mu} \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{z+x} = Q(z) \prod_{x=1}^{N_1} \frac{1}{z+x}. \quad (13)$$

Из теории рядов Ньютона известно (см., например, [3, с. 40-41]), что последние равенства будут выполняться, если положить

$$\vartheta_{\mu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Q(z) dz}{\prod_{x=N_1-\mu}^{N_1} (z+x)}, \quad (14)$$

где Γ — какая-либо положительно ориентированная окружность, охватывающая все полюсы подынтегральной функции.

ЛЕММА 1. Пусть $B(\mu)$ — произвольный многочлен, степень которого не превосходит $N_2 - 1$. Тогда при $1 \leq k \leq t$, $0 \leq l_k \leq \tau_k - 1$ выполняется равенство

$$\sum_{\mu=0}^{N_1} \vartheta_{\mu} B(\mu) \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{\lambda_k + x} = 0. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированном k применим индукцию по l_k . Пусть $l_k = 0$; при $0 \leq \sigma \leq N_2 - 1$ из (11) и (13) следует равенство

$$0 = \frac{Q(\lambda_k - \sigma)}{\prod_{x=1}^{N_1} (\lambda_k - \sigma + x)} = \sum_{\mu=0}^{N_1} \vartheta_{\mu} \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{\lambda_k - \sigma + x} = \sum_{\mu=0}^{N_1} \vartheta_{\mu} B_{k0\sigma}(\mu) \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{\lambda_k + x}, \quad (16)$$

где

$$B_{k0\sigma}(\mu) = \prod_{x=0}^{\sigma-1} \frac{\lambda_k + N_1 - \mu - x}{\lambda_k - x}.$$

Поскольку любой многочлен от μ степени не выше $N_2 - 1$ является линейной комбинацией многочленов $B_{k0\sigma}(\mu)$, то из (16) следует (15) при $l_k = 0$. Пусть требуется доказать равенство (15) при некотором положительном $l_k \leq \tau_k - 1$. Имеем при $0 \leq \sigma \leq N_2 - 1$, используя (11) и (13),

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^{l_k}}{dz^{l_k}} \frac{Q(z)}{\prod_{x=1}^{N_1} (z+x)} \Big|_{z=\lambda_k-\sigma} = \sum_{\mu=0}^{N_1} \vartheta_{\mu} \frac{d^{l_k}}{dz^{l_k}} \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{z+x} \Big|_{z=\lambda_k-\sigma} = \\ &= \sum_{\mu=0}^{N_1} \vartheta_{\mu} \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{\lambda_k - \sigma + x} = \sum_{\mu=0}^{N_1} \vartheta_{\mu} \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \left(B_{k0\sigma}(\mu) \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{\lambda_k + x} \right) = \\ &= \sum_{s_k=0}^{l_k} \binom{l_k}{s_k} \sum_{\mu=0}^{N_1} \vartheta_{\mu} B_{k,l_k-s_k,\sigma}(\mu) \frac{d^{s_k}}{d\lambda_k^{s_k}} \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{\lambda_k + x}, \end{aligned}$$

где

$$B_{k,l_k-s_k,\sigma}(\mu) = \frac{\partial^{l_k-s_k}}{\partial \lambda_k^{l_k-s_k}} B_{k0\sigma}(\mu).$$

По предположению индукции получаем отсюда равенство

$$\sum_{\mu=0}^{N_1} \vartheta_\mu B_{k0\sigma}(\mu) \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{\lambda_k + x} = 0,$$

и рассуждение можно завершить, как указано выше. Лемма 1 доказана.

Числа ϑ_μ , определяемые равенством (14), используем для построения многочлена (4), положив

$$p_\mu = \vartheta_\mu \prod_{x=1}^{N_1-\mu} b(x) \frac{\prod_{x=0}^{\mu-1} a(-x)}{\prod_{x=1}^{n+1} a(x-\mu)}. \quad (17)$$

Проверим выполнение равенств (8). Имеем при $n+1 \leq \nu \leq N_1$

$$\begin{aligned} p_{klkj\nu} &= \sum_{\mu=0}^{\nu} p_\mu (\nu-\mu)^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu-\mu} \frac{a(x)}{b(x)} \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu-\mu} \frac{1}{\lambda_k + x} = \sum_{\mu=0}^{N_1} \vartheta_\mu (\nu-\mu)^{j-1} \prod_{x=\nu+1}^{N_1} b(x-\mu) \times \\ &\times \prod_{x=n+2}^{\nu} a(x-\mu) \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \left(\prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{\lambda_k + x} \prod_{x=\nu+1}^{N_1} (x + \lambda_k - \mu) \right) = \sum_{s_k=0}^{l_k} \binom{l_k}{s_k} \times \\ &\times \sum_{\mu=0}^{N_1} \vartheta_\mu (\nu-\mu)^{j-1} \prod_{x=\nu+1}^{N_1} b(x-\mu) \frac{\partial^{l_k-s_k}}{\partial \lambda_k^{l_k-s_k}} \prod_{x=\nu+1}^{N_1} (x + \lambda_k - \mu) \times \\ &\times \prod_{x=n+2}^{\nu} a(x-\mu) \frac{d^{s_k}}{d\lambda_k^{s_k}} \prod_{x=1}^{N_1-\mu} \frac{1}{\lambda_k + x}. \quad (18) \end{aligned}$$

По ходу преобразований мы заменили верхний индекс суммирования ν на N_1 , т.к. в силу условия $b(0) = 0$ все добавляемые при этом слагаемые равны нулю. Кроме того из условия (1) следует, что $a(x) \neq 0$ при $x = 0, -1, -2, \dots$. Входящий в выражение (18) многочлен от μ

$$(\nu-\mu)^{j-1} \prod_{x=\nu+1}^{N_1} b(x-\mu) \frac{\partial^{l_k-s_k}}{\partial \lambda_k^{l_k-s_k}} \prod_{x=\nu+1}^{N_1} (x + \lambda_k - \mu) \prod_{x=n+2}^{\nu} a(x-\mu)$$

имеет степень, ограниченную сверху числом $N_2 - 1$, так что равенства (8) в силу леммы 1 выполняются, а тогда, как мы видели, функция (10) имеет при $z = 0$ порядок нуля не меньше $N_1 + 1$.

Заметим, что многочлены (9) отличны от тождественного нуля. Например, из (14), (17) и (18) следует, что

$$p_{1010} = p_0 = \vartheta_0 \prod_{x=1}^{N_1} b(x) \prod_{x=1}^{n+1} \frac{1}{a(x)} \neq 0,$$

и многочлен $P_{101}(z)$ не равен нулю тождественно. Можно проверить отличие от тождественного нуля и других многочленов $P_{klkj}(z)$.

Наименьшим общим знаменателем некоторого множества чисел X из поля $\mathbb{I}$ будем называть наименьшее по модулю ненулевое целое число из этого поля, после умножения на которое любое число из X становится целым в упомянутом поле. Оценим абсолютную величину и общий наименьший знаменатель коэффициентов многочленов (9), которые определяются с помощью чисел (17).

ЛЕММА 2. *Модуль коэффициента при z^ν многочлена $P_{klkj}(z)$ оценивается сверху величиной*

$$e^{\gamma_1 n} \left(\frac{n!}{\nu!} \right)^{u-r}; \quad (19)$$

общий наименьший знаменатель всех таких коэффициентов при $n \geq n_0$ не превосходит

$$(n!)^{\frac{(u-r)\eta}{w-1} + \epsilon}, \quad (20)$$

где число η определено в формулировке теоремы, ϵ — произвольное положительное число; n_0 зависит от ϵ ; модуль значений функций (10) при $z = \xi$ оценивается сверху величиной

$$e^{\gamma_2 n} (n!)^{-\frac{u-r}{w-1}}; \quad (21)$$

Через γ_1 и γ_2 обозначены положительные постоянные, зависящие от параметров функций (2) и числа ξ (но не зависящие от n).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4), (5), (9) и (17) получаем при $0 \leq \nu \leq n$

$$\begin{aligned} \frac{p_{klkj\nu}}{((N_1 - n)!)^u} &= \frac{1}{((N_1 - n)!)^u} \sum_{\mu=0}^{\nu} \vartheta_\mu \prod_{x=1}^{N_1-\mu} b(x) \frac{\prod_{x=0}^{\mu-1} a(-x)}{\prod_{x=1}^{n+1} a(x-\mu)} (\nu - \mu)^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu-\mu} \frac{a(x)}{b(x)} \times \\ &\times \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu-\mu} \frac{1}{\lambda_k + x} = \frac{1}{((N_1 - n)!)^u} \sum_{\mu=0}^{\nu} \vartheta_\mu \times \\ &\times (\nu - \mu)^{j-1} \prod_{x=\nu+1}^{N_1} b(x-\mu) \prod_{x=\nu+1}^{n+1} \frac{1}{a(x-\mu)} \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu-\mu} \frac{1}{\lambda_k + x}. \quad (22) \end{aligned}$$

После выполнения несложной процедуры технического характера получаем отсюда (19). Используя оценку (19) нетрудно получить (21), опираясь на (7). Для оценки общего наименьшего знаменателя коэффициентов $p_{kl_k j \mu}$ заметим прежде всего, что производная по λ порядка l дроби

$$\frac{1}{(\lambda + 1) \dots (\lambda + N)}$$

может быть записана в виде

$$\frac{1}{(\lambda + 1) \dots (\lambda + N)} \sum \frac{\pm 1}{(\lambda + x_1) \dots (\lambda + x_l)}, \quad (23)$$

где сумма содержит конечное число слагаемых, а числа $x_1, \dots, x_l$ выбираются из множества $\{1, 2, \dots, N\}$. Хорошо известно, что общее наименьшее кратное чисел $1, 2, \dots, N$ есть величина порядка $e^{O(N)}$; отсюда следует, что общий наименьший знаменатель суммы, входящей в (23), не превосходит $e^{O(N)}$. Далее отметим лемму 2 из [2, с. 186]. Эта лемма позволяет получать оценку общего наименьшего знаменателя дробей вида

$$\frac{(\alpha + 1) \dots (\alpha + s)}{(\beta + 1) \dots (\beta + s)}, \quad s = 0, 1, \dots, N, \quad (24)$$

при рациональных α и β ; здесь имеет место оценка вида $e^{O(N)}$. После этих предварительных замечаний перепишем выражение (22) для коэффициента при z^ν многочлена $P_{kl_k j}(z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{p_{kl_k j \nu}}{((N_1 - n)!)^u} &= \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\vartheta_\mu}{(N_1 - \mu)!} \cdot \frac{(N_1 - \mu)!}{\prod_{x=1}^{N_1 - \mu} (\lambda_k + x)} \times \\ &\times \prod_{x=\nu+1}^n \frac{b(x - \mu)(\lambda_k + x - \mu)}{a(x - \mu)} \frac{\prod_{x=n+1}^{N_1} \left((\lambda_k + x - \mu) \prod_{j=1}^m (x + \beta_j - \mu) \right)}{((N_1 - n)!)^u} \times \\ &\times \frac{(\nu - \mu)^{j-1}}{a(n + 1 - \mu)} \sum \frac{\pm 1}{(\lambda_k + x_1) \dots (\lambda_k + x_{l_k})}. \quad (25) \end{aligned}$$

Основной вклад в величину оценки общего наименьшего знаменателя рассматриваемых коэффициентов дает полученная с помощью леммы 6 работы [4, с. 1227] оценка типа (20) для общего наименьшего знаменателя чисел

$$\frac{\prod_{x=n+1}^{N_1} \prod_{j=r}^m (x + \beta_j - \mu)}{((N_1 - n)!)^{u-r}}. \quad (26)$$

Непосредственно применить данную лемму в рассматриваемой ситуации нельзя, но с помощью внесения очевидных изменений в ее доказательство можно убедиться, что даваемая этой леммой оценка общего наименьшего знаменателя справедлива и в случае дробей вида (26). Окончательный результат получается применением к выражению (25) леммы 2 из [2, с. 186] и сделанного выше замечания относительно общего наименьшего знаменателя суммы из (23). При этом могут потребоваться различные модификации упомянутой леммы (например, добавление в каждой скобке числителя дроби (24) одного и того же целого рационального числа). Оценивая общий наименьший знаменатель первого множителя из правой части (25), интеграл (14) надо записать в виде суммы соответствующих вычетов. Лемма 2 доказана.

Дальнейшие шаги стандартны. Имея совокупность совместных приближений (9), для которых функции (10) имеют порядок нуля, лишь на константу отличающийся от максимально возможного, можно построить целую совокупность таких форм, причем составленный из соответствующих многочленов определитель будет при этом отличен тождественно от нуля. При указанном построении используется система линейных однородных дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции (2). Линейная независимость этих функций над полем рациональных дробей (при выполнении условий теоремы) доказана в [5]. Более подробное изложение перечисленных соображений содержится в работе [6]; см. также [7]. После построения системы приближающих форм с отличным от нуля определителем осуществляется переход к числовым линейным формам; соответствующая процедура применялась во многих работах (см., например, [6]). Получающийся при этом результат оформим в виде леммы.

ЛЕММА 3. *Для любого $\epsilon > 0$ и для всех достаточно больших n найдется совокупность чисел*

$$q_{klkj}^{(s)}, \quad k = 1, \dots, t, \quad l_k = 0, 1, \dots, \tau_k - 1, \quad j = 1, \dots, u, \quad s = 1, 2, \dots, w,$$

лежащих в поле $\mathbb{I}$ и обладающих следующими свойствами:

1) $\det \left(q_{klkj}^{(s)} \right) \neq 0$ (в этом определителе индекс s означает номер строки, а столбец определяется набором индексов k, l_k, j);

$$2) \left| q_{klkj}^{(s)} \right| \leq (n!)^{u-r+\epsilon};$$

$$3) \left| q_{klkj}^{(s)} F_{k'l'_k j'}^{(s)}(\xi) - q_{k'l'_k j'}^{(s)} F_{klkj}^{(s)}(\xi) \right| \leq (n!)^{-\frac{u-r}{w-1}+\epsilon};$$

4) модуль наименьшего общего знаменателя чисел $q_{klkj}^{(s)}$ оценивается сверху величиной $(n!)^{\frac{(u-r)\eta}{w-1}+\epsilon}$.

Из леммы 3 нетрудно вывести утверждение теоремы; краткое описание этого вывода имеется, например, в работе [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванков П. Л. Об использовании совместных приближений для изучения арифметической природы значений гипергеометрических функций // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2012. № 12. С. 135—142. URL: technomag.edu.ru/doc/500464.html (дата обращения: 20.05.2013)
2. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
3. Фельдман Н. И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
4. Галочкин А. И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1976. Т. XVII, № 6. С. 1220—1235.
5. Иванков П. Л. О линейной независимости некоторых функций // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 1. С. 145—151.
6. Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V. Applications of Pade approximation to Diophantine inequalities in values of G-function // Lect. Notes in Math. 1985. Vol. 1135. P. 9—51.
7. Иванков П. Л. О совместных приближениях, учитывающих специфику однородного случая // Математические заметки. 2002. Т. 71, вып. 3. С. 390—397.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
Поступило 21.05.2013