

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 2.

УДК 514.853

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-341-361

О бегущих волнах в системах абсолютно упругих частиц на прямой¹

С. М. Саулин

Саулин Сергей Михайлович — аспирант кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; младший научный сотрудник, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).

e-mail: serega-saulin@mail.ru

Аннотация

Рассматривается система из бесконечного числа абсолютно упругих частиц на прямой, массы и начальные расстояния между которыми периодически повторяются. Изучаются условия, при которых в таких системах могут существовать решения типа бегущих волн.

Ключевые слова: абсолютно упругий удар, бегущая волна, бильярд.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

С. М. Саулин. О бегущих волнах в системах абсолютно упругих частиц на прямой // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 341–361.

¹Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (№ 18-01-00887), а также гранта Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 2.

UDC 514.853

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-341-361

On traveling waves in systems of absolutely elastic particles on a straight line

S. M. Saulin

Saulin Sergey Mikhaylovich — postgraduate student at the Department of Theoretical Mechanics and Mechatronics of the Faculty of Mechanics and Mathematics of M. V. Lomonosov MSU; Junior Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: serega-saulin@mail.ru

Abstract

We consider a system of an infinite number of absolutely elastic particles on a straight line, the masses and initial distances between which are periodically repeated. We study the conditions under which solutions such as traveling waves can exist in such systems.

Keywords: absolutely elastic blow, traveling wave, billiards.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

S. M. Saulin, 2020, "On traveling waves in systems of absolutely elastic particles on a straight line", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 341–361.

1. Введение

Рассмотрим систему из бесконечного числа одинаковых абсолютно упругих частиц на прямой. Так как массы частиц равны, то из законов сохранения энергии и импульса следует, что в момент удара двух частиц происходит обмен скоростями. Поэтому в системе из бесконечного числа одинаковых частиц существует решение, при котором в каждый момент времени движется лишь одна частица. Такое решение естественно называть решением типа бегущей волны. В этом случае полная энергия системы последовательно передается от одной частицы к другой.

Известно, что в системах из бесконечного числа одинаковых частиц на прямой, взаимодействующих с помощью потенциала $V : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ($V(0) = +\infty$) и имеющих большую энергию, существуют локализованные бегущие волны [15]. Они получаются как возмущения описанного выше решения в системе из бесконечного числа абсолютно упругих одинаковых частиц на прямой. В частности, в работе [15] даны количественные оценки на скорость распространения бегущей волны, а также близость исходного и возмущенного решений. В работах [1, 2, 8] также доказываются теоремы существования локализованных бегущих волн в системах частиц на прямой в случае больших энергий, однако для этого используются вариационные методы, а на потенциал V накладываются более жесткие условия. Используя метод центральных многообразий, авторы статей [9, 10] строят бегущие волны при малых энергиях со скоростями распространения, близкими к некоторым критическим значениям. Заинтересованного читателя отсылаем к книге [12], в которой подробно обсуждаются нелинейные эффекты в системах взаимодействующих частиц на прямой.

В случае, если массы $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ абсолютно упругих частиц различны, то даже вопрос о существовании решения типа бегущей волны оказывается нетривиальным. Мы полностью ответим на этот вопрос, когда число N различных масс на прямой равно 2, и частично, если $N = 3$. В обоих случаях массы частиц и начальные расстояния между соседними частицами периодически повторяются.

Под решением типа простейшей бегущей волны (п. б. в.) будем понимать частное решение, описываемое следующей конструкцией. Разобьем все частицы $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, кроме частицы $\#1$, на непересекающиеся группы, состоящие из N частиц: в каждой группе находятся частицы с массами $m_2, \dots, m_N$, $m_{N+1} = m_1$, последовательно расположенные на прямой (см. рис. 1).

В начальный момент времени частицы расположены так, что каждая следующая группа частиц получается из предыдущей сдвигом на один и тот же вектор. Предположим, что в начальный момент времени все частицы на прямой, кроме частицы $\#1$, покоились, а частица $\#1$ двигалась в направлении первой группы со скоростью 1. Пусть после некоторого числа κ столкновений частиц первой группы вся энергия частицы $\#1$ полностью передалась частице $\#(N+1)$. Таким образом, первые N частиц остановились, а частица $\#(N+1)$ продолжила движение.

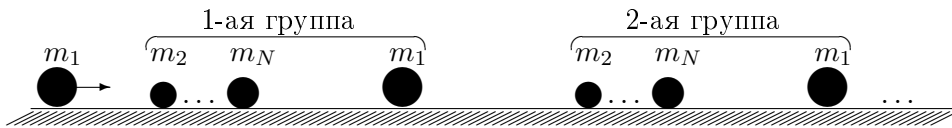


Рис. 1: расположение частиц на прямой.

Предположим, что начальные расстояния между частицами можно выбрать так, чтобы после полной передачи энергии частица $\#(N+1)$ не соударяется с частицей $\#N$. Так как начальные расстояния между соседними частицами и массы частиц не меняются при замене одной группы на другую, то частицы второй группы совершают такую же последовательность столкновений, что и частицы первой группы.

Ясно, что описанная конструкция накладывает ограничения на массы частиц, а также на начальные расстояния между частицами. Однако она позволяет свести изучение решений типа бегущей волны в системе, состоящей из бесконечного числа частиц на прямой, к изучению динамики первых $N+1$ частиц с массами $m_1, m_2, \dots, m_N, m_1$.

Для реализации описанной конструкции необходимо ответить на следующие вопросы.

В1. Каким соотношениям удовлетворяют массы $m_1, m_2, \dots, m_N$?

Пусть ρ_j — расстояние между частицами с номерами j и $j+1$ в начальный момент времени $1 \leq j \leq N$, а S — расстояние между группами частиц.

В2. Какими могут быть расстояния $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$ и S ?

Ответам на эти вопросы и посвящена настоящая работа. Следует отметить, что мы не изучаем решения типа бегущих волн, при которых одновременно происходят удары внутри нескольких групп. Также мы ищем решения, в которых отсутствуют кратные удары: в каждый момент времени сталкиваются не более двух частиц. Известно, что в этом случае полное число ударов κ частиц $\#1, \#2, \dots, \#N$ до полной передачи энергии частице $\#(N+1)$ всегда конечно и оценивается константой, зависящей только от масс частиц и их количества [4, 6, 13, 14].

Заметим, что начальная величина скорости частицы $\#1$ не важна: изменив масштаб времени, можно сделать скорость равной 1. Полученные ниже соотношения на массы и расстояния не зависят от масштаба времени.

Интересен также ответ на следующий вопрос. Верно ли, что для любых начальных расстояний $\{\rho_k\}_{k=1}^N$ между соседними частицами существует набор масс $\{m_k\}_{k=1}^N$, такой, что $m_i \neq m_j$

для некоторой пары индексов $1 \leq i, j \leq N$ и в соответствующей системе частиц существует решение типа п. б. в? Очевидно, что в случае $N = 1$ ответ на этот вопрос положительный. Ниже мы показываем (см. §3), что в случае $N = 2$ это утверждение также верно.

Опишем схему дальнейшего изложения. В §2 задача о движении $(N + 1)$ -ой частицы на прямой сводится к бильярдной задаче в N -гранном угле в $\mathbb{R}^{N+1}$ и $\mathbb{R}^N$ соответственно. В этом же параграфе производится редукция к бильярду в сферическом многограннике на $\mathbb{S}^{N-1}$. Эти конструкции хорошо известны и могут быть найдены, например, в книгах [7, 11]. В конце параграфа доказываются утверждения о геометрии конфигурационного пространства системы точек на прямой.

В §3 изучается случай трех частиц с массами m_1, m_2 и m_1 . Теоремы 1 и 2 дают полные ответы на вопросы **B1** и **B2** для $N = 2$. Утверждение теоремы 3 означает, что симметрия расположения масс на прямой влечет за собой симметрию последовательности расстояний между частицами в моменты соударений.

В §4 подробно рассматривается случай четырех частиц на прямой. Используя результаты §2, мы сводим изучение существования решения типа п. б. в. к поиску условий на прямоугольные сферические треугольники, в которых существуют бильярдная траектория с началом и концом в разных острых углах, имеющая длину, равную π . В частных случаях получены достаточные условия на параметры таких треугольников.

В §5 доказывается теорема 4, справедливая для произвольного $N > 2$, в которой оцениваются расстояния каждой из частиц, участвующих в решении типа п. б. в., пройденные до момента полной остановки. В частности, из нее следует, что если система из $(N + 1)$ -ой частицы на прямой имеет решение типа п. б. в., то система из бесконечного набора частиц в описанной выше конструкции также имеет решение типа п. б. в.

2. Общие конструкции

2.1. Бильярд в N -гранном угле в $\mathbb{R}^{N+1}$

Пусть на горизонтальной прямой имеется $N + 1$ материальная точка с массами $m_1, m_2, \dots, m_{N+1}$, которые взаимодействуют между собой по абсолютно упругому закону. Это означает, что скорости частиц при столкновениях преобразуются согласно законам сохранения энергии и импульса. Обозначим через x_i и v_i координату и скорость i -ой точки, $1 \leq i \leq N + 1$. Далее предполагаем, что кратных ударов не происходит: в каждый момент времени любая частица соударяется не более, чем с одной соседней частицей.

Рассмотрим конфигурационное пространство $\mathbb{R}^{N+1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{N+1})\}$ этой динамической системы и N -гранный угол $Q = \{x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{N+1}\}$, ограниченный гиперплоскостями $\Pi_j = \{x_j = x_{j+1}\}, 1 \leq j \leq N$. Точки, принадлежащие $\Pi_j \cap Q$ соответствуют положениям частиц на прямой, при которых частицы $\#j$ и $\#(j + 1)$ столкнулись; точки прямой $l = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \dots \cap \Pi_N$ пересечения всех плоскостей соответствуют столкновению всех частиц в одной точке.

Пока частицы на прямой движутся без столкновений, конфигурационная точка $M(t) = x(t)$ движется внутри угла Q равномерно и прямолинейно по направлению вектора $v = (v_1, v_2, \dots, v_{N+1})$. В момент столкновения $t = \tau$ частиц $\#j$ и $\#(j + 1)$ точка $M(\tau)$ находится на плоскости Π_j . После столкновения частицы расходятся, а точка $M(t), t > \tau$ продолжает движение внутри угла Q до очередного столкновения частиц. Направление движения точки $M(t)$ определяется из законов сохранения.

Далее удобно использовать другие координаты: $\tilde{x}_i = \sqrt{m_i} x_i, 1 \leq i \leq N + 1$. Пусть $(\cdot, \cdot)$ — стандартное евклидово произведение в $\mathbb{R}^{N+1}$ в координатах $\tilde{x}$, а $\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}, \xi \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Точка $\tilde{M}(t) = \tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ все время движения находится в угле

$$\tilde{Q} = \left\{ \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} \leq \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}} \leq \dots \leq \frac{\tilde{x}_{N+1}}{\sqrt{m_{N+1}}} \right\}$$

и движется по направлению вектора $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{N+1})$, $\tilde{v}_i = \sqrt{m_i} v_i$, $1 \leq i \leq N+1$. Граница $\tilde{Q}$ лежит в объединении гиперплоскостей

$$\tilde{\Pi}_j = \left\{ \frac{\tilde{x}_j}{\sqrt{m_j}} = \frac{\tilde{x}_{j+1}}{\sqrt{m_{j+1}}} \right\},$$

нормальными к которым являются вектора

$$n_j = \frac{1}{\sqrt{m_j^{-1} + m_{j+1}^{-1}}} \left(0, \dots, 0, -\frac{1}{\sqrt{m_j}}, \frac{1}{\sqrt{m_{j+1}}}, 0, \dots, 0 \right), \quad 1 \leq j \leq N, \quad (1)$$

с ненулевыми компонентами только на позициях j и $j+1$. Направляющий вектор m прямой пересечения $\tilde{l}$ плоскостей $\tilde{\Pi}_j$ равен

$$m = (\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \dots, \sqrt{m_{N+1}}). \quad (2)$$

Заметим, что вектор m ортогонален n_j относительно $(\cdot, \cdot)$, $1 \leq j \leq N$. Введем обозначение $M = \|m\|^2$. Из (2) следует, что

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_{N+1}. \quad (3)$$

Обозначим через $\tilde{v}$ и $\tilde{v}'$ мгновенные скорости до и после столкновения точки $\tilde{M}$ с плоскостью $\tilde{\Pi}_j$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что удар точки $\tilde{M}$ о плоскость $\tilde{\Pi}_j$ абсолютно упругий, если выполнены следующие условия:

1. векторы $\tilde{v}, \tilde{v}'$ и n_j лежат в одной двумерной плоскости;
2. $\|\tilde{v}\| = \|\tilde{v}'\|$;
3. $(\tilde{v}, n_j) = -(\tilde{v}', n_j)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Точка $\tilde{M}$ подчиняется бильярдному закону в угле $\tilde{Q}$, если каждый ее удар является абсолютно упругим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Траектория точки $\tilde{M}(t)$ в угле $\tilde{Q}$ подчиняется бильярдному закону относительно $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{R}^{N+1}$.

Доказательство этого и более общего утверждения, относящегося к системе движущихся в пространстве упруго-взаимодействующих частиц, можно найти в [5], [7].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Предложение 1 можно сформулировать иначе: траектория точки $M(t)$ в угле Q подчиняется бильярдному закону относительно метрики, порожденной удвоенной кинетической энергией $2T = \sum_{i=1}^{N+1} m_i v_i^2$ частиц на прямой.

Таким образом, задача о движении $(N+1)$ -ой абсолютно упругой частицы на прямой свелась к изучению бильярдной траектории точки $\tilde{M}$ в N -гранном угле $\tilde{Q}$ в $\mathbb{R}^{N+1}$. Как будет показано далее, размерность бильярдной задачи можно понизить.

2.2. Бильярд в N -гранном угле в $\mathbb{R}^N$

Пусть p — полный импульс системы частиц на прямой. Рассмотрим аффинную плоскость $\Pi = \{\tilde{v} \in \mathbb{R}^{N+1} : (m, \tilde{v}) = p\}$. Так как импульс p системы сохраняется, то плоскость Π неподвижна в $\mathbb{R}^{N+1}$. Обозначим через $\hat{M}(t)$ ортогональную проекцию точки $\tilde{M}(t)$ на плоскость Π , то есть проекцию вдоль вектора m .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Траектория точки $\hat{M}(t)$ в угле $\hat{Q} = \tilde{Q} \cap \Pi$ подчиняется бильярдному закону относительно метрики, индуцированной из $\mathbb{R}^{N+1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем обозначать ортогональную проекцию вектора $\tilde{w} \in \mathbb{R}^{N+1}$ на Π через $\hat{w}$. Пусть, $\tilde{v}$ и $\tilde{v}'$ — скорости точки $\tilde{M}(t)$ до и после удара соответственно. Без ограничения общности можем считать, что удар точки $\tilde{M}$ пришелся о плоскость $\tilde{\Pi}_1$. Вектор m — нормаль к плоскости Π , поэтому

$$\hat{v} = \tilde{v} - \frac{p}{M} \cdot m, \quad \hat{v}' = \tilde{v}' - \frac{p}{M} \cdot m. \quad (4)$$

Теперь воспользуемся предложением 1: так как $\|\tilde{v}\| = \|\tilde{v}'\|$, то $\|\hat{v}\| = \|\hat{v}'\|$.

Вектор m ортогонален n_j , поэтому плоскость

$$\hat{\Pi}_j = \tilde{\Pi}_j \cap \Pi \quad (5)$$

ортогональна m и n_j , $1 \leq j \leq N$. Из предложения 1 имеем: $\tilde{v} - \tilde{v}' = \lambda \cdot n_1$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Используя (4), получаем $\hat{v} - \hat{v}' = \lambda \cdot n_1$, то есть вектора $\hat{v}, \hat{v}'$ и n_1 также лежат в одной двумерной плоскости, лежащей в Π .

Осталось доказать, что $(\hat{v}, n_1) = -(\hat{v}', n_1)$. Действительно, воспользуемся (4) и предложением 1:

$$(\hat{v}, n_1) = (\tilde{v} - \frac{p}{M} \cdot m, n_1) = (\tilde{v}, n_1) = -(\tilde{v}', n_1) = -(\tilde{v}' - \frac{p}{M} \cdot m, n_1) = -(\hat{v}', n_1).$$

□

Из предложения 2 следует, что бильярдная задача о движении точки $\tilde{M}$ в N -гранном угле $\tilde{Q} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ эквивалентна бильярдной задаче о движении точки $\hat{M}$ в N -гранном угле $\hat{Q} \subset \mathbb{R}^N$. Действительно, зная направление $\hat{v}$ движения точки $\hat{M}$ по формулам (4) восстанавливается направление $\tilde{v}$ движения точки $\tilde{M}$.

Таким образом, задача о движении абсолютно упругих частиц на прямой свелась к изучению бильярдной траектории точки $\hat{M}(t)$ в угле $\hat{Q}$. Угол $\hat{Q}$ ограничен плоскостями $\hat{\Pi}_j = \text{span}(m, n_j)^\perp$, $1 \leq j \leq N$. Знак $\perp$ означает ортогональное дополнение относительно стандартного евклидова произведения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Из определения (5) плоскости $\hat{\Pi}_j$ следует, что n_j — нормаль к $\hat{\Pi}_j$, поэтому угол между плоскостями $\hat{\Pi}_k$ и $\hat{\Pi}_s$ равен углу между плоскостями $\tilde{\Pi}_k$ и $\tilde{\Pi}_s$.*

Нам удалось понизить размерность бильярдной задачи за счет закона сохранения импульса. Оказывается, ее можно понизить еще на единицу.

2.3. Сведение к бильярду на сфере $\mathbb{S}^{N-1}$

Рассмотрим N -мерный N -гранный угол $\hat{Q}$ в $\mathbb{R}^N$. Из предложения 2 следует, что траектория точки $\hat{M}(t)$ в угле $\hat{Q}$ является бильярдной. Опишем сферу $\mathbb{S}^{N-1}$ радиуса 1 с центром в вершине O угла $\hat{Q}$. Тогда грани угла $\hat{Q}$ высекут на сфере некоторый $(N-1)$ -мерный сферический многогранник $\mathcal{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. *Если $N = 3$, то $\mathcal{A}$ — сферический треугольник. Длины его сторон равны плоским углам трехгранного угла $\hat{Q}$, а углы $\mathcal{A}$ равны соответствующим двугранным углам трехгранного угла $\hat{Q}$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Центральная проекция $M'(t)$ траектории точки $\hat{M}(t)$ на сферу $\mathbb{S}^{N-1}$ подчиняется бильярдному закону² в сферическом многограннике $\mathcal{A}$.*

Таким образом, точка M' движется по большим окружностям на $\mathbb{S}^{N-1}$, ударяясь о сферы $\hat{\Pi}_j \cap \mathbb{S}^{N-1} \cong \mathbb{S}_j^{N-2}$, $1 \leq j \leq N$. Векторы скорости $\check{v}$ и $\check{v}'$ точки M' до и после удара о сферу $\mathbb{S}_j^{N-2}$ в точке удара $M'(\tau)$ должны удовлетворять бильярдному закону (ср. с определением 1): векторы $\check{v}$, $\check{v}'$ и n_j лежат в одной двумерной плоскости; длины векторов $\check{v}$ и $\check{v}'$ равны; угол между $\check{v}$ и n_j равен углу между $\check{v}'$ и n_j .

Частный случай предложения 3 для $N = 3$ доказан в [7]. Общий случай доказывается аналогично.

Бильярдные задачи о движении точки $\hat{M}(t)$ в угле $\hat{Q}$ и точки $M'(t)$ в сферическом многоугольнике $\mathcal{A}$ не являются эквивалентными. Действительно, в дугу окружности на сфере $\mathbb{S}^{N-1}$ проецируется целая двумерная плоскость, поэтому по начальным данным $(M'(0), v'(0)) \in TS^{N-1}$ нельзя определить $(\hat{M}(0), \hat{v}(0)) \in \mathbb{R}^{2N}$. Однако в случае, когда нас интересуют траектории точки $\hat{M}$, соответствующие решению типа п. б. в., неопределенности нет: координаты точки $\hat{M}(0)$ определяются начальным расположением частиц, а вектор $\hat{v}(0)$ находится из первого условия пункта 2 леммы 2 (см. ниже).

Из предложения 3 следует, что исходная задача о поиске решений типа п. б. в. в системе абсолютно упругих частиц на прямой сводится к некоторой задаче о бильярде на сфере. Для случая $N = 3$ это сведение подробно описано в §4.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. *Длина проекции $M'(t)$ любой неограниченной (в обе стороны) бильярдной траектории $\hat{M}(t)$ на сферу $\mathbb{S}^{N-1}$ равна π .*

Для доказательства этого утверждения выпрямим траекторию точки $\hat{M}(t)$, последовательно отражая угол $\hat{Q}$ относительно тех граней, по которым происходит удар. Полученная прямая спроецируется в полуокружность на сфере $\mathbb{S}^{N-1}$, то есть ее длина равна π . С другой стороны, эта полуокружность — отраженная относительно граней многоугольника $\mathcal{A}$ траектория точки $M'(t)$ (последовательности отражений для угла $\hat{Q}$ и многоугольника $\mathcal{A}$ совпадают).

2.4. Геометрические леммы

В этом параграфе докажем несколько вспомогательных утверждений о геометрии конфигурационного пространства системы точек на прямой, а также свойствах бильярдной траектории точки $\hat{M}(t)$ в угле $\hat{Q}$.

ЛЕММА 1. *Пусть $\alpha_{k,s}$ — двугранные углы между плоскостями $\tilde{\Pi}_k$ и $\tilde{\Pi}_s$. Тогда $\alpha_{k,s} = \pi/2$ при $|k - s| > 1$, а углы $\alpha_k := \alpha_{k,k+1}$ при $1 \leq k \leq N - 1$ находятся из соотношений*

$$\cos \alpha_k = \sqrt{\frac{m_k m_{k+2}}{(m_k + m_{k+1})(m_{k+1} + m_{k+2})}}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как n_k и n_s — нормали к $\tilde{\Pi}_k$ и $\tilde{\Pi}_s$ соответственно, то угол $\alpha_{k,s}$ равен углу между векторами n_k и n_s . Из (1) следует, что $(n_k, n_s) = 0$ при $|k - s| > 1$, поэтому $\alpha_{k,s} = \pi/2$. Теперь рассмотрим две последовательные плоскости $\tilde{\Pi}_k$ и $\tilde{\Pi}_{k+1}$. Так как $\|n_k\| = \|n_{k+1}\| = 1$, то $\cos \alpha_k = (n_k, n_{k+1})$. Записывая это скалярное произведение и используя (1), получаем (6). $\square$

Согласно замечанию 2, аналогичное утверждение верно для двугранных углов между плоскостями $\hat{\Pi}_k$ и $\hat{\Pi}_s$.

Пусть $v(0) = (1, 0, \dots, 0)$ и $v(T) = (0, \dots, 0, 1)$ — начальная и конечная скорости конфигурационной точки $M(t)$. Здесь T — момент времени последнего столкновения частиц с массами

²Относительно скалярного произведения, индуцированного из $\mathbb{R}^N$.

m_N и m_{N+1} . Тогда $\tilde{v}(0) = \sqrt{m_1}v(0)$, а $\tilde{v}(T) = \sqrt{m_1}v(T)$ — начальная и конечная скорости точки $\hat{M}(t)$, а скорости $\hat{v}(0), \hat{v}(T)$ точки $\hat{M}(t)$ определяются с помощью (4) и $\tilde{v}(0), \tilde{v}(T)$. Определим двумерные пространства $\tilde{l}_k$ и одномерные пространства $\hat{l}_k$:

$$\tilde{l}_k = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \tilde{\Pi}_j, \quad \hat{l}_k = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \hat{\Pi}_j, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

ЛЕММА 2. 1) $\tilde{v}(0) \parallel \tilde{l}_1, \tilde{v}(T) \parallel \tilde{l}_N$; 2) $\hat{v}(0) \parallel \hat{l}_1, \hat{v}(T) \parallel \hat{l}_N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как $\tilde{v}(0) = (\sqrt{m_1}, 0, \dots, 0)$, то, используя (1), получаем, что $(\tilde{v}(0), n_j) = 0$ для $2 \leq j \leq N$. Таким образом, $\tilde{v}(0)$ параллелен плоскости $\tilde{l}_1$. Аналогично доказывается, что $\tilde{v}(T)$ параллелен плоскости $\tilde{l}_N$.

2) Согласно замечанию 2, вектор n_j является нормалью к плоскости $\hat{\Pi}_j$. Так как векторы $\hat{v}(0)$ и $\tilde{v}(0)$ связаны равенством (4), то $(\hat{v}(0), n_j) = 0$ при всех $2 \leq j \leq N$. Следовательно, $\hat{v}(0)$ параллелен прямой $\hat{l}_1$. Абсолютно аналогично доказывается, что вектор $\hat{v}(T)$ параллелен прямой $\hat{l}_N$. $\square$

Из леммы 2, в частности, следует, что последний удар точки $\hat{M}$ приходится о плоскость $\hat{\Pi}_N$. Это в свою очередь означает, что в решении типа п. б. в. последний удар всегда происходит между частицами $\#N$ и $\#(N+1)$.

ЛЕММА 3. Если $\hat{e}_k = (a_1, a_2, \dots, a_{N+1})$ — направляющий вектор прямой $\hat{l}_k$, а

$$M_k := m_1 + m_2 + \dots + m_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

то

$$a_s = \sqrt{\frac{(M - M_k)m_s}{MM_k}}, \quad 1 \leq s \leq k, \quad a_{s'} = -\sqrt{\frac{M_k m_{s'}}{M(M - M_k)}}, \quad k+1 \leq s' \leq N+1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\hat{l}_k$, при $j \neq k$ $\hat{l}_k \perp n_j$, поэтому $(\hat{e}_k, n_j) = 0$. Воспользовавшись (1), запишем эту систему уравнений в виде

$$\frac{a_j}{\sqrt{m_j}} - \frac{a_{j+1}}{\sqrt{m_{j+1}}} = 0, \quad j \neq k.$$

Пусть $a_k = \lambda\sqrt{m_k}$, $a_{N+1} = \mu\sqrt{m_{N+1}}$, $\lambda > 0$. Тогда

$$a_s = \lambda\sqrt{m_s}, \quad 1 \leq s \leq k, \quad a_{s'} = \mu\sqrt{m_{s'}}, \quad k+1 \leq s' \leq N+1. \quad (7)$$

Так как $\hat{l}_k \perp m$, то $(\hat{e}_k, m) = 0$. Записывая это равенство и используя (7), находим, что

$$\lambda M_k + \mu(M - M_k) = 0. \quad (8)$$

Подставляя (7) в условие нормировки $(\hat{e}_k, \hat{e}_k) = 1$, получаем

$$\lambda^2 M_k + \mu^2 (M - M_k) = 1. \quad (9)$$

Решая систему уравнений (8)-(9) относительно λ и μ , а затем подставляя их в (7), получаем требуемое. $\square$

ЛЕММА 4. Пусть $\beta_{p,q}$ — угол между прямыми $\hat{l}_p$ и $\hat{l}_q$, $1 \leq p < q \leq N$. Тогда

$$\cos \beta_{p,q} = \sqrt{\frac{M_p(M - M_q)}{M_q(M - M_p)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p < q$, то используя лемму 3, находим, что

$$\begin{aligned}
 (\hat{e}_p, \hat{e}_q) &= \sqrt{\frac{M - M_p}{MM_p}} \sqrt{\frac{M - M_q}{MM_q}} \sum_{s=1}^p m_s - \sqrt{\frac{M_p}{M(M - M_p)}} \sqrt{\frac{M - M_q}{MM_q}} \sum_{s=p+1}^q m_s + \\
 &+ \sqrt{\frac{M_p}{M(M - M_p)}} \sqrt{\frac{M_q}{M(M - M_q)}} \sum_{s=q+1}^{N+1} m_s = \frac{\sqrt{M_p(M - M_p)(M - M_q)}}{M\sqrt{M_q}} + \\
 &- \frac{\sqrt{M_p(M - M_q)}}{M\sqrt{M_q(M - M_p)}} (M_q - M_p) + \frac{\sqrt{M_p M_q (M - M_q)}}{M\sqrt{M - M_q}} = \\
 &= \sqrt{\frac{M_p(M - M_p)}{M_q(M - M_p)}} \frac{M - M_p + M_q}{M} - \sqrt{\frac{M_p(M - M_q)}{M_q(M - M_p)}} \frac{M_q - M_p}{M} = \\
 &= \sqrt{\frac{M_p(M - M_q)}{M_q(M - M_p)}}.
 \end{aligned}$$

Так как $\|\hat{e}_p\| = \|\hat{e}_q\| = 1$, то лемма 4 доказана. $\square$

ЛЕММА 5. Пусть φ_k — угол между $\hat{l}_k$ и $\hat{\Pi}_k$. Тогда

$$\sin \varphi_k = \sqrt{\frac{M m_k m_{k+1}}{M_k(M - M_k)(m_k + m_{k+1})}}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3, замечания 2 и (1) находим

$$\sqrt{m_k^{-1} + m_{k+1}^{-1}} \cdot (\hat{e}_k, n_k) = \sqrt{\frac{M - M_k}{MM_k}} + \sqrt{\frac{M_k}{M(M - M_k)}} = \sqrt{\frac{M}{M_k(M - M_k)}}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Так как $\|\hat{e}_k\| = \|n_k\| = 1$ и угол между $\hat{l}_k$ и n_k равен $\pi/2 - \varphi_k$, то получаем требуемое. $\square$

3. Случай $N = 2$

3.1. Соотношения на массы

Пусть на прямой последовательно располагаются три абсолютно упругих частицы с массами m_1, m_2 и $m_3 = m_1$. Очевидно, что решение типа п. б. в. для трех частиц может существовать только в том случае, когда полное число ударов κ в системе чётно.

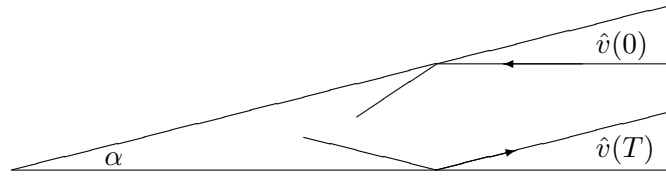
ТЕОРЕМА 1. В системе трёх частиц на прямой с массами m_1, m_2 и m_1 соответственно существует решение типа бегущей волны с числом ударов $\kappa \in 2\mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} = \cos \frac{\pi}{\kappa + 1}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись предложением 2, сведём изучение динамики точек на прямой к исследованию движения точки $\hat{M}(t)$ в плоском угле $\hat{Q}$ с раствором α и вершиной O (см. рис. 2). Стороны угла $\hat{Q}$ обозначим, как и в лемме 2, через $\hat{l}_1$ и $\hat{l}_2$.

Из леммы 1 и замечания 2 следует, что

$$\cos \alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (11)$$

Рис. 2: угол $\hat{Q}$.

Теперь найдем угол α иначе. Построим развертку угла $\hat{Q}$ вместе с бильярдной траекторией точки $\hat{M}(t)$ внутри него. Для этого отразим угол относительно его сторон и рассмотрим образ траектории при этих отражениях. Образ траектории представляет собой прямую $\hat{l}$, которая пересекается с каждым из отраженных углов.

Нас интересуют решения типа п. б. в., поэтому в начальный и конечный моменты времени скорости частиц на прямой такие: $v_1(0) = 1$, $v_2(0) = 0$, $v_3(0) = 0$ и $v_1(T) = 0$, $v_2(T) = 0$, $v_3(T) = 1$, где T — момент последнего столкновения частиц #2 и #3. Из леммы 2 следует, что векторы $\hat{v}(0)$ и $\hat{v}(T)$ параллельны сторонам угла $\hat{Q}$. Таким образом, прямая $\hat{l}$ параллельна стороне $\hat{l}_1$ угла $\hat{Q}$ (см. рис. 3).

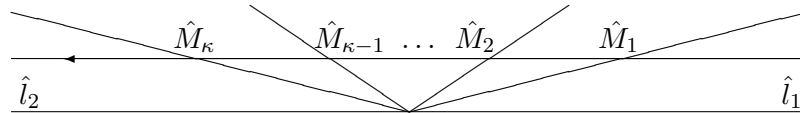


Рис. 3: выпрямление траектории.

Так как первый удар точки $\hat{M}(t)$ приходится о прямую $\hat{l}_2$, а последний — о прямую $\hat{l}_1$, то образ $\hat{l}_2$ под действием отражений совпадает с продолжением прямой $\hat{l}_1$. Это возможно только тогда, когда число копий угла $\hat{Q}$ нечетно. Заметим, что число копий угла $\hat{Q}$ на 1 больше числа отражений траектории $\hat{M}(t)$ от сторон исходного угла, что в свою очередь равно числу ударов κ между частицами на прямой, поэтому $(\kappa+1)\alpha = \pi$ и $\kappa \in 2\mathbb{N}$. Из этого и равенства (11) следует (10). $\square$

Таким образом, теорема 1 отвечает на вопрос **B1** введения для случая, когда на прямой расположено бесконечно много частиц с периодически повторяющимися массами m_1 и m_2 . В частности, из теоремы 1 получаем следствие: $m_2/m_1 = O(1/\kappa^2)$ при $\kappa \rightarrow \infty$.

Заметим, что при подстановке в формулу (10) $\kappa = 2$ получаем, что $m_1 = m_2$. В этом случае существование решения типа бегущей волны очевидно.

Если $\kappa > 2$, то из (10) следует, что $m_1 > m_2$. Действительно, используя (10), находим, что

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{1 - \cos \alpha} - 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{\kappa + 1}, \quad \kappa \in 2\mathbb{N}.$$

При $\kappa > 2$ угол $\alpha < \pi/3$, поэтому $\cos \alpha > 1/2$, то есть $m_1/m_2 > 1$.

Пусть $\hat{M}_1, \hat{M}_2, \dots, \hat{M}_\kappa$ — последовательные точки пересечения прямой $\hat{l}$ со сторонами отраженных углов (см. рис. 3). Заметим, что $\angle \hat{M}_j \hat{O} \hat{M}_{\kappa+1-j} = \pi - 2\pi j/(\kappa + 1)$, $j = 1, 2, \dots, \kappa/2$. Непосредственно из приведенного нами доказательства теоремы 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. $\triangle \hat{M}_j \hat{O} \hat{M}_{\kappa+1-j}$ — равнобедренный ($\|\hat{O} \hat{M}_j\| = \|\hat{O} \hat{M}_{\kappa+1-j}\|$), с углами при основании, равными $\pi j/(\kappa + 1)$, $j = 1, 2, \dots, \kappa/2$.

3.2. Соотношения на расстояние

Для случая трех частиц на прямой удастся явно найти расстояние S , которое пройдет частица #3 с момента первого столкновения до момента последнего столкновения с частицей #2. Очевидно, что S не зависит от начального расстояния ρ_1 между частицами #1 и #2, а зависит только лишь от начального расстояния ρ_2 между частицами #2, #3 и отношения масс частиц.

ТЕОРЕМА 2. Если массы m_1 и m_2 удовлетворяют равенству (10), то

$$S = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \rho_2. \quad (12)$$

Из теорем 1 и 2 следует, что в системах из бесконечного числа абсолютно упругих частиц на прямой, массы которых чередуются и удовлетворяют соотношению (10), существуют решения типа п. б. в.

Действительно, если расположить частицы, массы которых связаны равенством (10), так, чтобы начальные расстояния между двумя последовательными частицами с массами m_1 и m_2 были больше S из (12), а между частицами с массами m_2 и m_1 не больше ρ_2 , то каждая группа последовательных частиц с массами m_1, m_2 и m_1 за κ ударов полностью передает энергию следующей группе частиц. В частности, все частицы можем расположить на одинаковом расстоянии друг от друга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можем считать, что $t = 0$ соответствует моменту первого столкновения частиц #1 и #2. Пусть T — момент последнего столкновения частиц #2 и #3, а S_c — расстояние, пройденное центром масс C системы трех точек за время T . Обозначим через $\rho_2(0)$ и $\rho_2(T)$ расстояния между частицами #2, #3 и частицами #1, #2 в моменты времени $t = 0$ и $t = T$ соответственно, а через $d_c(0)$ и $d_c(T)$ — расстояния между частицей #1 и центром масс и центром масс и частицей #3 при $t = 0$ и $t = T$ (см. рис. 4). Скорость центра масс обозначим через v_c .



Рис. 4: положение частиц в момент времени $t = 0$ и $t = T$.

Так как на систему частиц внешние силы не действуют, то центр масс движется равномерно и прямолинейно. Из закона сохранения импульса и начальных условий на скорости частиц ($v_1(0) = 1, v_2(0) = 0, v_3(0) = 0$) следует, что

$$v_c = \frac{m_1}{2m_1 + m_2}, \quad S_c = \frac{m_1 T}{2m_1 + m_2}. \quad (13)$$

Из определения центра масс находим, что

$$d_c(0) = \frac{m_1 \rho_2(0)}{2m_1 + m_2}, \quad d_c(T) = \frac{m_1 \rho_2(T)}{2m_1 + m_2}. \quad (14)$$

Заметим, что $S = S_c + d_c(0) + d_c(T) - \rho_2(0)$ (см. рис. 4). Подставим (13)-(14) в это выражение:

$$S = \frac{m_1 T + m_1 \rho_2(T) - (m_1 + m_2) \rho_2(0)}{2m_1 + m_2}. \quad (15)$$

Дальнейшая часть доказательства посвящена вычислению T и $\rho_2(T)$. Для этого, воспользовавшись предложением 1, сведем изучение динамики частиц на прямой к рассмотрению бильярдного движения точки $\tilde{M}(t)$. Заметим, что точка $\tilde{M}(t)$ движется с постоянной по модулю скоростью $\|\tilde{v}\| = \sqrt{m_1}$ в угле $\tilde{Q}$. Таким образом, время T равно длине $\tilde{L}$ ломаной $\tilde{M}_1\tilde{M}_2 \dots \tilde{M}_\kappa$, деленной на $\sqrt{m_1}$. Здесь, как и раньше, $\{\tilde{M}_k\}$ — последовательные точки удара точки $\tilde{M}(t)$ об угол $\tilde{Q}$, а $\kappa \in 2\mathbb{N}$ — число ударов в системе.

Подставляя $M_1 = m_1, M_2 = m_1 + m_2$ и $M = 2m_1 + m_2$ в равенства леммы 3, получаем формулы для направляющих векторов $\hat{e}_1$ и $\hat{e}_2$ прямых $\hat{l}_1$ и $\hat{l}_2$ соответственно:

$$\hat{e}_1 = \left(-\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2m_1 + m_2}}, \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)(2m_1 + m_2)}}, \frac{m_1}{\sqrt{(m_1 + m_2)(2m_1 + m_2)}} \right), \quad (16)$$

$$\hat{e}_2 = \left(-\frac{m_1}{\sqrt{(m_1 + m_2)(2m_1 + m_2)}}, -\sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)(2m_1 + m_2)}}, \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2m_1 + m_2}} \right). \quad (17)$$

Теперь рассмотрим бильярдную траекторию точки $\hat{M}(t)$ в угле $\hat{Q}$. Его стороны параллельны векторам $\hat{e}_1$ и $\hat{e}_2$. Точкам $\{\tilde{M}_k\}$ на границе $\tilde{Q}$ соответствуют точки $\{\hat{M}_k\}$ на границе $\hat{Q}$. Так как $\hat{M}_k$ — ортогональная проекция $\tilde{M}_k$ на плоскость Π с вектором нормали m , то длины $\hat{L}, \tilde{L}$ ломаных $\hat{M}_1\hat{M}_2 \dots \hat{M}_\kappa$ и $\tilde{M}_1\tilde{M}_2 \dots \tilde{M}_\kappa$ связаны равенством

$$\hat{L} = \tilde{L} \sin \gamma, \quad (18)$$

где γ — угол между m и $\tilde{v} = (\sqrt{m_1}, 0, 0)$. Так как $(\tilde{v}, m) = m_1, \|\tilde{v}\| = \sqrt{m_1}, \|m\| = \sqrt{2m_1 + m_2}$, то

$$\cos \gamma = \sqrt{\frac{m_1}{2m_1 + m_2}}, \quad \sin \gamma = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2m_1 + m_2}}. \quad (19)$$

Заметим, что $OM_1 = (0, 0, \rho_2(0))$, поэтому

$$O\tilde{M}_1 = (0, 0, \rho_2(0)\sqrt{m_1}). \quad (20)$$

Таким образом, используя (17), имеем

$$\|O\hat{M}_1\| = (O\tilde{M}_1, \hat{e}_2) = \rho_2(0)\sqrt{\frac{m_1(m_1 + m_2)}{2m_1 + m_2}}. \quad (21)$$

Для подсчета длины $\hat{L}$ ломаной $\hat{M}_1\hat{M}_2 \dots \hat{M}_\kappa$ отразим угол $\hat{Q}$ относительно его сторон. Образ траектории $\hat{M}(t)$ при таких отражениях будет являться прямой, последовательно проходящей через образы точек $\{\hat{M}_k\}$ (см. рис. 3). Сохраним для них те же обозначения.

По следствию 1, $\triangle \hat{M}_1 O \hat{M}_\kappa$ — равнобедренный:

$$\angle \hat{M}_1 O \hat{M}_\kappa = (\kappa - 1)\alpha, \quad \angle O \hat{M}_1 \hat{M}_\kappa = \angle O \hat{M}_\kappa \hat{M}_1 = \alpha, \quad \alpha = \pi/(\kappa + 1).$$

По теореме синусов для $\triangle \hat{M}_1 O \hat{M}_\kappa$, имеем

$$\|\hat{M}_1 \hat{M}_\kappa\| = \|O \hat{M}_1\| \cdot \frac{\sin(\kappa - 1)\alpha}{\sin \alpha}.$$

Так как

$$\frac{\sin(\kappa - 1)\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\frac{\pi(\kappa-1)}{\kappa+1})}{\sin(\frac{\pi}{\kappa+1})} = \frac{\sin(\pi - \frac{2\pi}{\kappa+1})}{\sin(\frac{\pi}{\kappa+1})} = 2 \cos \frac{\pi}{\kappa + 1},$$

то

$$\hat{L} = \|\hat{M}_1 \hat{M}_\kappa\| = 2\|O \hat{M}_1\| \cos \alpha. \quad (22)$$

Окончательно, используя (18)-(22) и (10), имеем

$$T = \frac{\tilde{L}}{\sqrt{m_1}} = \frac{\hat{L}}{\sqrt{m_1} \sin \gamma} = \frac{2\|\hat{O}\hat{M}_1\| \cos \alpha}{\sqrt{m_1} \sin \gamma} = \frac{2\rho_2(0)m_1}{m_1 + m_2}. \quad (23)$$

Воспользовавшись теоремой 3, подставим $\rho_2(T) = \rho_2(0)$ и (23) в (15):

$$\begin{aligned} S &= \frac{2m_1^2}{(m_1 + m_2)(2m_1 + m_2)} \rho_2(0) - \frac{m_2}{2m_1 + m_2} \rho_2(0) = \frac{2m_1^2 - m_1m_2 - m_2^2}{(m_1 + m_2)(2m_1 + m_2)} \rho_2(0) = \\ &= \frac{2m_1(m_1 - m_2) + m_2(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)(2m_1 + m_2)} \rho_2(0) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \rho_2(0). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана. $\square$

3.3. Симметрия ударов

Пусть $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{\kappa-1} < t_\kappa = T$ — последовательные моменты времени, соответствующие ударам частиц на прямой, $\kappa \in 2\mathbb{N}$ — число ударов. Моменты $t_1, t_3, \dots, t_{\kappa-1}$ соответствуют ударам частиц #1 и #2, а $t_2, t_4, \dots, t_\kappa$ — ударам частиц #2 и #3. Обозначим через $\rho(t_j) > 0$ — расстояние в момент времени t_j между частицами #1 и #2 при четном j и между #2 и #3 при нечетном j , $j = 1, 2, \dots, \kappa$.

Если $N = 2$, то массы m_1 и m_2 чередуются. Геометрическим отражением этого факта, в частности, является следствие 1. Так как исходная динамическая система обратима, а массы крайних частиц равны, то последовательность расстояний $\{\rho(t_j)\}_{j=1}^\kappa$ между частицами в моменты ударов является симметричной.

ТЕОРЕМА 3. $\rho(t_j) = \rho(t_{\kappa+1-j})$ при $j = 1, 2, \dots, \kappa/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся обозначениями, введенными в доказательстве теоремы 2. Предположим, что j нечетно. Случай четного j рассматривается аналогично. Без ограничения общности можем считать, что $x_1(0) = x_2(0) = 0$. Тогда

$$x_1(t_j) = x_2(t_j), \quad x_3(t_j) = x_2(t_j) + \rho(t_j),$$

поэтому

$$\tilde{O}\tilde{M}_j = x_1(t_j)m + (0, 0, \sqrt{m_1}\rho(t_j)). \quad (24)$$

В момент времени $t_{\kappa+1-j}$ имеем:

$$x_1(t_{\kappa+1-j}) = x_2(t_{\kappa+1-j}) - \rho(t_{\kappa+1-j}), \quad x_2(t_{\kappa+1-j}) = x_3(t_{\kappa+1-j}).$$

Таким образом,

$$\tilde{O}\tilde{M}_{\kappa+1-j} = x_2(t_{\kappa+1-j})m - (\sqrt{m_1}\rho(t_{\kappa+1-j}), 0, 0). \quad (25)$$

Из следствия 1, $\|\hat{O}\hat{M}_j\| = \|\hat{O}\hat{M}_{\kappa+1-j}\|$, поэтому $(\hat{e}_2, \tilde{O}\tilde{M}_j) = (\hat{e}_1, \tilde{O}\tilde{M}_{\kappa+1-j})$. Записывая это равенство и используя (16)-(17) и (24)-(25), а также условия ортогональности векторов $\hat{e}_1$ и $\hat{e}_2$ вектору m , получаем, что $\rho(t_j) = \rho(t_{\kappa+1-j})$. $\square$

В качестве следствия теоремы 3 и обратимости рассматриваемой системы получаем, что последовательность промежутков времени между двумя последовательными ударами является симметричной: $t_{j+1} - t_j = t_{\kappa+1-j} - t_{\kappa-j}$. Поэтому, складывая первые j равенств, получим $t_{j+1} = T - t_{\kappa-j}$, $0 \leq j \leq \kappa - 1$.

4. Случай $N = 3$

4.1. Коды траекторий

Пусть на прямой последовательно расположены четыре абсолютно упругие частицы с массами m_1, m_2, m_3 и $m_4 = m_1$. Используя предложение 3, сведем изучение динамики частиц на прямой к изучению бильярдной траектории точки M' в треугольнике $\mathcal{A} = \Delta ABC$ на сфере $\mathbb{S}^2$ единичного радиуса с центром в точке O . Будем считать, что дуги AC, AB и BC соответствуют пересечениям сферы $\mathbb{S}^2$ с плоскостями $\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2, \hat{\Pi}_3$ и лежат на больших окружностях ω_1, ω_2 и ω_3 соответственно. Далее для краткости используем следующие обозначения: $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$, длины сторон BC, AC, AB равны a, b и c соответственно. Из замечания 3 и леммы 1 следует, что $\gamma = \pi/2$, углы α и β определяются с помощью формул (6), а a, b, c определяются из леммы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из (6) следует, что $\alpha = \beta$ тогда и только тогда, когда $m_2 = m_3$. Углы α и β при всех значениях m_1, m_2 и m_3 являются острыми.

В силу леммы 2, неограниченная траектория³ точки $\hat{M}$ в $\mathbb{R}^3$ при проекции на $\mathbb{S}^2$ даст сферическую ломаную Γ , вписанную в треугольник $\mathcal{A}$, начинающуюся в вершине B и заканчивающуюся в вершине A — траекторию точки M' (см. рис. 5). Из замечания 4 следует, что длина Γ равна π . Обозначим через φ_- и φ_+ углы наклона первого и последнего звена ломаной Γ к AB .

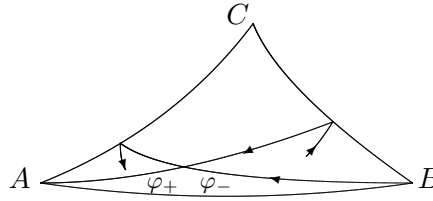


Рис. 5: сферический треугольник $\mathcal{A}$.

Будем двигаться вдоль Γ и записывать последовательность соударений в виде слова: в начальный момент времени мы имеем пустое слово; если удар произошел о сторону $i \in \{a, b, c\}$, то справа дописываем букву i . Таким образом, каждой траектории точки M' соответствует некоторое слово $w = i_1 i_2 \dots i_\kappa$, $i_s \in \{a, b, c\}$, $1 \leq s \leq \kappa$, где κ — число ударов в системе четырех частиц на прямой.

Нас интересуют решения типа п. б. в., поэтому структура множества возможных слов w не может быть произвольной. В частности, всегда $i_1 = b, i_2 = c, i_\kappa = a$ и любые две соседние буквы слова w различны. Из физических соображений следует, что в w не может быть участков bab и aba , которые соответствуют последовательным сериям ударов частиц #1 и #2, #3 и #4, #1 и #2 в случае bab и #3 и #4, #1 и #2, #3 и #4 в случае aba . Далее будут сформулированы достаточные условия на множество $W(\kappa)$ слов длины κ , которые кодируют траектории точки M' , соответствующие решениям типа бегущих волн.

Обозначим через $R_i : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ отражение относительно большого круга, граница которого содержит дугу $i \subset \mathbb{S}^2$. По каждому слову $w = i_1 i_2 \dots i_\kappa$ определим последовательность треугольников: $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_s = R_{i_s} \mathcal{A}_{s-1}$, $1 \leq s \leq \kappa$.

После κ отражений траектория точки M' «выпрямится», то есть станет половиной большой окружности, начинающейся в точке B и заканчивающейся в диаметрально противоположной

³В терминах частиц на прямой это означает, что частица #1 начинает движение из $-\infty$, а частица #4 заканчивает движение на $+\infty$.

точке $B^* \in \omega_2 \cap \omega_3$. Обозначим получившуюся дугу также через Γ . Из замечаний, сделанных выше, следует, что образ точки A после всех отражений должен совпасть с B^* .

4.2. Достаточные условия

В этом разделе рассматриваются частные случаи треугольников, для которых удается доказать существование описанной выше бильярдной траектории Γ .

I. СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ КОКСТЕРА

Предположим, что исходный сферический треугольник $\mathcal{A}$ является треугольником Кокстера. Тогда известно (см. [3]), что тройка его углов совпадает с одной из следующих

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{k}\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k > 1.$$

Из замечания 5 следует, что бесконечная серия в нашем случае не реализуется. Легко убедиться, что вторая и третья тройки нам также не подходят: в обоих случаях B^* совпадает с образом точки B под действием соответствующих отражений, а не с образом точки A .

Первая тройка подходит. Действительно, слово $w = bca$ задает соответствующую последовательность отражений. В этом случае массы всех частиц равны. Таким образом, треугольники Кокстера никаких решений, кроме тривиального, не дают.

II. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО РЕШЕНИЙ

Рассмотрим отражения треугольника $\mathcal{A}$, заданные словами $w = (bc)^n a$, $n \in \mathbb{N}$. Несложно заметить (см. рис. 6), что, если вершина A под действием отображения $R_a \circ (R_c \circ R_b)^n$ совпадает с B^* , то

$$(2n+1)\alpha = \pi, \quad c + 2b = \pi, \quad \varphi_- = \varphi_+, \quad \kappa = 2n.$$

Из второго равенства имеем $\cos c = 1 - 2\cos^2 b$. Подставляя выражения для $\cos c$ и $\cos b$ из леммы 4, получаем⁴, что $m_1 = m_3$. Используя это и формулу (6) для угла $\alpha = \pi/(2n+1)$, находим, что массы m_1 и m_2 связаны соотношением (11).

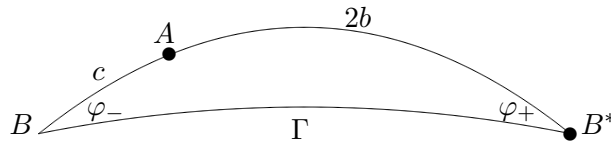


Рис. 6: отражения $\mathcal{A}$, соответствующие слову $w = (bc)^n a$.

Этот результат уже был получен нами ранее при рассмотрении трех частиц на прямой (см. §3). Естественно, аналогичный результат справедлив, если рассмотреть отражения, заданные словами $w = b(ca)^n$, $n \in \mathbb{N}$: в этом случае $m_1 = m_2$, а m_1 и m_3 связаны равенством (11).

III. ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО РЕШЕНИЙ

Рассмотрим последовательность отражений треугольника $\mathcal{A}$, которая задается словом $w = (bc)^p a (bc)^q a$, $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Тогда $\kappa = 2p + 2q + 2$. Далее мы ищем такие натуральные p и q , для которых соответствующее слово w кодирует бегущую волну в системе частиц с массами m_1, m_2 и m_3 .

Предположим, что w кодирует решение типа п. б. в. Совершая $2p$ отражений, соответствующих слову $(bc)^p$, получим $2p + 1$ копий $\{\mathcal{A}_s\}_{s=0}^{2p}$ треугольника $\mathcal{A}$ с общей вершиной A . Обозначим вершины треугольника $\mathcal{A}_{2p}$ через A, B' и C' . Следующее отражение происходит

⁴В обозначениях леммы 4, $c = \beta_{1,3}$, $b = \beta_{2,3}$.

относительно стороны a : так как $\angle C' = \pi/2$, то сторона $C'A'$ получившегося при этом отражении треугольника $\mathcal{A}_{2p+1}$ является продолжением стороны AC' треугольника $\mathcal{A}_{2p}$. Совершая $2q$ отражений треугольника $\mathcal{A}_{2p+1}$, соответствующих слову $(bc)^q$, получим треугольники $\mathcal{A}_{2p+2}, \dots, \mathcal{A}_{\kappa-1}$ с общей вершиной A' . Обозначим вершины треугольника $\mathcal{A}_{\kappa-1}$ через A', B'' и C'' . Отражая $\mathcal{A}_{\kappa-1}$ относительно стороны a , получим треугольник $\mathcal{A}_{\kappa}$ с вершинами A'', B'' и C'' . Так как w кодирует п. б. в., то A'' совпадает с B^* . При этом, так как $\angle C'' = \pi/2$, то сторона $C''A''$ является продолжением $A'C''$.

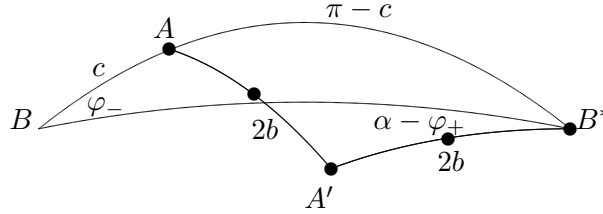


Рис. 7: отражения $\mathcal{A}$, соответствующие слову $w = (bc)^p a (bc)^q a$.

Сотрем треугольники $\{\mathcal{A}_s\}_{s=0}^{\kappa}$, оставляя лишь стороны $AB, AC', C'A', A'C'', C''A''$, проведем Γ — дугу BB^* , а также соединим дугой большого круга точки A и B^* . На рисунке 7 изображено то, что будет на сфере после этого. Заметим, что

$$\smile AA' = \smile A'B^* = 2b, \quad \smile AB = c, \quad \smile BB^* = \pi \quad (26)$$

$$\angle BAA' = (2p+1)\alpha, \quad \angle AA'B^* = 2q\alpha, \quad \angle ABB^* = \varphi_-, \quad \angle BB^*A' = \alpha - \varphi_+.$$

Так как $\triangle AA'B^*$ — равнобедренный, то $\varphi_- - \varphi_+ = \pi - 2(p+1)\alpha$. Записывая теоремы синусов и косинусов для $\triangle AA'B^*$ и пользуясь (26), получаем

$$\sin(2p+1)\alpha = \frac{\sin 2q\alpha \sin 2b}{\sin c}, \quad \sin^2(2p+1)\alpha = \frac{1 + \cos 2q\alpha}{1 - \cos c}. \quad (27)$$

Выражения в правых частях определены, так как $c \neq 0, \pi$, иначе $\triangle ABC$ вырождается в отрезок или двуугольник. Отметим также, что $\cos 2q\alpha \neq -1$, так как в противном случае $2q\alpha = \pi$, то есть A' лежит на дуге AB^* . Тогда $(2p+1)\alpha = \pi$, и поэтому $2q\alpha = (2p+1)\alpha$, но это уравнение не имеет решений в целых числах p и q для $\alpha > 0$.

Возводя первое уравнение (27) в квадрат и приравнявая его со вторым уравнением, производя простые преобразования, пользуясь тригонометрическими формулами и сокращая на $(1 + \cos 2q\alpha)/(1 - \cos c)$, имеем

$$\sin^2 q\alpha = \frac{\cos^2 \frac{c}{2}}{\sin^2 2b}. \quad (28)$$

Подставляя (28) во второе уравнение (27), получаем

$$\sin^2(2p+1)\alpha = \frac{\sin^2 2b - \cos^2 \frac{c}{2}}{\sin^2 2b \sin^2 \frac{c}{2}}. \quad (29)$$

Добавим к уравнениям (28)-(29) следствие теорем косинусов и синусов для треугольника $\triangle ABC$:

$$\cos^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 b \operatorname{ctg}^2 c. \quad (30)$$

Таким образом, при фиксированных $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ система уравнений (28)-(30) замкнута относительно α, b и c . Разрешая уравнения (28)-(29) относительно $\cos 2b$ и $\sin \frac{c}{2}$, а также опуская простые вычисления, получаем, что

$$\cos^2 2b = \operatorname{ctg}^2(2p+1)\alpha \operatorname{ctg}^2 q\alpha, \quad \sin^2 \frac{c}{2} = \frac{\cos^2 q\alpha}{\sin^2(2p+1)\alpha}. \quad (31)$$

Подставляя уравнения (31) в (30), получим уравнение, которому должен удовлетворять угол α . Здесь мы это уравнение не приводим в силу громоздкости. Если у получившегося уравнения есть решение $\alpha = \alpha(p, q)$, то после подстановки в (31) находим оставшиеся параметры, определяющие ΔABC .

Отметим, что у системы (28)-(30) есть решение при $p = q = 1$: $\alpha = \pi/6$, $b = \pi/4$, $c = 2\pi/3$. Оно соответствует случаю, когда $m_2 = m_3 = (\sqrt{5} - 2)m_1$, а $\kappa = 6$.

Численный счет показывает, что при $p = 1, q = 2$ у системы (28)-(29) также есть решение. В этом случае $0.109 < m_2/m_1 < 0.111$, $0.383 < m_3/m_1 < 0.385$, а $\kappa = 8$.

Гипотеза. Для любого $\kappa \in 2\mathbb{N}, \kappa > 4$ найдется пара $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $2p + 2q + 2 = \kappa$, при которой система уравнений (28)-(30) имеет решение $0 < \alpha < \pi/2, 0 < b \leq \pi/4, 0 < c < \pi$.

Из физических соображений следует, что если система уравнений (28)-(30) имеет решение для пары (p, q) , то тогда система, которая получена из исходной заменой p на q , а q на p также должна иметь решение (вообще говоря, другое): это решение соответствует системе частиц на прямой, отличающейся от первоначальной системы взаимной заменой частиц #2 и #3.

Гипотеза. Любое решение $0 < \alpha < \pi/2, 0 < b \leq \pi/4, 0 < c < \pi$ уравнений (28)-(30) соответствует некоторой системе частиц на прямой с массами m_1, m_2, m_3 ($m_2, m_3 < m_1$), для которой существует решение типа п. б. в.

5. Оценка пройденных расстояний

Оценим пройденные расстояния каждой из частиц группы в случае произвольного $N > 2$, если система частиц допускает решение типа п. б. в. В частности, получим оценку сверху на расстояние, пройденное частицей $\#(N+1)$.

Пусть момент времени $t = 0$ соответствует первому столкновению частиц в системе, а момент времени $t = T$ — последнему. Обозначим через $R_k = \rho_2 + \rho_3 + \dots + \rho_{k-1}$ расстояние между частицами #2 и #k, $3 \leq k \leq N+1$ при $t = 0$, а через $S_j = x_j(T) - x_j(0)$ — расстояние, пройденное частицей #j за время T , $1 \leq j \leq N+1$. Введем обозначения: $m_* = \min\{m_2, m_N\}$, $m_{\max} = \max_{1 \leq j \leq N} \{m_j\}$.

ТЕОРЕМА 4. Для решения типа п. б. в. в системе частиц с массами $\{m_j\}_{j=1}^{N+1}$, $N > 2$ выполнены неравенства

$$S_j < 2(N-2)R_{N+1} \sqrt{\frac{m_1 m_{\max}(M - m_1 - m_*)}{m_j m_*(M - m_1)}}, \quad 1 \leq j \leq N+1. \quad (32)$$

Таким образом, если в системе из $(N+1)$ -ой частицы существует решение типа п. б. в., то в соответствующей системе из бесконечного числа частиц оно тоже существует. Действительно, если группы частиц расположить на одинаковом друг от друга расстоянии, равном $2(N-2)R_{N+1}m_{\max}/m_{\min}$, то, какая бы ни была последовательность ударов частиц внутри группы, полная энергия группы успеет полностью передаться последней частице этой же группы до столкновения с 1-ой частицей следующей группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись предложением 1, сведем изучение динамики частиц на прямой к рассмотрению бильярдной траектории точки $\tilde{M}$ в угле $\tilde{Q}$. Последовательные точки удара бильярдной траектории о грани угла $\tilde{Q}$ обозначим, как в доказательстве теоремы 2, через $\{\tilde{M}_s\}_{s=1}^\kappa$, где κ — число ударов в системе частиц на прямой.

Без ограничения общности будем считать, что первая точка столкновения частиц #1 и #2 совпадает с точкой $x = 0$. В этом случае

$$O\tilde{M}_1 = (0, 0, \sqrt{m_3}R_3, \sqrt{m_4}R_4, \dots, \sqrt{m_{N+1}}R_{N+1}), \quad (33)$$

$$O\tilde{M}_\kappa = O\tilde{M}_1 + (\sqrt{m_1}S_1, \sqrt{m_2}S_2, \dots, \sqrt{m_{N+1}}S_{N+1}),$$

поэтому

$$\tilde{M}_1\tilde{M}_\kappa = (\sqrt{m_1}S_1, \sqrt{m_2}S_2, \dots, \sqrt{m_{N+1}}S_{N+1}), \quad \|\tilde{M}_1\tilde{M}_\kappa\|^2 = \sum_{j=1}^{N+1} m_j S_j^2. \quad (34)$$

Обозначая через $\hat{M}_s$ проекцию точки $\tilde{M}_s$ на плоскость Π с вектором нормали m , получаем, что длины $\hat{L}, \tilde{L}$ ломаных $\hat{M}_1\hat{M}_2\dots\hat{M}_\kappa$ и $\tilde{M}_1\tilde{M}_2\dots\tilde{M}_\kappa$ связаны равенством

$$\hat{L} = \tilde{L} \cos(\pi/2 - \gamma), \quad \cos \gamma = \sqrt{\frac{m_1}{M}}, \quad (35)$$

где γ — угол между векторами m и $\tilde{v} = (\sqrt{m_1}, 0, \dots, 0)$, а M определено в (3). Дальнейшая часть доказательства посвящена оценке длины $\hat{L}$.

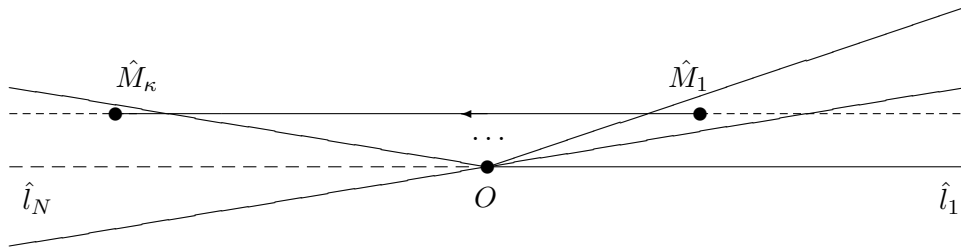


Рис. 8: выпрямление траектории в $\mathbb{R}^N$.

Согласно предложению 2, траектория точки $\hat{M}$ в угле $\hat{Q}$ является бильярдной. Выпрямим ломаную $\hat{M}_1\hat{M}_2\dots\hat{M}_\kappa$, последовательно отражая угол $\hat{Q}$ относительно тех граней, по которым происходит удар. Из леммы 2 следует, что выпрямленная траектория параллельна $\hat{l}_1$ и $\hat{l}_N$, поэтому образ $\hat{l}_N$ под действием соответствующих отражений совпадет с $\hat{l}_1$ (см. рис. 8).

Вычислим расстояние d от точки $\hat{M}_1$ до прямой $\hat{l}_1$ по формуле

$$d^2 = \|O\hat{M}_1\|^2 - \left(O\hat{M}_1, \frac{\hat{v}}{\|\hat{v}\|}\right)^2. \quad (36)$$

Так как

$$O\hat{M}_1 = O\tilde{M}_1 - \left(O\tilde{M}_1, m\right) \frac{m}{M}, \quad \hat{v} = \tilde{v} - m_1 \frac{m}{M},$$

то, используя (33), получаем, что

$$\|O\hat{M}_1\|^2 = \frac{1}{M^2} \sum_{k=3}^{N+1} m_k (M - m_k)^2 R_k^2, \quad \|\hat{v}\|^2 = \frac{m_1 (M - m_1)}{M}, \quad (37)$$

$$(O\hat{M}_1, \hat{v}) = -\frac{m_1}{M^2} \sum_{k=3}^{N+1} m_k(M - m_k)R_k. \quad (38)$$

Подставим (37) и (38) в (36):

$$d^2 = \frac{1}{M^2} \sum_{k=3}^{N+1} m_k(M - m_k)^2 R_k^2 + \frac{m_1}{(M - m_1)M^3} \left(\sum_{k=3}^{N+1} m_k(M - m_k)R_k \right)^2. \quad (39)$$

Используя очевидные неравенства

$$m_k \leq m_{\max}, \quad m_1 < M - m_k < M, \quad R_k \leq R_{N+1}, \quad 3 \leq k \leq N + 1,$$

а также раскрывая скобки и группируя слагаемые, несложно получить грубую оценку на правую часть (39):

$$d^2 < m_{\max}(N - 2)^2 R_{N+1}^2. \quad (40)$$

Угол ψ_1 между вектором $O\hat{M}_1$ и прямой $\hat{l}_1$ находится из (37)-(38). Ясно, что ψ_1 не меньше угла φ_1 между $\hat{l}_1$ и плоскостью $\hat{\Pi}_1$ (см. (5)). Абсолютно аналогично, угол ψ_k между вектором $O\hat{M}_k$ и прямой $\hat{l}_N$ не меньше угла φ_N между $\hat{l}_N$ и плоскостью $\hat{\Pi}_N$. Из леммы 5 находим, что

$$\sin \varphi_1 = \sqrt{\frac{Mm_2}{(m_1 + m_2)(M - m_1)}}, \quad \sin \varphi_N = \sqrt{\frac{Mm_N}{(m_1 + m_N)(M - m_1)}}.$$

Положим $\varphi = \min\{\varphi_1, \varphi_2\}$, $0 < \varphi < \pi/2$, $m_* = \min\{m_2, m_N\}$. Так как $f(x) = x/(m_1 + x)$ — монотонно возрастающая функция на $\mathbb{R}_+$, то

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{Mm_*}{(m_1 + m_*)(M - m_1)}} \quad (41)$$

и $\hat{L} \leq 2d \operatorname{ctg} \varphi$. Таким образом, используя (34), (35), (40) и (41), окончательно получаем

$$\sqrt{m_j} S_j \leq \tilde{L} \leq \frac{2d \operatorname{ctg} \varphi}{\sin \gamma} < 2\sqrt{m_{\max}}(N - 2)R_{N+1} \cdot \sqrt{\frac{M}{M - m_1}} \cdot \sqrt{\frac{m_1(M - m_1 - m_*)}{Mm_*}}.$$

Производя сокращения, получаем (32). Теорема 4 доказана. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Friesecke G., Wattis J., Existence theorem for solitary waves on lattices. Commun. Math. Phys. 161, 391-418 (1994).
2. Friesecke G., Matthies K., Atomic-scale localization of high-energy solitary waves on lattices. Physica D 171, (2002) 211-220.
3. Э.Б. Винберг. Калейдоскопы и группы отражений. Матем. просв., 7, МЦНМО, М., 2003, 45-63.
4. Г.А. Гальперин. Упругие столкновения частиц на прямой. УМН, 33:1(199)(1978), 211-212
5. Г.А. Гальперин. О системах локально взаимодействующих и отталкивающихся частиц, движущихся в пространстве. Тр. ММО, 43, Издательство Московского университета, М., 1981, 142-196.

6. Г. А. Гальперин. Биллиарды и упругие столкновения частиц и шаров. Матем. просв., сер. 3, 5, МЦНМО, М., 2001, 65–99.
7. Г. А. Гальперин, А. Н. Земляков. Математические бильярды. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.—228 с.— (Б-чка «Квант». Вып. 77)
8. Herrmann M., Matthies K., Uniqueness of solitary waves in the high-energy limit of FPU-type chains. arXiv:1611.03514v1
9. Iooss G., Travelling waves in the Fermi-Pasta-Ulam lattice, Nonlinearity 13 (2000) 849-866.
10. Iooss G., Kirchgässner K., Travelling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators, Comm. Math. Phys. (2000) 439-464.
11. В. В. Козлов, Д. В. Трещёв. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами, Изд-во Моск. ун-та, М., 1991, 168 с.
12. Pankov A., Travelling waves and periodic oscillations in Fermi-Pasta-Ulam lattices, The Imperial College Press, London, 2005, 194 p.
13. Я. Г. Синай. Биллиардные траектории в многогранном угле. УМН, 33:1(199)(1978), 229-230.
14. М. Б. Севрюк. К оценке числа столкновений n упругих частиц на прямой. ТМФ, 96:1 (1993), 64–78.
15. Treschev D., Travelling waves in FPU lattices. Discrete Contin. Dyn. Syst., 11:4 (2004), 867–880.

REFERENCES

1. Friesecke G., Wattis J., Existence theorem for solitary waves on lattices. Commun. Math. Phys. 161, 391-418 (1994).
2. Friesecke G., Matthies K., Atomic-scale localization of high-energy solitary waves on lattices. Physica D 171, (2002) 211-220.
3. Ё. В. Vinberg, Kaleidoscopes and reflection groups, Mat. Prosveshchenie, 7, MCCME, Moscow, 2003, 45-63.
4. G. A. Galperin. Elastic collisions of particles on a line. Russian Math. Surveys, 33:1 (1978), 199–200
5. G. A. Galperin. Systems of locally interacting and repelling particles that are moving in space. Tr. Mosk. Mat. Obs., 43, MSU, M., 1981, 142–196
6. G. A. Galperin. Billiards and elastic collisions of particles and balls. Mat. Pros., Ser. 3, 5, MCCME, Moscow, 2001, 65–99
7. G. A. Galperin, A. N. Zemlyakov. Mathematical billiards. — М.: Nauka, 1990. pp. 228.
8. Herrmann M., Matthies K., Uniqueness of solitary waves in the high-energy limit of FPU-type chains. arXiv:1611.03514v1
9. Iooss G., Travelling waves in the Fermi-Pasta-Ulam lattice, Nonlinearity 13 (2000) 849-866.

10. Iooss G., Kirchgässner K., Travelling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators, *Comm. Math. Phys.* (2000) 439-464.
11. V. V. Kozlov and D. V. Treschev, *Billiards: A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts*. Translations of Mathematical Monographs, vol. 89. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991.
12. Pankov A., Travelling waves and periodic oscillations in Fermi-Pasta-Ulam lattices, The Imperial College Press, London, 2005, 194 p.
13. Ya. G. Sinai. Billiard trajectories in a polyhedral angle. *Russian Math. Surveys*, 33:1 (1978), 219–220
14. M. B. Sevryuk. Estimate of the number of collisions of n elastic particles on a line. *Theoret. and Math. Phys.*, 96:1 (1993), 818–826
15. Treschev D., Travelling waves in FPU lattices. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 11:4 (2004), 867–880.

Получено 23.11.2019 г.

Принято в печать 11.03.2020 г.