ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 2.

УДК 514.85; 531.011 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-383-402

О гипотезе Мищенко — Фоменко для обобщённого осциллятора и системы Кеплера

А. В. Цыганов

Цыганов Андрей Владимирович — доктор физико-математических наук, научный сотрудник, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: andrey.tsiganov@gmail.com

Аннотация

Рассматриваются деформации задачи Кеплера и гармонического осциллятора, для которых дополнительные интегралы движения являются координатами приведённого дивизора, согласно теореме Римана — Роха. Для этого семейства некоммутативно интегрируемых систем обсуждается справедливость гипотезы Мищенко — Фоменко о существовании интегралов движения из единого функционального класса, в данном случае полиномиальных интегралов движения.

Ключевые слова: суперинтегрируемые системы, некоммутативно интегрируемые системы, гипотеза Мищенко — Фоменко.

Библиография: 34 названий.

Для цитирования:
А. В. Цыганов. О гипотезе Мищенко — Фоменко для обобщённого осциллятора и системы Кеплера // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 383–402.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 2.

UDC 514.85; 531.011 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-383-402

On the Mishchenko–Fomenko hypothesis for a generalized oscillator and Kepler system

A. V. Tsiganov

Tsiganov Andrey Vladimirovich — Doctor of Physics and Mathematics, Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: andrey.tsiganov@gmail.com

Abstract

Deformations of the Kepler problem and the harmonic oscillator are considered for which additional integrals of motion are the coordinates of the reduced divisor, according to the Riemann–Roch theorem. For this family of non-commutative integrable systems the validity of the Mishchenko–Fomenko hypothesis about the existence of integrals of motion from a single functional class, in this case polynomial integrals of motion, is discussed.

Keywords: superintegrable systems, noncommutative integrable systems, Mishchenko–Fomenko conjecture.

Bibliography: 34 titles.

For citation:

A. V. Tsiganov, 2020, "On the Mishchenko–Fomenko hypothesis for a generalized oscillator and Kepler system" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 383–402.

Посвящается Анатолию Тимофеевичу Фоменко по случаю 75-летия

1. Введение

Согласно гипотезе Мищенко-Фоменко некоммутативная интегрируемость влечёт за собой интегрируемость по Лиувиллю, а соответствующие коммутирующие друг с другом интегралы движения принадлежат тому же функциональному классу, что и некоммутативные интегралы движения [2, 3, 4, 7, 10, 11, 12, 17, 18, 20].

В методе Якоби, переменные разделения в уравнениях Гамильтона-Якоби отождествляются с точками на алгебраических кривых и, тем самым, движение в фазовом пространстве заменяется на движение точек на алгебраических кривых [22, 24]. В этом случае интегралы движения естественным образом делятся на два семейства. Одна часть интегралов движения входит в разделённые уравнения, определяющие алгебраические кривые на проективной плоскости. Вторая часть интегралов движения является координатами фиксированных точек на этих кривых, вокруг которых и происходит движение.

Для построения интегралов движения на фазовом пространстве можно использовать теорему Нётер, которая формулирует достаточное условие существования законов сохранения. Для построения интегралов движения, возникающих при изучении движения точек на алгебраических кривых, можно использовать теоремы Абеля и Римана-Роха, которые формулируют достаточные условия для существования таких фиксированных точек и отвечающих им законов сохранения [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33].

Одним из простейших примеров некоммутативных интегрируемых систем является гармонический осциллятор с двумя степенями свободы. В этом случае гамильтоновы уравнения движения

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}\,,$$

где

$$H(q,p) = \frac{p_1^2+q_1^2+p_2^2+q_2^2}{2}\,,$$

обладают полиномиальными интегралами движения

$$F_1(q,p) = q_1q_2 + p_1p_2\,, \quad F_2(q,p) = p_1q_2 - p_2q_1\,, \quad F_3(q,p) = \frac{p_1^2+q_1^2-p_2^2-q_2^2}{2}\,,$$

скобка Пуассона между которыми может быть задана с помощью бивектора Пуассона

$$\Pi = 2\begin{pmatrix} 0 & F_3 & -F_2 \\ -F_3 & 0 & F_1 \\ F_2 & -F_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Таким образом линейное пространство интегралов движения F_k образует алгебру Ли относительно стандартной скобки Пуассона $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ и $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$.

Вторым примером, обобщение которого мы будем рассматривать ниже, является система Кеплера. В этом случае гамильтониан равен

$$H(q,p) = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2} + \frac{1}{||q||}, \qquad ||q|| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2},$$

Согласно теореме Нётер сохранение вектора углового момента и вектора Лапласа-Рунге-Ленца

$$J = p \times q, \qquad A = p \times (q \times p) - \frac{q}{||q||}$$

следует из инвариантности действия относительно вращений и инфинитезимальных вариаций обобщённых координат. Для движения на плоскости $q_3 = 0$ в качестве независимых интегралов движения можно выбрать ортогональную плоскости движения компоненту вектора углового момента $J_3 = p_1 q_2 - p_2 q_1$ и две компоненты $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ перенормированного вектора Лапласа

$$\tilde{A} = \frac{A}{\sqrt{-H}},$$

лежащие в плоскости движения. Полагая $F_1 = \tilde{A}_1$, $F_2 = \tilde{A}_2$ и $F_3 = J$, мы можем задать скобку Пуассона между данными интегралами движения с помощью все того же бивектора Пуассона

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & F_3 & -F_2 \\ -F_3 & 0 & F_1 \\ F_2 & -F_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Таким образом линейное пространство интегралов движения F_i по прежнему образует алгебру Ли относительно стандартной скобки Пуассона. Основное отличие системы Кеплера от гармонического осциллятора в том, что в этом случае интегралы движения $F_{1,2}$ являются алгебраическими функциями на фазовом пространстве, которые однозначно определены только при отрицательных значениях энергии.

В данном обзоре мы обсудим обобщения этих двух гамильтоновых систем, которые были получены в работах [31, 32, 34] с помощью изогений эллиптических кривых. Напомним, что наиболее известными изогениями эллиптических кривых являются преобразования Ландена, Гаусса и Лежандра, которые широко используются при различных численных вычислениях.

2. Суперинтегрируемые системы в методе Якоби

В методе Якоби интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

сводится к нахождению полного интеграла дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$H\left(u, \frac{\partial S}{\partial u}\right) = E \tag{1}$$

относительно функции S вида

$$S(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} S_i(u_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

где i-тое слагаемое S_i зависит только от i-той переменной u_i и от n параметров $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Здесь $u=(u_1,\dots,u_n)$ - переменные разделения, которые связаны каноническим преобразованием с исходными физическими переменными $u_j=u_j(q,p)$ и, поэтому, они также удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\frac{du_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_{u_i}},\qquad \frac{dp_{u_i}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial u_i},\qquad i=1,\dots,n, \tag{2}$$

где p_{u_i} канонически сопряжённые импульсы

$$\{u_i,p_{u_j}\}=\delta_{ij}\,,\qquad \{u_i,u_j\}=\{p_{u_i},p_{u_j}\}=0\,.$$

Решение $S(q,\alpha)$ стационарного уравнения Гамильтона-Якоби (1) зависящее от n произвольных постоянных $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и удовлетворяющее условию

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_i\partial\alpha_j}\right)\neq 0\,.$$

называется полным интегралом, нахождение которого позволяет найти решение исходных уравнений движения согласно теореме Якоби, см. детали в [23].

Теорема 1. *Для любого полного интеграла уравнения (1) решения $u_j=u_j(t,\alpha,\beta)$ и $p_{u_j}=p_{u_j}(t,\alpha,\beta)$ уравнений Гамильтона (2), зависящие от $2n$ произвольных постоянных α_i и β_i, находятся из уравнений*

$$\beta_j=-\frac{\partial S}{\partial\alpha_j}\qquad и \qquad p_{u_j}=\frac{\partial S}{\partial u_j}\,,\qquad j=1,\dots,n. \tag{3}$$

Первые уравнения в системе (3) дают решение задачи Лагранжа, т.е. определяют форму траекторий в конфигурационном пространстве. Вторые уравнения называют разделёнными уравнениями

$$p_{u_j}=\frac{\partial S}{\partial u_j}\equiv\frac{\partial S_j(u_j,\alpha)}{\partial u_j}\,,$$

так как в них входит только одна пара переменных u_j и p_{u_j}, и обычно их переписывают в более общем виде

$$\Phi_j(u_j,p_{u_j},\alpha_1,\dots,\alpha_n)=0\,,\qquad j=1,\dots,n.$$

Каждое из разделённых уравнений определяет кривую X_j плоскости и, тем самым, лагранжево подмногообразие, отвечающее полному интегралу S, представимо в виде произведения алгебраических кривых $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$. В этом и заключается основная идея Якоби - вместо движения в фазовом пространстве изучается движение точек P_j с абсциссами $x_j=u_j(t)$ и ординатами $y_j=p_{u_j}(t)$ вдоль алгебраических кривых X_j с помощью различных методов алгебраической геометрии.

Если ограничится рассмотрением систем типа Штеккеля [22], когда все кривые X_j являются гиперэллиптическими кривыми, можно ввести переменные действие $\alpha_j=I_j(u,p_u)$, разрешая разделённые уравнения относительно α_j, и переменные угол

$$\Omega_j=-\sum_{i=1}^{n}\int^{P_i}\frac{\partial\Phi_i(x,y)/\partial I_j}{\partial\Phi_i(x,y)/\partial y}\,dx$$

удовлетворяющие стандартным уравнениям движения

$$\dot I_j=0\qquad \text{и}\qquad \dot\Omega_j=\partial H/\partial I_j\,. \tag{4}$$

Так как переменные угол являются суммой абелевых интегралов, то решение этих уравнений сводится к обращению Якоби отображения Абеля. Аналогичные переменные угол для систем типа Хитчина обсуждаются в работе [9].

2.1. Движение дивизоров на гиперэллиптической кривой

В частном случае, когда лагранжево подмногообразие, отвечающее интегралам движения $I_j = \alpha_j$, представимо в виде симметризованного произведения одной алгебраической кривой X, движение точек $P_j(t)$ порождает движение их формальной суммы, т.е. дивизора

$$D(t) = P_1(t) + P_2(t) + \cdots + P_n(t)\,. \tag{5}$$

Напомним, что дивизором называют формальную конечную сумму точек на на алгебраической кривой X

$$D = \sum_{i=1} m_i P_i\,.$$

Дивизор называют эффективным или положительным, если $m_i \geq 0$ для всех i. Если для всех $i \neq j$ справедливо $P_i \neq -P_j$, то положительный дивизор называют полу-приведённым (semi-reduced). Если степень положительного дивизора $\sum m_i \leq g$ меньше или равна роду кривой X, то дивизор называют приведённым (reduced). Согласно теореме Римана-Роха любой полу-приведённый дивизор D на гиперэллиптической кривой X рода g

$$X: \quad y^2 + h(x)y + f(x) = 0\,, \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{2g+2} a_i x^i$$

представим в виде суммы

$$D = D' + D_\infty\,, \tag{6}$$

приведённого дивизора D' степени g и некоторой линейной комбинации D_∞ точек на бесконечности, которая зависит от рода кривой, от числа точек на бесконечности и степени дивизора.

Современные алгоритмы приведения полу-приведённых дивизоров описаны в [8]. Например, в алгоритме Кантора,

---

Input $D = (U, V)$ **Output** $D' = (U', V')$

---

while $\deg(U) > g$ do

$U' \leftarrow \frac{f - hV - V^2}{U}, \quad V' \leftarrow -h - V \bmod U'$

$U \leftarrow \mathrm{MakeMonic}(U'), \qquad V \leftarrow V' \bmod U$

return $(U' = U, V' = V)$

используются координаты Мамфорда дивизора $D = (U(x), V(x))$, где $U(x) = \prod_i (x - x_i)^{m_i}$, а полином $V(x)$ степени $deg\,V(x) < deg\,U(x)$ такой, что $V(x_i) = y_i$ [16].

При рассмотрении движения дивизоров, уравнение (6) примет вид

$$D(t) = D'(t) + D_\infty,$$

где D_∞ - некоторая константа, которая не зависит от времени. Так как эволюция и полу приведённого дивизора $D(t)$ (5) степени $n > g$ и приведённого дивизора D' степени g задаётся одними и теми же уравнениями (4), то мы можем выделить семейство систем для которых приведённый дивизор является неподвижным

$$D(t) = D' + D_\infty\,, \qquad D' = const.$$

Координаты неподвижных точек дивизора $D' = P_{n+1} + \cdots + P_{n+g}$ и будут искомыми дополнительными интегралами движения, которые коммутируют с гамильтонианом и не коммутируют с остальными интегралами движения.

Аналогичным образом, вместо дивизора (5) можно рассмотреть полу-приведённый дивизор с кратными точками

$$D(t) = m_1 P_1(t) + m_2 P_2(t) + \cdots + m_n P_n(t)\,, \qquad m_i \in \mathbb{Z}_+\,,$$

который приводится к неподвижному приведённому дивизору $D' = const$, если в уравнениях движения (2) провести не каноническое преобразование фазового пространства

$$p_{u_j} \to \frac{p_{u_j}}{m_j}$$

отвечающее преобразованию

$$\Omega_j \to \Omega_j = -m_j \sum_{i=1}^{n} \int^{P_i} \frac{\partial \Phi_i(x,y)/\partial I_j}{\partial \Phi_i(x,y)/\partial y}\, dx$$

переменных угол, задающих эволюцию (4) приведённого дивизора D', см. детали в работах [31, 32, 34].

Теорема 2. *Если уравнения движения интегрируемой системы приводятся к квадратурам, которые описывают движение полу-приведённого дивизора на гиперэллиптической кривой приводимого к постоянному дивизору, то данная система является некоммутативно интегрируемой системой.*

Для описанного выше множества некоммутативно интегрируемых систем гипотеза Мищенко-Фоменко справедлива в классе алгебраических функций.

Доказательство. Согласно теореме Лиувилля для любой интегрируемой системы уравнения движения приводятся к квадратурам. Если эти квадратуры описывают динамику полу-приведённого дивизора D, то согласно теореме Римана-Роха, существует единственный приведённый дивизор D' отвечающий D. Если приведённый дивизор D' неподвижен, то его координаты являются интегралами движения, которые функционально независимы от интегралов движения, входящих в определение гиперэллиптической кривой, согласно теореме Абеля. Эта же теорема гарантирует, что координаты приведённого дивизора, то есть интегралы движения, будут алгебраическими функциями от координат полу-приведённого дивизора, то есть переменных на фазовом пространстве.

Для полного описания этого множества некоммутативно интегрируемых систем можно использовать теорию Бриль-Нетера о классификации дивизоров на алгебраических кривых и выделении подмножеств специальных дивизоров, например дивизоров Вейерштрасса или дивизоров голономных дифференциалов. В данной работе мы ограничимся рассмотрением ряда примеров интегрируемых систем отвечающих полу-приведённым дивизорам и обсудим системы отвечающие дивизорам с простыми и кратными точками на гиперэллиптической кривой. В этом случае имеется возможность возможность уточнить функциональный класс интегралов движения, входящий в гипотезу Мищенко-Фоменко, до полиномиальных и рациональных функций.

Пример 4. *Эллиптические координаты u_j в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и* *отвечающие им импульсы p_{u_j} определяются с помощью полиномов Якоби U и V*

$$
\begin{aligned}
1+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i^2}{x-e_i} &= \frac{U(x)}{\prod_{i=1}^{n}x-e_i}, \qquad & U(x) &= \prod_{i=1}^{n}(x-u_i)\\
\sum_{i=1}^{n}\frac{p_iq_i}{x-e_i} &= \frac{V(x)}{\prod_{i=1}^{n}x-e_i}, \qquad & V(u_j) &= \prod_{i=1}^{n}(u_j-e_i)\cdot p_{u_j}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

В эти уравнения входит набор параметров $e_1 < e_2 \cdots < e_n$, которые задают область определения эллиптических координат

$$u_1 < e_1 < u_2 < e_2 < \cdots < u_n < e_n.$$

Координатные поверхности геометрически представляют собой эллипсоид ($u_1 = const$), однополостный гиперболоид гиперболоид ($u_2 = const$), двухполостный гиперболоид ($u_3 = const$) и т.д., для которых параметры e_i определяют эксцентриситеты этих поверхностей.

Полиномы Якоби $U(x)$ и $V(x)$ можно отождествить с координатами Мамфорда [16] эффективного дивизора степени n

$$D(t)=\sum_{j=1}^{n}P_j(t)\,, \qquad P_j=\Big(x_i=u_i, y_j=V(u_j)\Big) \tag{8}$$

на некоторой гиперэллиптической кривой X рода g. В зависимости от соотношения между числом степеней свободы n и родом кривой g данный эффективный дивизор может быть:

1. *вырожденным $n < g$,*
2. *приведённым $n = g$,*
3. *полу-приведённым $n > g$,*

так как согласно определению эллиптических координат $u_i \neq u_j$ и, поэтому $P_i \neq -P_j$ для всех точек дивизора.

Рассмотрим движение полу-приведённого дивизора $D(t)$ (8) на гиперэллиптической кривой X рода $g = n-1$ вида

$$X: \qquad \Phi(x,y)=y^2-\prod_{i=1}^{n}(x-e_i)\cdot(\alpha x^n+I_1x^{n-1}+I_2x^{n-2}+\cdots+I_n)=0 \tag{9}$$

и

$$X: \qquad \Phi(x,y)=y^2-\prod_{i=1}^{n}(x-e_i)\cdot(I_1x^n+\alpha x^{n-1}+I_2x^{n-2}+\cdots+I_n)=0\,, \tag{10}$$

отвечающее движению в фазовом пространстве с гамильтонианом $H = I_1$. В этом случае $D(t)$ (8) является полу-приведённым дивизором степени n на кривой рода $g = n-1$, который приводится к неподвижному дивизору D' степени g

$$D(t) = D' + D_\infty,$$

так как система из g уравнений движения

$$\dot\Omega_j = \partial H/\partial I_j = 0\,, \qquad j=2,\ldots,n$$

легко интегрируется

$$\Omega_j = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int \frac{x_i^{j-1}\,dx_i}{y_i} = const\,, \qquad j = 2,\dots,n$$

и содержат полный набор из g регулярных дифференциалов на гиперэллиптической кривой X рода g. Тем самым, координаты неподвижных точек дивизора $D' = P_{n+1} + \dots + P_{2n-1}$ являются дополнительными интегралами движения, которые коммутируют с гамильтонианом $H = I_1$ и не коммутируют с остальными переменными действие $I_2,\dots,I_n$.

Подставляя эллиптические координаты u_i и импульсы p_{u_i} в определение координат дивизора с кратными точками

$$U(x) = \prod_{i}^{n}(x-u_i)^{m_i}\,, \qquad V(u_i) = \prod_{j=1}^{n}(u_i - e_j)\cdot\frac{p_{u_i}}{m_i}\,, \tag{11}$$

мы получим полу-приведённый дивизор на гиперэллиптических кривых (9) и (10), который приводится к постоянному приведённому дивизору D'. Как и ранее, координаты неподвижных точек дивизора $D' = P_{n+1} + \dots + P_{2n-1}$ являются дополнительными интегралами движения.

Следуя [19], мы будем называть некоммутативно интегрируемые системы, отвечающие гиперэллиптическим кривым (9) и (10), системами типа гармонического осциллятора и системами типа Кеплера.

Пример 5. *Подставим в определение эллиптических координат (7) декартовы координаты q_i', которые связаны с исходными декартовыми координатами соотношениями*

$$q_i = q_i'/\sqrt{e_n}\,,\quad i = 1,\dots,n-1, \qquad q_n = (q_n' - e_n)/\sqrt{e_n}$$

и перейдем к пределу $e_n \to \infty$. Заменив q_i' на q_i в полученном выражении мы получим определение параболических координат u_j в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$x - 2q_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{q_i^2}{x-e_i} = \frac{U(x)}{\prod_{i=1}^{n-1} x - e_i}\,, \qquad U(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-u_i)\,,$$

Аналогичным образом мы можем получить и второй полином Якоби $V(x)$ такой, что

$$V(u_j) = \prod_{i=1}^{n-1}(u_j - e_i)\,p_{u_j}\,.$$

Как и ранее, набор параметров $e_1 < e_2 \dots < e_n$ задаёт область определения параболических координат

$$u_1 < e_1 < u_2 < e_2 < \dots < u_n$$

такую, что дивизор $D(t) = (U,V)$ является эффективным дивизором. Для гиперэллиптических кривых X рода $g = n-1$

$$X: \qquad \Phi(x,y) = y^2 - \prod_{i=1}^{n-1}(x-e_i)\cdot(\alpha x^{n+1} + \beta x_n + I_1 x^{n-1} + I_2 x^{n-2} + \dots + I_n) = 0\,,$$

$$X: \qquad \Phi(x,y) = y^2 - \prod_{i=1}^{n-1}(x-e_i)\cdot(\alpha x^{n+1} + I_1 x^{n} + \beta x^{n-1} + I_2 x^{n-2} + \dots + I_n) = 0\,,$$

$$X: \qquad \Phi(x,y) = y^2 - \prod_{i=1}^{n-1}(x-e_i)\cdot(I_1 x^{n+1} + \alpha x^{n} + \beta x^{n-1} + I_2 x^{n-2} + \dots + I_n) = 0$$

полу-приведённый дивизор $D(t)$ приводится к дивизору D' степени g, который неподвижен согласно g уравнениям движения $\dot{\Omega}_j = 0$ (4), которые содержат в себе полный набор голоморфных дифференциалов на гиперэллиптической кривой рода g.

Подставляя параболические координаты u_i и импульсы p_{u_i} в определение координат дивизора с кратными точками (11), мы получим полу-приведённый дивизор на одной из трёх гиперэллиптических кривых, который так же приводится к постоянному приведённому дивизору D', координаты которого являются дополнительными интегралами движения.

Таким образом, используя параболические координаты, мы получим три семейства некоммутативно интегрируемых систем, для которых дополнительными интегралами движения будут координаты точек неподвижного дивизора D'.

Все остальные системы криволинейных ортогональных координат в евклидовом пространстве так же могут быть построены из эллиптических координат и, поэтому, мы можем использовать теорему Римана-Роха для построения различных семейств некоммутативно интегрируемых систем, связанных с гиперэллиптическими кривыми рода $g \geq= 1$. Построение аналогичных систем на рациональных кривых обсуждается в работах [13, 30].

В следующем разделе мы обсудим алгебру полученных выше интегралов движения и их форму в простейшем случае $n = 2$ для того, чтобы обсудить применимость гипотезы Мищенко-Фоменко к данным некоммутативно интегрируемым системам.

3. Задача Кеплера и её обобщения

Следуя [32, 34] рассмотрим сначала задачу двух центров, так как именно при рассмотрении этой задачи впервые появились и эллиптические координаты, и соответствующие эллиптические кривые [5]. Детальное описание редукции исходной задачи в трёхмерном пространстве к задаче на плоскости орбиты может быть найдено в учебнике Лагранжа [14].

Согласно Эйлеру, если r и r' расстояния до двух центров на плоскости, то эллиптические координаты $u_{1,2}$ имеют вид

$$r + r' = 2u_1\,, \qquad r - r' = 2u_2\,.$$

Выбирая декартову систему координат так, что центры располагаются в точках с координатами $-\kappa$ и κ на OX-оси получим стандартные выражения

$$q_1 = \frac{u_1 u_2}{\kappa}\,, \qquad \text{и} \qquad q_2 = \frac{\sqrt{(u_1^2 - \kappa^2)(\kappa^2 - u_2^2)}}{\kappa}\,. \tag{1}$$

Координаты $u_{1,2}$ являются криволинейными ортогональными координатами на плоскости, которые имеют смысл только на интервале

$$u_2 < \kappa < u_1\,,$$

Соответствующие импульсы $p_{u_{1,2}}$ находятся из соотношений

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{u_1 u_2 (p_{u_1} u_1 - p_{u_2} u_2) - \kappa^2 (p_{u_1} u_2 - p_{u_2} u_1)}{\kappa (u_1^2 - u_2^2)}\,, \\ p_2 &= \frac{(p_{u_1} u_1 - p_{u_2} u_2)\sqrt{u_1^2 - \kappa^2}\sqrt{\kappa^2 - u_2^2}}{\kappa (u_1^2 - u_2^2)}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим теперь задачу Кеплера, в которой отсутствует один из центров притяжения, а функция Гамильтона и соответствующий интеграл движения равны

$$2H = I_1 = p_1^2 + p_2^2 + \frac{\alpha}{r}\,, \qquad I_2 = \frac{\alpha(r^2 - r'^2)}{4r} - (\kappa^2 + q_2^2)p_1^2 - 2q_1 q_2 p_1 p_2 - q_1^2 p_2^2\,. \tag{3}$$

Эти функции в терминах эллиптических координат имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1}^2}{u_1^2-u_2^2}+\frac{(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}^2}{u_2^2-u_1^2}+\frac{\alpha}{u_1+u_2} \\ I_2 &= \frac{u_2^2(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1^2}}{u_2^2-u_1^2}+\frac{u_1^2(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}^2}{u_1^2-u_2^2}+\frac{\alpha u_1u_2}{u_1+u_2}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Следуя Эйлеру и Лагранжу, подставляя решения этих уравнений относительно p_{u_1} и p_{u_2} в уравнения движения

$$\frac{du_1}{dt}=\{u_1,H\}=\frac{(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1}}{u_1^2-u_2^2}\,,\qquad \frac{du_2}{dt}=\{u_2,H\}=\frac{(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}}{u_2^2-u_1^2}\,,$$

получим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{\sqrt{(u_1^2-\kappa^2)(I_1u_1^2-\alpha u_1+I_2)}} &= \frac{dt}{u_1^2-u_2^2}\,, \\ \frac{du_2}{\sqrt{(u_2^2-\kappa^2)(I_1u_2^2-\alpha u_2+I_2)}} &= -\frac{dt}{u_1^2-u_2^2}\,, \end{aligned} \tag{5}$$

Интегрирование суммы данных уравнений приводит к стандартной сумме абелевых интегралов

$$\int\frac{du_1}{\sqrt{(u_1^2-\kappa^2)(I_1u_1^2-\alpha u_1+I_2)}}+\int\frac{du_2}{\sqrt{(u_2^2-\kappa^2)(I_1u_2^2-\alpha u_2+I_2)}}=const \tag{6}$$

в которую входит голоморфные дифференциалы на эллиптической кривой X, определяемой уравнением

$$X:\quad \Phi(x,y)=y^2-f(x)=0\,,\qquad f(x)=I_1x^4-\alpha x^3+(I_2-I_1\kappa^2)x^2+\kappa^2\alpha x-I_2\kappa^2 \tag{7}$$

в которое входят значения интегралов движения $I_{1,2}$ [14].

Аналогичным образом, умножая уравнения (5) на $u_{1,2}^2$, мы получим вторую сумму абелевых интегралов

$$\int\frac{u_1^2du_1}{\sqrt{(u_1^2-\kappa^2)(I_1u_1^2-\alpha u_1+I_2)}}+\int\frac{u_2^2du_2}{\sqrt{(u_2^2-\kappa^2)(I_1u_2^2-\alpha u_2+I_2)}}=4t \tag{8}$$

Тем самым, решение исходных уравнений движения на фазовом пространстве сведены к квадратурам.

3.1. Движение на проективной плоскости

Абелевы интегралы (6-8) описывают не только движение в задаче Кеплера, но и движение дивизоров на эллиптической кривой. Действительно, введем две точки $P_{1,2}(t)$ на кривой X с координатами

$$x_1=u_1,\quad y_1=(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1}\qquad\text{and}\qquad x_2=u_2\,,\quad y_2=(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}\,.$$

Сумма точек $P_{1,2}$ является полу-приведённым дивизором на эллиптической кривой X, который приводится к приведённому дивизору, состоящему из одной точки

$$P_1(t)+P_2(t)=P_3+D_\infty. \tag{9}$$

В нашем случае, складывая две точки $P_{1,2}(t)$ на эллиптической кривой мы получим третью точку P_3, которая неподвижна, согласно уравнению (6). В области определения эллиптических координат

$$u_2 < \kappa < u_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad (x_3, y_3) \neq (\infty, \infty)\,,$$

и, поэтому, абсцисса x_3 и ордината y_3 неподвижной точки P_3 являются однозначно определёнными конечными функциями.

Для нахождения координат точки P_3 мы используем метод Абеля [1] и рассмотрим пересечение эллиптической кривой X

$$X: \qquad \Phi(x,y) = y^2 - f(x) = 0\,, \qquad f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{10}$$

и параболы Y

$$Y: \qquad y = \mathcal{P}(x)\,, \qquad \mathcal{P}(x) = \sqrt{a_4}x^2 + b_1x + b_0\,.$$

Входящие в уравнение параболы коэффициенты находятся из уравнений

$$y_1 = \sqrt{a_4}x_1^2 + b_1x_1 + b_0 \qquad \text{and} \qquad y_2 = \sqrt{a_4}x_2^2 + b_1x_2 + b_0\,,$$

т.е. парабола определяется с помощью интерполяции по Лагранжу

$$\mathcal{P}(x) = \sqrt{a_4}x^2 + b_1x + b_0 = \sqrt{a_4}(x_1 - x)(x_2 - x) + \frac{(x - x_2)y_1}{x_1 - x_2} + \frac{(x - x_1)y_2}{x_2 - x_1}\,. \tag{11}$$

Подставляя $y = \mathcal{P}(x)$ в уравнение эллиптической кривой $f(x) - y^2 = 0$ мы получим полином Абеля

$$\begin{aligned}\psi &= f(x) - \mathcal{P}^2(x)\\ &= (a_3 - 2b_1\sqrt{a_4})x^3 + (a_2 - 2b_0\sqrt{a_4} - b_1^2)x^2 + (a_1 - 2b_0b_1)x + a_0 - b_0^2\\ &= (a_3 - 2b_1\sqrt{a_4})(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\end{aligned}$$

и абсциссу третьей точки P_3 в уравнении (9)

$$x_3 = -x_1 - x_2 - \frac{2b_0\sqrt{a_4} + b_1^2 - a_2}{2b_1\sqrt{a_4} - a_3} \tag{12}$$

и её ординату

$$y_3 = -\mathcal{P}(x_3) = -\sqrt{a_4}x_3^2 - b_1x_3 - b_0\,, \tag{13}$$

где b_1 и b_0 являются функциями от координат подвижных точек x_1, x_2 и y_1, y_2 (11).

Для задачи Кеплера

$$a_4 = I_1, \quad a_3 = -\alpha\,, \quad a_2 = (I_2 - \kappa^2 I_1)\,, \quad a_1 = \kappa^2\alpha\,, \quad a_0 = -\kappa^2 I_2\,,$$

так что абсцисса неподвижной точки P_3 равна

$$x_3 = \frac{2\Big(\kappa^2(p_{u_1}u_2 - p_{u_2}u_1) - u_1u_2(p_{u_1}u_1 + p_{u_2}u_2)\Big)\Big(\sqrt{I_1}(u_1^2 - u_2^2) - \kappa^2(p_{u_1} - p_{u_2}) + p_{u_1}u_1^2 - p_{u_2}u_2^2\Big) - \alpha(u_1 - u_2)^2(\kappa^2 + u_1u_2)}{\Big(u_1^2 - u_2^2\Big)\Big(2\sqrt{I_1}\Big(\kappa^2(p_{u_1} - p_{u_2}) - p_{u_1}u_1^2 + p_{u_2}u_2^2\Big) + 2\kappa^2(p_{u_1}^2 - p_{u_2}^2) - 2p_{u_1}^2u_1^2 + 2p_{u_2}^2u_2^2 - \alpha(u_1 - u_2)\Big)}\,.$$

Соответствующая ордината y_3 (11) имеет вид

$$y_3 = -\sqrt{I_1}(u_1 - x_3)(u_2 - x_3) - \frac{(x_3 - u_2)(\kappa^2 - u_1^2)p_{u_1}}{u_1 - u_2} - \frac{(x_3 - u_1)(\kappa^2 - u_2^2)p_{u_2}}{u_2 - u_1}\,,$$

Здесь I_1 полиномиальная функция от эллиптических координат (4) и, поэтому, x_3 и y_3 являются алгебраическими функциями от переменных $u_{1,2}$ и $p_{u_{1,2}}$.

В работе [5] Эйлер доказал, что для уравнений Абеля, отвечающих сложению простых точек на эллиптических кривых (9), существует полиномиальный интеграл

$$
\begin{aligned}
C &= 2a_4x_3^2 + a_3x_3 + a_2 - 2\sqrt{a_4}y_3 = \frac{(u_1^2-\kappa^2)(u_2^2-\kappa^2)(p_{u_1}-p_{u_2})^2}{(u_1-u_2)^2} = \\
&= -\left(p_1q_2 - (q_1-\kappa)p_2\right)^2 ,
\end{aligned}
$$

который в задаче Кеплера совпадает с квадратом компоненты вектора углового момента. Опираясь на результаты Эйлера можно сказать, что гипотеза Мищенко-Фоменко справедлива для некоммутативно интегрируемых систем связанных со сложением простых точек на эллиптической кривой.

Существование полиномиального первого интеграла C связано с инвариантностью действия относительно вращений орбитальной плоскости вокруг центра притяжения. Алгебраические первые интегралы x_3 и y_3 не имеют столь простого физического смысла, тем не менее их геометрическое описание тривиально - это координаты неподвижного приведённого дивизора на эллиптической кривой X.

3.2. Нарушение симметрии

В данном разделе мы рассмотрим не канонические преобразования фазового пространства, которые нарушают симметрии действия относительно вращений орбитальной плоскости, но сохраняют неподвижные точки на эллиптической кривой на проективной плоскости [13, 26, 27, 28, 29, 30, 31].

Преобразование импульсов

$$
p_{u_1} \to \frac{p_{u_1}}{m} \qquad \text{and} \qquad p_{u_2} \to \frac{p_{u_2}}{n}\,, \tag{14}
$$

где m и n рациональные числа, сохраняет симметрию потенциала относительно вращений и нарушает симметрию кинетической части исходных интегралов движения (3), которые в данном случае примут вид

$$
\begin{aligned}
2H = I_1 &= \frac{u_1^2-\kappa^2}{u_1^2-u_2^2}\left(\frac{p_{u_1}}{m}\right)^2 + \frac{u_2^2-\kappa^2}{u_2^2-u_1^2}\left(\frac{p_{u_2}}{n}\right)^2 + \frac{\alpha}{u_1+u_2} \\
I_2 &= \frac{u_2^2(u_1^2-\kappa^2)}{u_2^2-u_1^2}\left(\frac{p_{u_1}}{m}\right)^2 + \frac{u_1^2(u_2^2-\kappa^2)}{u_1^2-u_2^2}\left(\frac{p_{u_2}}{n}\right)^2 + \frac{\alpha u_1u_2}{u_1+u_2}\,.
\end{aligned} \tag{15}
$$

В декартовых координатах соответствующая функция Гамильтона (15) имеет вид

$$
H = \frac{(m^2+n^2)(p_1^2+p_2^2)}{4m^2n^2} + \frac{(m^2-n^2)\Big((\kappa^2-q_1^2+q_2^2)(p_1^2-p_2^2)+4q_1q_2p_1p_2\Big)}{4m^2n^2rr'} + \frac{\alpha}{2r}\,.
$$

Как и для исходной задачи Кеплера, уравнения движения приводятся к квадратурам. Например, квадратура (6) после не канонического преобразования импульсов (14) примет вид

$$
m\int\frac{du_1}{\sqrt{(u_1^2-\kappa^2)(I_1u_1^2-\alpha u_1+I_2)}} + n\int\frac{du_2}{\sqrt{(u_2^2-\kappa^2)(I_1u_2^2-\alpha u_2+I_2)}} = const\,. \tag{16}
$$

Подставляя рациональные числа $m = m_1/m_2$ и $n = n_1/n_2$ в это выражение, мы получим сумму эллиптических интегралов с целочисленными коэффициентами

$$
m_1n_2\int\frac{du_1}{\sqrt{(u_1^2-\kappa^2)(I_1u_1^2-\alpha u_1+I_2)}} + n_1m_2\int\frac{du_2}{\sqrt{(u_2^2-\kappa^2)(I_1u_2^2-\alpha u_2+I_2)}} = const\,,
$$

которая отвечает сложению кратных точек на эллиптической кривой

Для краткости мы предположим, что m и n положительные целые числа. В этом случае сумма эллиптических интегралов (16) отвечает приведению полу-приведённого дивизора, состоящего из двух точек кратности m и n

$$[m]P_1(t)+[n]P_2(t)=P_3+D_\infty\,. \tag{17}$$

Здесь $[k]P$ обозначает скалярное умножение точки на эллиптической кривой на целое число $k\in\mathbb{Z}$, аффинные координаты этой точки $[k]P=[k](x,y)$ мы будем обозначать $([k]x,[k]y)$, тогда как обозначения приведённого дивизора P_3 в уравнении (17) остаются прежними x_3 и y_3.

Координаты неподвижной точки P_3 в уравнении (17) равны

$$x_3=-[m]x_1-[n]x_2-\frac{2b_0\sqrt{a_4}+b_1^2-a_2}{2b_1\sqrt{a_4}-a_3}\,,\qquad y_3=-\sqrt{a_4}x_3^2-b_1x_3-b_0\,. \tag{18}$$

В эти уравнения входят функции $b_{1,0}$ которые как и ранее, находятся из уравнений

$$[m]y_1=\sqrt{a_4}\cdot([m]x_1)^2+b_1\cdot[m]x_1+b_0\qquad\text{and}\qquad[n]y_2=\sqrt{a_4}\cdot([n]x_2)^2+b_1\cdot[n]x_2+b_0\,.$$

в которые входят координаты кратных точек $[m]P_1$ и $[n]P_2$. Для умножения точек на эллиптических кривых можно использовать стандартные алгоритмы [15, 21].

Кроме координат неподвижной точки P_3 в уравнении (17) можно ввести и аналог интеграла Эйлера

$$\begin{aligned}C_{mn}&=2a_4x_3+a_3x_3+a_2-2\sqrt{a_4}y_3=\\&=\left(\frac{[m]y_1-[n]y_2}{[m]x_1-[n]x_2}\right)^2-a_4\big([m]x_1+[n]x_2\big)^2-a_3\big([m]x_1+[n]x_2\big)\,.\end{aligned} \tag{19}$$

Данные интегралы движения кратных точек на эллиптической кривой порождают первые интегралы обобщённой задачи Кеплера с полиномиальными интегралами движения (15), если отождествить аффинные координаты на проективной плоскости с координатами на фазовом пространстве:

$$x_1=u_1,\quad y_1=(u_1^2-\kappa^2)\frac{p_{u_1}}{m}\qquad\text{and}\qquad x_2=u_2\,,\quad y_2=(u_2^2-\kappa^2)\frac{p_{u_2}}{n} \tag{20}$$

При $m=n$ интеграл Эйлера C_{mn} (19) равен квадрату компоненты углового момента, сохранение которого связанно с пространственной симметрией задачи. Для произвольных $m\neq n$ интегралы движения x_3,y_3 (18) и C_{mn} (19) будут алгебраическими функциями на фазовом пространстве. Явные выражения для некоторых из этих интегралов могут быть найдены в [31, 32].

Нам не удалось найти полиномиальную комбинацию этих интегралов движения, в отличии от случая сложения простых точек на эллиптической кривой. Тем самым, нам не удалось доказать справедливость гипотезы Мищенко-Фоменко в классе полиномиальных функций для обобщения задачи Кеплера , связанной со сложением кратных точек на эллиптической кривой. Однако, в классе рациональных функций данная гипотеза справедлива.

Согласно [34], функции I_1,I_2 (15) и x_3,y_3 (18) на фазовом пространстве $T^*\mathbb{R}^2$ описывают реализации следующей алгебры первых интегралов

$$\begin{aligned}&\{I_1,I_2\}=0\,,&&\{I_1,x_3\}=0\,,&&\{I_1,y_3\}=0\,,\\&\{I_2,x_3\}=\Phi_y(x_3,y_3)\,,&&\{I_2,y_3\}=-\Phi_x(x_3,y_3)\,,&&\{x_3,y_3\}=\kappa^2-x_3^2\end{aligned} \tag{21}$$

отвечающие различным целым числам m и n. Здесь

$$\Phi_y(x,y)=\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}=2y \quad\text{and}\quad \Phi_x(x,y)=\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}=-(4I_1x^3-3\alpha x^2+2(I_2-\kappa I_1)x+\alpha\kappa^2)$$

являются производными функции $\Phi(x,y)$, которая задаёт эллиптическую кривую X (7), а $\{.,.\}$ обозначают стандартные скобки Пуассона

$$\{u_1,u_2\}=0\,,\quad \{p_{u_1},p_{u_2}\}=0\,,\quad \{u_i,p_{u_j}\}=\delta_{ij}\,. \tag{22}$$

При $m=n$ эти полиномиальные скобки Пуассона между алгебраическими интегралами движения приводится к линейной скобке Пуассона с бивектором (2).

4. Гармонический осциллятор и его обобщения

Начнём с рассмотрения функции Гамильтона и первого интеграла, который, как и ранее, является квадратом компоненты углового момента, для гармонического осциллятора на плоскости

$$2H=I_1=p_1^2+p_2^2-\alpha^2(q_1^2+q_2^2)\,,\qquad I_2=(p_1^2-\alpha^2q_1^2)\kappa^2-(p_1q_2+p_2q_1)^2\,,$$

Поставляя в эти функции выражения для координат (1) и импульсов (2) через эллиптические координаты на плоскости, мы получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1}^2}{u_1^2-u_2^2}+\frac{(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}^2}{u_2^2-u_1^2}+\alpha^2(\kappa^2-u_1^2-u_2^2)\\ I_2 &= -\frac{u_2^2(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1}^2}{u_1^2-u_2^2}-\frac{u_1^2(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}^2}{u_2^2-u_1^2}+\alpha^2u_1^2u_2^2\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Используя эти выражения и скобки Пуассона (22) перепишем уравнения движения

$$\frac{du_1}{dt}=\{u_1,H\}=\frac{(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1}}{u_1^2-u_2^2}\,,\qquad \frac{du_2}{dt}=\{u_2,H\}=\frac{(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}}{u_2^2-u_1^2}\,,$$

в виде

$$\frac{du_1}{p_{u_1}}=\frac{dt}{u_1^2-u_2^2}\,,\qquad \frac{du_2}{p_{u_2}}=-\frac{dt}{u_1^2-u_2^2}\,.$$

Исключая время, мы получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{du_1}{(u_1^2-\kappa^2)p_{u_1}}+\frac{du_2}{(u_2^2-\kappa^2)p_{u_2}}=0\,.$$

Подставляя решения уравнений (23) относительно $p_{u_{1,2}}$ в это уравнение и интегрируя, мы получим квадратуру определяющую форму траекторий [14]:

$$\int\frac{du_1}{\sqrt{(u_1^2-\kappa^2)(\alpha^2u_1^4+(I_1-\alpha^2\kappa^2)u_1^2+I_2)}}+\int\frac{du_2}{\sqrt{(u_2^2-\kappa^2)(\alpha^2u_2^4+(I_1-\alpha^2\kappa^2)u_2^2+I_2)}}=const$$

Используя подстановку Эйлера $u_i^2=x_i$, приведем это уравнение к сумме эллиптических интегралов на эллиптической кривой X

$$X:\quad \Phi(x,y)=y^2-f(x)=0\,,\quad f(x)=\alpha^2x^4+(I_1-2\alpha^2\kappa^2)x^3+(\alpha^2\kappa^4-I_1\kappa^2+I_2)x^2-\kappa^2I_2x\,. \tag{24}$$

С точки зрения Якоби это стандартное приведение уравнений движения к квадратурам означает, что мы переходим от рассмотрения движения на фазовом пространстве $T^*\mathbb{R}^2$ к рассмотрению движения точек $P_{1,2}(t)$ вдоль эллиптической кривой X. При этом уравнения Гамильтона заменяются на уравнение (9)

$$P_1(t) + P_2(t) = P_3 + D_\infty\,.$$

Для осциллятора аффинные координаты подвижных точек $P_{1,2}(t)$ выражаются через эллиптические координаты следующим образом

$$x_1 = u_1^2, \quad y_1 = (u_1^2 - \kappa^2)u_1 p_{u_1} \qquad \text{и} \qquad x_2 = u_2^2\,, \quad y_2 = (u_2^2 - \kappa^2)u_2 p_{u_2}\,.$$

При этом абсцисса неподвижной точки x_3 (12) равна

$$x_3 = -\frac{\Big((u_1^2-\kappa^2)u_2p_{u_1}-(u_2^2-\kappa^2)u_1p_{u_2}+\alpha u_1u_2(u_1^2-u_2^2)\Big)^2}{(u_1^2-u_2^2)\Big((\kappa^2-u_1^2)p_{u_1}^2-(\kappa^2-u_2^2)p_{u_2}^2+2\alpha(u_1(\kappa^2-u_1^2)p_{u_1}-u_2(\kappa^2-u_2^2)p_{u_2})+\alpha^2(\kappa^2-u_1^2-u_2^2)(u_1^2-u_2^2)\Big)}\,,$$

Ордината y_3 (13) является более громоздкой рациональной функцией, которую может быть найдена в [31]. Комбинация рациональных первых интегралов x_3, y_3 , предложенная в общем случае Эйлером, является полиномиальным интегралом движения

$$C = 2a_4x_3 + a_3x_3 + a_2 - 2\sqrt{a_4}y_3 = -(p_1q_2 + p_2q_1)^2 - \kappa^2 I_1 + \alpha^2\kappa^4\,,$$

существование которого связано с симметриями конфигурационного пространства.

Аналогичным образом можно доказать существование полиномиальный не коммутативных интегралов для n-мерного осциллятора, задачи Кеплера и ряда других систем, связанных с динамикой полу-приведённых дивизоров состоящих из простых точек на гиперэллиптических кривых. Это позволяет нам предположить справедливость следующего Предложения.

Предложение 1. *Для некоммутативно интегрируемых систем, связанных со сложением простых точек на гиперэллиптической кривой и голоморфными дифференциалами, гипотеза Мищенко-Фоменко справедлива в классе полиномиальных интегралов движения.*

Для всех известных нам примеров данное Предложение справедливо, но общего доказательства у нас нет.

Рассмотрим теперь случай сложения кратных точек. Не каноническое преобразование (14), нарушающее инвариантность действия относительно вращений, порождает следующие интегралы движения

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{u_1^2 - \kappa^2}{u_1^2 - u_2^2}\left(\frac{p_{u_1}}{m}\right)^2 + \frac{u_2^2 - \kappa^2}{u_2^2 - u_1^2}\left(\frac{p_{u_2}}{n}\right)^2 + \alpha^2(\kappa^2 - u_1^2 - u_2^2) \\ I_2 &= \frac{u_2^2(u_1^2 - \kappa^2)}{u_2^2 - u_1^2}\left(\frac{p_{u_1}}{m}\right)^2 + \frac{u_1^2(u_2^2 - \kappa^2)}{u_1^2 - u_2^2}\left(\frac{p_{u_2}}{n}\right)^2 + \alpha^2 u_1^2 u_2^2\,, \end{aligned} \tag{25}$$

В декартовых координатах на плоскости соответствующая функция Гамильтона $H = 2I_1$ имеет вид

$$H = \frac{(m^2+n^2)(p_1^2+p_2^2)}{4m^2n^2} + \frac{(m^2-n^2)\Big((\kappa^2 - q_1^2 + q_2^2)(p_1^2 - p_2^2) + 4q_1q_2p_1p_2\Big)}{4m^2n^2rr'} - \frac{\alpha^2(q_1^2+q_2^2)}{2}\,.$$

где r, r' и κ входят в определение эллиптических координат на плоскости. Соответствующие уравнения Гамильтона приводятся к квадратурам, которые эквивалентны уравнению (17)

$$[m]P_1(t) + [n]P_2(t) = P_3 + D_\infty\,,$$

описывающему движение кратных точек на эллиптической кривой X. Для обобщённого гармонического осциллятора функцией Гамильтона (25) координаты неподвижной точки x_3, y_3 (18) и аналог интеграла Эйлера C_{mn} (19) будут рациональными функциями на фазовом пространстве при $m \neq n$. Несколько частных явных выражений для этих рациональных функций могут быть найдены в [31, 32].

В отличии от случая сложения простых точек на эллиптической кривой нам не удалось найти полиномиальную комбинацию полиномиальных $I_{1,2}$ и рациональный интегралов движения x_3, y_3, которая являлась бы дополнительным к $I_)1, 2$ интегралом движения. Тем самым, нам не удалось доказать справедливость гипотезы Мищенко-Фоменко для обобщения гармонического осциллятора, связанного со сложением кратных точек на эллиптической кривой. Полученные для обобщённого осциллятора и задачи Кеплера результаты можно сформулировать в виде следующего Предложения.

Предложение 2. *Для некоммутативно интегрируемых систем, связанных со сложением кратных точек на гиперэллиптической кривой и голоморфными дифференциалами, гипотеза Мищенко-Фоменко справедлива в классе рациональных функций.*

Для всех известных нам примеров данное Предложение справедливо, но, как и ранее, общего доказательства у нас нет.

Согласно [34] функции I_1, I_2 (25) и x_3, y_3 (18) на фазовом пространстве $T^*\mathbb{R}^2$ реализуют представления следующей алгебры первых интегралов

$$\begin{aligned} &\{I_1, I_2\} = 0\,, && \{I_1, x_3\} = 0\,, && \{I_1, y_3\} = 0\,, \\ &\{I_2, x_3\} = 2\Phi_y(x_3, y_3)\,, && \{I_2, y_3\} = -2\Phi_x(x_3, y_3)\,, && \{x_3, y_3\} = 2x_3(\kappa^2 - x_3^2)\,, \end{aligned} \tag{26}$$

зависящие от пары целых чисел m и n. Как и для задачи Кеплера

$$\Phi_y(x, y) = 2y\,, \qquad -\Phi_x(x, y) = 4\alpha^2 x^3 + 3(I_1 - 2\alpha^2\kappa^2)x^2 + 2(\alpha^2\kappa^4 - \kappa^2 I_1 + I_2)x - \kappa^2 I_2$$

являются производными от функции $\Phi(x, y)$ на проективной плоскости, которая определяет эллиптическую кривую X (24), а $\{.,.\}$ обозначают стандартные скобки Пуассона (22). При $m = n$ эти полиномиальные скобки Пуассона между алгебраическими интегралами движения приводится к линейной скобке Пуассона с бивектором (1).

5. Заключение

В данной работы обсуждается справедливость гипотезы Мищенко-Фоменко о существовании интегралов движения из единого функционального класса для некоммутативно интегрируемых систем. Для динамических систем, уравнения движения которых приводятся к абелевым квадратурам, а существование дополнительных интегралов движения связано с приведением полу-приведённого дивизора к неподвижному дивизору на эллиптической или гиперэллиптической кривой X, интегралы движения делятся на два семейства:

- интегралы движения, задающие кривую X на проективной плоскости, являются полиномиальными функциями;
- интегралами движения, задающие координаты неподвижного приведённого дивизора, являются алгебраическими или рациональными функциями.

Используя результаты Эйлера, можно доказать, что для полу-привёденных дивизоров, состоящих из простых точек на кривой X, можно построить полиномиальную комбинацию координат неподвижного дивизора и, тем самым, доказать справедливость гипотезы Мищенко-Фоменко.

Для полу-привёденных дивизоров, состоящих из кратных точек на кривой X, нам не удалось найти комбинацию координат неподвижного дивизора которая была бы полиномом на исходном фазовом пространстве, даже в простейшем случае. Тем самым, нам пока не удалось доказать справедливость гипотезы Мищенко-Фоменко для некоммутативно интегрируемых систем связанных со сложением кратных точек на эллиптической кривой.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-30012).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abel N. H., Mémoire sure une propriété générale d'une classe très éntendue de fonctions transcendantes, Oeuvres complétes, Tome I, Grondahl Son, Christiania (1881), pages 145-211.

2. Bogoyavlenskij O., *Extended integrability and bi-Hamiltonian systems*, // Commun. Math. Phys., 1998, v.196, pp.19-51.

3. Болсинов А. В., *Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгеб- рах: доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко* // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.-2005.-Вып. 26.-с. 87-109.

4. Bolsinov A.V., Jovanović B., *Noncommutative integrability, moment map and geodesic flows* // Annals of Global Analysis and Geometry.-2003.-Vol. 23, p.305-322.

5. Euler L., *Probleme un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver les cas oú la courbe décrite par ce corps sera algébrique*, Mémoires de l'academie des sciences de Berlin v.16, pp. 228-249, (1767).

6. Euler L., Institutionum calculi integralis, v.1, Acta Petropolitana, (1761).

7. Jovanović, B., *Noncommutative integrability and action-angle variables in contact geometry* // J. Symplectic Geom.-2012., v.10, no. 4, pp.535-561.

8. Handbook of Elliptic and Hyperelliptic Curve Cryptography, ed. H. Cohen and G. Frey, Chapman and Hall/CRC, 2006.

9. Hurtubise J.C., Kjiri M., *Separating coordinates for the generalized Hitchin systems and the classical r-matrices* // Commun. Math. Phys., 2000, v.210, pp.521- 540.

10. Fassó F., Ratiu T., *Compatibility of symplectic structures adapted to noncommutatively integrable systems* // J. Geom. Phys., 1998, v.27, pp.199-220.

11. Fassó F., *Superintegrable Hamiltonian systems: geometry and applications* // Acta Appl. Math. 205, v.87,pp.93–121.

12. Fiorani E., Sardanashvily G., *Noncommutative integrability on noncompact invariant manifolds* // J. Phys. A: Math. and Gen., 2006, v.39, n.45, pp. 14035-14042.,

13. Grigoriev Yu. A., Tsiganov A.V., *On superintegrable systems separable in Cartesian coordinates* // Phys. Lett. A, v. 382(32), pp.2092-2096, (2018).

14. Lagrange J.L., Mécanique analytique, v.2, (1789), Œuvres complètes, tome 12.

15. Lang S., Elliptic Curves: Diophantine Analysis, Springer-Verlag, A Series of Comprehensive Studies in Math, v. 231,(1978).

16. Mumford D., Tata Lectures on Theta II, Birkhäuser, 1984.

17. Мищенко А. С., Фоменко А. Т., *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли* // Изв. АН СССР. Сер. матем.-1978.-т. 42, № 2.-с. 396-415.

18. Мищенко А. С., Фоменко А. Т., *Обобщённый метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем* // Функц. анализ и его прил.-1978.-т. 12, № 2.- с. 46-56.

19. Onofri E., Pauri, M., *Search for periodic hamiltonian flows: A generalized Bertrand's theorem* // J. Math. Phys., 1978, v. 19(9), pp. 1850-1858.

20. Садэтов С. Т. Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко // Докл. РАН, 2004, т. 397, № 6.-с. 751-754.

21. Silverman J.H., The Arithmetic of Elliptic Curves, Springer-Verlag New York, 2009.

22. Stäckel P., Über die Integration der Hamilton–Jacobischen Differential Gleichung Mittelst Separation der Variabeln, Habilitationsschrift, Halle, 26pp., 1891.

23. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых систем дифференциальных уравнений.-М.: Факториал, 1995.

24. Tsiganov A. V., *The Stäckel systems and algebraic curves* // J. Math. Phys., 1999, v.40, pp.279-298.

25. Tsiganov A.V., *The Drach superintegrable systems* // J. Phys. A: Math. Gen., 2000, v.33, n.41, pp.7407-7422.

26. Tsiganov A.V., *On maximally superintegrable systems* // Reg. Chaot. Dyn., 2008, v.13(3), pp.178-190.

27. Tsiganov A.V., *Addition theorems and the Drach superintegrable systems* // J. Phys. A: Math. Theor., 2008, v. 41, 335204.

28. Tsiganov A.V., *Leonard Euler: addition theorems and superintegrable systems* // Reg. Chaot. Dyn., 2009, v.14(3), pp.389-406.

29. Tsiganov A.V., *On the superintegrable Richelot systems* // J. Phys. A: Math. Theor., 2010, v. 43, 055201.

30. Tsiganov A.V., *Transformation of the Stäckel matrices preserving superintegrability* // J. Math. Phys., 2019, v. 60, 042701.

31. Tsiganov A.V., *Elliptic curve arithmetic and superintegrable systems* // Phys. Scripta, 2019, v.94, 085207.

32. А. В. Цыганов, *О суперинтегрируемых системах с алгебраическими и рациональными интегралами движения* // ТМФ, 2019, т.199, стр. 218-234.

33. Tsiganov A.V., *Discretization and superintegrability all rolled into one* // arXiv:1902.03884, 2019.

34. Tsiganov A.V., *The Kepler problem: polynomial algebra of non-polynomial first integrals* // Regul. Chaotic Dyn., 2019, v.24, pp.353-369.

REFERENCES

1. Abel N. H., Mémoire sure une propriété générale d'une classe très éntendue de fonctions transcendantes, Oeuvres complétes, Tome I, Grondahl Son, Christiania (1881), pages 145-211.

2. Bogoyavlenskij O., *Extended integrability and bi-Hamiltonian systems*, // Commun. Math. Phys., 1998, v.196, pp.19-51.

3. Bolsinov A. V., *Complete commutative families of polynomials in Poisson-Lie algebras: A proof of the Mischenko-Fomenko conjecture* // In book: Tensor and Vector Analysis, 2005, Vol. 26, pp. 87-109.

4. Bolsinov A.V., Jovanović B., *Noncommutative integrability, moment map and geodesic flows* // Annals of Global Analysis and Geometry.-2003.-Vol. 23, p.305-322.

5. Euler L., *Probleme un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver les cas oú la courbe décrite par ce corps sera algébrique*, Mémoires de l'academie des sciences de Berlin v.16, pp. 228-249, (1767).

6. Euler L., Institutionum calculi integralis, v.1, Acta Petropolitana, (1761).

7. Jovanović, B., *Noncommutative integrability and action-angle variables in contact geometry* // J. Symplectic Geom.-2012., v.10, no. 4, pp.535-561.

8. Handbook of Elliptic and Hyperelliptic Curve Cryptography, ed. H. Cohen and G. Frey, Chapman and Hall/CRC, 2006.

9. Hurtubise J.C., Kjiri M., *Separating coordinates for the generalized Hitchin systems and the classical r-matrices* // Commun. Math. Phys., 2000, v.210, pp.521- 540.

10. Fassó F., Ratiu T., *Compatibility of symplectic structures adapted to noncommutatively integrable systems* // J. Geom. Phys., 1998, v.27, pp.199-220.

11. Fassó F., *Superintegrable Hamiltonian systems: geometry and applications* // Acta Appl. Math. 205, v.87,pp.93–121.

12. Fiorani E., Sardanashvily G., *Noncommutative integrability on noncompact invariant manifolds* // J. Phys. A: Math. and Gen., 2006, v.39, n.45, pp. 14035-14042.,

13. Grigoriev Yu. A., Tsiganov A.V., *On superintegrable systems separable in Cartesian coordinates* // Phys. Lett. A, v. 382(32), pp.2092-2096, (2018).

14. Lagrange J.L., Mécanique analytique, v.2, (1789), Œuvres complètes, tome 12.

15. Lang S., Elliptic Curves: Diophantine Analysis, Springer-Verlag, A Series of Comprehensive Studies in Math, v. 231,(1978).

16. Mumford D., Tata Lectures on Theta II, Birkhäuser, 1984.

17. Mishchenko A. S., Fomenko A. T., *Euler equations on finite-dimensional Lie groups* // Math. USSR-Izv.-1978.-v. 12, n.2, pp. 371–389.

18. Mishchenko A. S., Fomenko A. T., *Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systemsОбобщённый метод Лиувилля интегрирования* // Funct. Anal. Appl., -1978.-v. 12, n. 2, pp. 46-56.

19. Onofri E., Pauri, M., *Search for periodic hamiltonian flows: A generalized Bertrand's theorem* // J. Math. Phys., 1978, v. 19(9), pp. 1850-1858.

20. Sadetov S. T., *A proof of the Mishchenko-Fomenko conjecture* // Dokl. Akad. Nauk, 2004, v. 397, n. 6, pp.751-754.

21. Silverman J.H., The Arithmetic of Elliptic Curves, Springer-Verlag New York, 2009.

22. Stäckel P., Über die Integration der Hamilton–Jacobischen Differential Gleichung Mittelst Separation der Variabeln, Habilitationsschrift, Halle, 26pp., 1891.

23. Trofimov V. V., Fomenko A. T. Algebra and Geometry of the Integrable Hamiltonian Differential Equations. -M.:Factorial, 1995.

24. Tsiganov A. V., *The Stäckel systems and algebraic curves* // J. Math. Phys., 1999, v.40, pp.279-298.

25. Tsiganov A.V., *The Drach superintegrable systems* // J. Phys. A: Math. Gen., 2000, v.33, n.41, pp.7407-7422.

26. Tsiganov A.V., *On maximally superintegrable systems* // Reg. Chaot. Dyn., 2008, v.13(3), pp.178-190.

27. Tsiganov A.V., *Addition theorems and the Drach superintegrable systems* // J. Phys. A: Math. Theor., 2008, v. 41, 335204.

28. Tsiganov A.V., *Leonard Euler: addition theorems and superintegrable systems* // Reg. Chaot. Dyn., 2009, v.14(3), pp.389-406.

29. Tsiganov A.V., *On the superintegrable Richelot systems* // J. Phys. A: Math. Theor., 2010, v. 43, 055201.

30. Tsiganov A.V., *Transformation of the Stäckel matrices preserving superintegrability* // J. Math. Phys., 2019, v. 60, 042701.

31. Tsiganov A.V., *Elliptic curve arithmetic and superintegrable systems* // Phys. Scripta, 2019, v.94, 085207.

32. Tsiganov A. V., *Superintegrable systems with algebraic and rational integrals of motion* // Theoret. and Math. Phys., 2019, v.199, n. 2, pp. 659–674.

33. Tsiganov A.V., *Discretization and superintegrability all rolled into one* // arXiv:1902.03884, 2019.

34. Tsiganov A.V., *The Kepler problem: polynomial algebra of non-polynomial first integrals* // Regul. Chaotic Dyn., 2019, v.24, pp.353-369.

Получено 25.11.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.