ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 2.

УДК 512.772, 517.583

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-266-274

О новых примерах кривых Серре¹

А. Т. Липковский, Ф. Ю. Попеленский

Липковский Александр Трайкович — доктор физико-математических наук, профессор, математический факультет, Белградский университет (г. Белград, Сербия).

e-mail: acal@matf.bg.ac.rs

Попеленский Федор Юрьевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: popelens@mech.math.msu.su

Аннотация

По теореме Абеля лемнискату Бернулли можно разделить циркулем и линейкой на n равных дуг, где $n = 2^k p_1 \dots p_m$ и p_j — попарно различные простые числа Ферма. Важное свойство лемнискаты, используемое в доказательстве теоремы Абеля, состоит в том, что она допускает параметризацию рациональными функциями, в которой длина дуги выражается эллиптическим интегралом первого рода. Жозеф Альфред Серре предложил способ описывать все такие кривые в работе [1]. В работах [1, 2, 3] он нашел целые серии таких кривых и описал их важные свойства. С тех пор других примеров кривых с рациональной параметризацией и длиной дуги, выражающейся эллиптическим интегралом первого рода, известно не было. В данной заметке мы строим новый пример такой кривой.

Ключевые слова: кривая Серре, эллиптический интеграл, алгебраическая кривая

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:

А. Т. Липковский, Ф. Ю. Попеленский. О новых примерах кривых Серре // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 266–274.

¹Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие Научные Школы” (грант НШ-6399.2018.1, соглашение N 075-02-2018-867) и проекта № ОИ 174020 Министерства просвещения, науки и технологического развития Республики Сербии.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 2.

UDC 512.772, 517.583

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-266-274

About new examples of Serre curves

A. T. Lipkovski, Th. Yu. Popelensky

Lipkovski Aleksandar — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Faculty of Mathematics, University of Belgrade (Belgrade, Serbia).

e-mail: acal@matf.bg.ac.rs

Popelensky Theodore — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor at the Department of Differential Geometry and Applications of the Faculty of Mechanics and Mathematics of M. V. Lomonosov MSU (Moscow).

e-mail: popelens@mech.math.msu.su

Abstract

Abel's theorem claims that the Lemniscate can be divided into n equal arcs by ruler and compass iff $n = 2^k p_1 \dots p_m$, where p_j are pairwise distinct Fermat primes. The proof is based on the fact that the lemniscate can be parametrised by rational functions and the arc length is a first type elliptic integral of the parameter. Joseph Alfred Serret proposed a method to describe all such curves in [1]. In papers [1, 2, 3] he found series of such curves and described its important properties. Since then no new examples of curves with rational parametrisation such that arc length is a first type elliptic integral of the parameter are known. In this note we describe new example of such a curve.

Keywords: Serret curve, elliptic integral, algebraic curve

Bibliography: 4 titles.

For citation:

A. T. Lipkovski, Th. Yu. Popelensky 2020, "About new examples of Serre curves", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 266–274.

*Посвящается Анатолию Тимофеевичу Фоменко
по случаю его семидесятилетия*

1. Введение

Лемниската Бернулли помимо всего прочего известна тем, что ее дуги можно складывать циркулем и линейкой, т. е. если даны точки A_0, A_1, A_2 на лемнискате, то циркулем и линейкой можно построить точку A_3 , такую что длина дуги A_0A_3 будет равна сумме длин дуг A_0A_1 и A_0A_2 . Это свойство выводится из того, что в параметризации лемнискаты функциями

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t + t^3}{1 + t^4}, \\ y(t) &= \frac{t - t^3}{1 + t^4} \end{aligned} \tag{1}$$

длина дуги лемнискаты задается интегралом

$$\int \frac{\sqrt{2}dt}{\sqrt{1 + t^4}},$$

для которого известна теорема сложения, открытая, по всей видимости, еще Эйлером.

Метод поиска кривых $(x(t), y(t))$, заданных параметрически рациональными функциями, с длиной дуги, выражающейся эллиптическим интегралом $C \int \frac{dt}{\sqrt{P_4(t)}}$, где $P_4(t)$ — многочлен четвертой степени без кратных корней, был предложен Ж. А. Серре в цикле работ [1, 2, 3], некоторые упрощения и обобщения сделал Ж. Лиувиль в работе [4], см. также книгу [5]. В ряде случаев Серре удалось реализовать свой подход, в частности, он нашел бесконечные серии таких кривых. Мы опишем его результаты в следующем параграфе.

В этой заметке мы

(1) покажем, что в одном классе кривых, естественным образом расширяющем результаты Серре, искомым кривых не существует;

(2) построим новые примеры кривых типа кривых Серре.

2. Предварительные сведения

Нас интересуют кривые $x = x(t), y = y(t)$, где $x(t), y(t)$ — вещественные рациональные функции, причем $ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{dt^2}{P_4(t)}$, где $P_4(t)$ — вещественный многочлен четвертой степени без кратных корней. Серре показал, что без ограничения общности можно считать, что $P_4(t)$ имеет вид $(t^2 - a^2)(t^2 - \bar{a}^2)$, где a — комплексное число с отличными от 0 вещественной и мнимой частями. Тогда любое решение нашей задачи имеет вид

$$x(t) + iy(t) = \int \frac{q(t)}{q(t)} \frac{1}{p(t)} dt, \quad (2)$$

где многочлен второй степени $p(t)$ выбирается так, что $P_4(t) = p(t)\overline{p(t)}$, $\overline{q(t)}$ взаимно прост с $p(t)$, $q(t)$ делится на $p(t)$, и кроме того, должны выполняться условия

$$\operatorname{res}_{t=t_k} \frac{q(t)}{q(t)p(t)} = 0 \quad (3)$$

для всех $t = t_k$, являющихся корнями $\overline{q(t)}$.

Сам Серре подробно исследовал случай $p(t) = (t - a)(t + a)$, $q(t) = (t - a)^{m+1}(t + a)^{n+1}$, где m, n — произвольные положительные целые числа. Он показал, предполагая без ограничения общности $m \leq n$, что в этом случае кривая

$$x(t) + iy(t) = \int \frac{(t - a)^m(t + a)^n}{(t - \bar{a})^{m+1}(t + \bar{a})^{n+1}} dt, \quad (4)$$

является алгебраической тогда и только тогда, когда число a с ненулевыми вещественной и мнимой частями является корнем уравнения

$$\frac{1}{\zeta^{n-m}} \frac{d^m}{d\zeta^m} \zeta^n (\zeta - 1)^m = 0,$$

где $\zeta = \frac{(a + \bar{a})^2}{4a\bar{a}}$, см. подробное обсуждение в [2, 4]. Длина дуги такой кривой задается интегралом $\int \frac{C dt}{\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - \bar{a}^2)}}$. Например, для $m = n = 1$ параметр a должен удовлетворять уравнению $a^2 + \bar{a}^2 = 0$.

Можно показать, что для этих m, n и a кривая, заданная уравнением (4), получается из лемнискаты (1) композицией гомотетии и движения плоскости.

В этой заметке мы рассмотрим два случая, не входящие в серии, найденные Серре. А именно, в разделе 3 мы покажем, что выбор $q(t) = (t - b)^2(t - a)^2(t + a)^2$ не дает новых кривых, а в разделе 4 покажем, что для $q(t) = (t^2 - b^2)^2(t - a)^2(t + a)^2$ возникают новые кривые.

3. Случай $q(t) = (t - b)^2(t - a)^2(t + a)^2$

Рассмотрим простейший случай, не входящий в число рассмотренных самим Серре, а именно $q(t) = (t - b)^2(t - a)^2(t + a)^2$. В таком случае искомая кривая задается соотношением

$$x(t) + iy(t) = \int \frac{(t - b)^2(t - a)(t + a)}{(t - \bar{b})^2(t - \bar{a})^2(t + \bar{a})^2} dt,$$

при выполнении условий (3), которые состоят в обращении в 0 вычетов подынтегральной функции в точках $t = \bar{b}$ и $t = \pm\bar{a}$, что можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \left. \frac{d}{dt} \frac{(t - b)^2(t - a)(t + a)}{(t - \bar{b})^2(t + \bar{a})^2} \right|_{t=\bar{a}} = 0, \\ \left. \frac{d}{dt} \frac{(t - b)^2(t - a)(t + a)}{(t - \bar{b})^2(t - \bar{a})^2} \right|_{t=-\bar{a}} = 0, \\ \left. \frac{d}{dt} \frac{(t - b)^2(t - a)(t + a)}{(t - \bar{a})^2(t + \bar{a})^2} \right|_{t=\bar{b}} = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения зависимы, их сумма равна 0, поскольку в бесконечности вычет подынтегральной функции равен 0. Тем не менее, нам удобно рассматривать все три уравнения. При исследовании этой системы полезно иметь в виду, что нас интересуют комплексные a и b , причем $b \neq \pm a, \pm\bar{a}$, а вещественные и мнимые части a и b отличны от 0. Элементарные вычисления с учетом этих соображений позволяют упростить уравнения этой системы:

$$\begin{cases} a^2\bar{a}^2 - 3a^2\bar{a}b + a^2\bar{a}\bar{b} + a^2b\bar{b} + \bar{a}^4 + \bar{a}^3b - 3\bar{a}^3\bar{b} + \bar{a}^2b\bar{b} = 0, \\ a^2\bar{a}^2 + 3a^2\bar{a}b - a^2\bar{a}\bar{b} + a^2b\bar{b} + \bar{a}^4 - \bar{a}^3b + 3\bar{a}^3\bar{b} + \bar{a}^2b\bar{b} = 0, \\ a^2\bar{a}^2 - 2a^2b\bar{b} + a^2\bar{b}^2 + \bar{a}^2b\bar{b} - 2\bar{a}^2\bar{b}^2 + b\bar{b}^3 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Разности первого и третьего, а также второго и третьего уравнений дают равенства

$$(\bar{a} - \bar{b})(\bar{a}^3 - 3a^2b + \bar{a}^2b + a^2\bar{b} - 2\bar{a}^2\bar{b} + \bar{a}c\bar{b} + b\bar{b}^2) = 0, \quad (6)$$

$$(\bar{a} + \bar{b})(\bar{a}^3 + 3a^2b - \bar{a}^2b - a^2\bar{b} + 2\bar{a}^2\bar{b} + \bar{a}b\bar{b} - b\bar{b}^2) = 0. \quad (7)$$

Как говорилось выше, $b \neq \pm a$, поэтому вторые множители в обоих этих соотношениях должны быть равны 0. Их полусумма дает равенство

$$\bar{a}^3 + \bar{a}b\bar{b} = 0,$$

откуда $\bar{a}^2 = -b\bar{b}$. Теперь легко видеть, что $\operatorname{Re} a \operatorname{Im} a = 0$, что противоречит исходным предположениям о параметре a .

4. Случай $q(t) = (t^2 - b^2)^2(t - a)^2(t + a)^2$

Для многочлена вида $q(t) = (t^2 - b^2)^2(t - a)^2(t + a)^2$, где $b \neq \pm a$, искомая кривая задается соотношением

$$x(t) + iy(t) = \int \frac{(t^2 - b^2)^2(t - a)(t + a)}{(t^2 - \bar{b}^2)^2(t - \bar{a})^2(t + \bar{a})^2} dt, \quad (8)$$

при выполнении условий (3), которые состоят в обращении в 0 вычетов подынтегральной функции в точках $t = \pm \bar{b}$ и $t = \pm \bar{a}$, что можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \left. \frac{d}{dt} \frac{(t^2 - b^2)^2(t-a)(t+a)}{(t^2 - \bar{b}^2)^2(t+\bar{a})^2} \right|_{t=\bar{a}} = 0, \\ \left. \frac{d}{dt} \frac{(t^2 - b^2)^2(t-a)(t+a)}{(t^2 - \bar{b}^2)^2(t-\bar{a})^2} \right|_{t=-\bar{a}} = 0, \\ \left. \frac{d}{dt} \frac{(t^2 - b^2)^2(t-a)(t+a)}{(t+\bar{b})^2(t-\bar{a})^2(t+\bar{a})^2} \right|_{t=\bar{b}} = 0, \\ \left. \frac{d}{dt} \frac{(t^2 - b^2)^2(t-a)(t+a)}{(t-\bar{b})^2(t-\bar{a})^2(t+\bar{a})^2} \right|_{t=-\bar{b}} = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения зависимы, их сумма равна 0, поскольку в бесконечности вычет подынтегральной функции равен 0. Стоит также отметить, что при замене t на $-t$ первое уравнение переходит во второе и наоборот. То же самое верно в отношении третьего и четвертого уравнений. Также нужно иметь в виду, что нас интересуют комплексные a и b , причем $b \neq \pm a, \pm \bar{a}$, а вещественные и мнимые части a и b отличны от 0. Отсюда получаем, что вышеприведенные условия на вычеты равносильны паре уравнений

$$\begin{cases} a^2\bar{a}^4 + \bar{a}^6 - 5a^2\bar{a}^2b^2 + 3\bar{a}^4b^2 + 3a^2\bar{a}^2\bar{b}^2 - 5\bar{a}^4\bar{b}^2 + a^2b^2\bar{b}^2 + \bar{a}^2b^2\bar{b}^2 = 0, \\ a^2\bar{a}^2b^2 + 3a^2\bar{a}^2\bar{b}^2 - 5a^2b^2\bar{b}^2 + \bar{a}^2b^2\bar{b}^2 + a^2\bar{b}^4 - 5\bar{a}^2\bar{b}^4 + 3b^2\bar{b}^4 + \bar{b}^6 = 0. \end{cases}$$

Отметим, что уравнения однородны, поэтому вместе с решением (a, b) имеется решение $(\lambda a, \lambda b)$ для любого вещественного λ .

Как видно, эти уравнения довольно похожи друг на друга, поэтому разумной выглядит идея рассмотреть разность уравнений. Нетрудно проверить, что эта разность разлагается на множители:

$$(\bar{a} - \bar{b})(\bar{a} + \bar{b})(a^2\bar{a}^2 + \bar{a}^4 - 6a^2b^2 + 3\bar{a}^2b^2 + a^2\bar{b}^2 - 4\bar{a}^2\bar{b}^2 + 3b^2\bar{b}^2 + \bar{b}^4) = 0.$$

Это позволяет получить на a и b уравнение более низкого порядка.

Тем не менее, более перспективным оказался другой путь.

Положим $a = r + is, b = u + iv$ и разделим вещественные и мнимые части уравнений, результат нетрудно записать в виде

$$\begin{cases} 2(r-s)(r+s)(r^4 - 6r^2s^2 + s^4 - 2r^2u^2 + 2s^2u^2 + u^4 + \\ \quad + 32rsuv + 2r^2v^2 - 2s^2v^2 + 2u^2v^2 + v^4) = 0, \\ -8rs(r^4 - 2r^2s^2 + s^4 - r^2u^2 + s^2u^2 + 16rsuv + r^2v^2 - s^2v^2) = 0, \\ 4(u-v)(u+v)(r^4 + 2r^2s^2 + s^4 - 2r^2u^2 + 2s^2u^2 + u^4 + \\ \quad + 12rsuv + 2r^2v^2 - 2s^2v^2 - 2u^2v^2 + v^4) = 0, \\ -4uv(r^4 + 2r^2s^2 + s^4 - 4r^2u^2 + 4s^2u^2 + 3u^4 + \\ \quad + 24rsuv + 4r^2v^2 - 4s^2v^2 - 2u^2v^2 + 3v^4) = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что если $r = s$ или $r = -s$, то второе уравнение приводится к виду $ruv = 0$, что не дает нужных решений, поэтому наша задача сводится к решению системы

уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} r^4 - 6r^2s^2 + s^4 - 2r^2u^2 + 2s^2u^2 + u^4 + \\ \quad + 32rsuv + 2r^2v^2 - 2s^2v^2 + 2u^2v^2 + v^4 = 0, \end{array} \right. \quad (W1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r^4 - 2r^2s^2 + s^4 - r^2u^2 + s^2u^2 + \\ \quad + 16rsuv + r^2v^2 - s^2v^2 = 0, \end{array} \right. \quad (W2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r^4 + 2r^2s^2 + s^4 - 2r^2u^2 + 2s^2u^2 + u^4 + \\ \quad + 12rsuv + 2r^2v^2 - 2s^2v^2 - 2u^2v^2 + v^4 = 0, \end{array} \right. \quad (W3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r^4 + 2r^2s^2 + s^4 - 4r^2u^2 + 4s^2u^2 + 3u^4 + \\ \quad + 24rsuv + 4r^2v^2 - 4s^2v^2 - 2u^2v^2 + 3v^4 = 0. \end{array} \right. \quad (W4)$$

Эти уравнения зависимы — разность первого и четвертого уравнений плюс удвоенная разность третьего и второго равна 0. Поэтому эта система равносильна системе состоящей из уравнений $(W1) - (W3)$, $(W1) - 2(W2)$, $3(W2) - 4(W3)$, которая легко приводится к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} 2r^2s^2 - 5rsuv - u^2v^2 = 0, \end{array} \right. \quad (U1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (r^2 + s^2 - u^2 - v^2)(r^2 + s^2 + u^2 + v^2) = 0, \end{array} \right. \quad (U2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -r^4 - 14r^2s^2 - s^4 + 5r^2u^2 - \\ \quad - 5s^2u^2 - 4u^4 - 5r^2v^2 + 5s^2v^2 + 8u^2v^2 - 4v^4 = 0. \end{array} \right. \quad (U3)$$

Вторая скобка во втором уравнении $(U2)$ не дает интересующих нас решений, поэтому мы ее отбросим. В силу однородности второе уравнение позволяет наложить дополнительное условие

$$r^2 + s^2 = u^2 + v^2 = 1.$$

Наши уравнения обладают большой группой симметрий. Если (r, s, u, v) — решение, то можно одновременно менять знак у четного числа переменных, т. е. так, чтобы не поменялся знак произведения $rsuv$, а также можно применить к переменным перестановку $r \leftrightarrow s, u \leftrightarrow v$. В силу $r^2 + s^2 = u^2 + v^2 = 1$ сделаем подстановку

$$r = \sin \theta, s = \cos \theta, u = \cos \omega, v = \sin \omega.$$

Тогда первое уравнение $(U1)$ приводится к виду

$$2 \sin^2 2\theta - 5 \sin 2\theta \sin 2\omega - \sin^2 2\omega = 0,$$

откуда

$$\sin 2\theta = M \sin 2\omega, \text{ где } M = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}. \quad (9)$$

С помощью соотношений $r^2 + s^2 = u^2 + v^2 = 1$ уравнение $(U3)$ приводится к виду

$$6r^4 + 3u^2 - 8u^4 + r^2(-11 + 10u^2) = 0.$$

В силу указанной тригонометрической подстановки $r^2 = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ и $u^2 = \frac{1 - \cos 2\omega}{2}$, откуда получаем уравнение

$$-4 - 4 \cos^2 2\omega + 5 \cos 2\omega \cos 2\theta + 3 \cos^2 2\theta = 0.$$

Перепишем его в виде

$$5 \cos 2\omega \cos 2\theta = 4 + 4 \cos^2 2\omega - 3 \cos^2 2\theta, \quad (10)$$

возведем в квадрат, заменим квадраты косинусов с помощью основного тригонометрического тождества и используем соотношение (9):

$$25(1 - \sin^2 2\omega)(1 - M^2 \sin^2 2\omega) = (4 + 4(1 - \sin^2 2\omega) - 3(1 - M^2 \sin^2 2\omega))^2,$$

откуда получаем уравнение

$$\sin^2 2\omega(15 - 55M^2 + (16 - 9M^4 + 49M^2) \sin^2 2\omega) = 0.$$

Заметим, что если $\sin^2 2\omega = 0$, то $rs = 0$, что не дает решения нашей задачи. Отсюда

$$\sin^2 2\omega = \frac{15 - 55M^2}{9M^4 - 49M^2 + 16}.$$

При $M = \frac{5-\sqrt{33}}{4}$ получаем

$$\sin^2 2\omega = \sqrt{\frac{11}{3}} - 1,$$

тем самым,

$$\sin 2\omega = \pm \sqrt{\sqrt{\frac{11}{3}} - 1}, \quad \sin 2\theta = M \sin 2\omega = \mp \sqrt{\frac{11\sqrt{33} - 63}{6}}.$$

а при $M = \frac{5+\sqrt{33}}{4}$ получаем уравнение

$$\sin^2 2\omega = -\sqrt{\frac{11}{3}} - 1,$$

которое не имеет решений.

Итак, нам осталось найти решения уравнений

$$\begin{aligned} 2uv &= \pm \sqrt{\sqrt{\frac{11}{3}} - 1} \\ 2rs &= \mp \sqrt{\frac{11\sqrt{33} - 63}{6}} \end{aligned}$$

с учетом условий $u^2 + v^2 = 1$ и $r^2 + s^2 = 1$.

Отсюда легко получить, что u и v — это числа

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{6} \left(3 - \sqrt{3(6 - \sqrt{33})} \right)} \text{ и } \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{33} - 3}{6 - 2\sqrt{18 - 3\sqrt{33}}}},$$

а r и s — числа

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3} \left(6 - \sqrt{6(69 - 11\sqrt{33})} \right)} \text{ и } \delta = \sqrt{\frac{11\sqrt{33} - 63}{12 - 2\sqrt{6(69 - 11\sqrt{33})}}}.$$

Знаки перед радикалами выбираются так, что если в паре u, v знаки одинаковые, то в паре r, s — различные, и наоборот. Далее, эти значения для u, v, r, s были получены при возведении

в квадрат уравнения (10), поэтому не все комбинации выборов соответствий u, v с α, β и r, s с γ, δ реализуются. С учетом этого имеем 16 вариантов (u, v, r, s) :

$$\begin{array}{ll} (\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma, \mp\delta), & (\pm\beta, \pm\alpha, \pm\delta, \mp\gamma), \\ (\pm\alpha, \pm\beta, \mp\gamma, \pm\delta), & (\pm\beta, \pm\alpha, \mp\delta, \pm\gamma), \\ (\pm\alpha, \mp\beta, \pm\gamma, \pm\delta), & (\pm\beta, \mp\alpha, \pm\delta, \pm\gamma), \\ (\mp\alpha, \pm\beta, \pm\gamma, \pm\delta), & (\mp\beta, \pm\alpha, \pm\delta, \pm\gamma). \end{array}$$

Таким образом, для $a = r + is$ и $b = u + iv$ соотношение (8) задает кривую $(x(t), y(t))$ с параметризацией рациональными функциями и длиной дуги, равной $C \int \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - \bar{a}^2)}}$.

Одна из таких кривых показана на следующем рисунке, остальные получаются из нее движением.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. A. Serret *Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques and ultra-elliptiques*, Journal de mathématiques pures et appliquées, T. 10 (1845) p. 257–285
2. J. A. Serret *Développements sur une classe d'équations relatives a la représentation géométrique des fonctions elliptiques*, Journal de mathématiques pures et appliquées, T. 10 (1845) p. 351–363
3. J. A. Serret *Note sur les courbes elliptiques de la première espèce*, Journal de mathématiques pures et appliquées, T. 10 (1845) p. 421–429
4. J. Liouville *Sur un Mémoire de M. Serret, relatif à la representation des fonctions elliptiques*, Journal de mathématiques pures et appliquées, T. 10 (1845) p. 456–465
5. В. В. Прасолов, Ю. П. Соловьев *Эллиптические функции и алгебраические уравнения*, Москва, 2020

REFERENCES

1. Serret J. A., “Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques and ultra-elliptiques”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **10** (1845), 257—285.
2. Serret J. A., “Développements sur une classe d’équations relatives a la représentation géométrique des fonctions elliptiques”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **10** (1845), 351—363.
3. Serret J. A., “Note sur les courbes elliptiques de la première espèce”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **10** (1845), 421—429.
4. Liouville J., “Sur un Mémoire de M. Serret, relatif à la representation des fonctions elliptiques”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **10** (1845), 456—465.
5. Prasolov V. V., Soloviev Y. P., “Elliptic Functions and Algebraic Equations”, Moscow, 2020.

Получено 28.11.2019 г.

Принято в печать 11.03.2020 г.