ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 517.938.5+515.164.15 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-228-243

Классификация особенностей типа седло-фокус[1]

И. К. Козлов, А. А. Ошемков

Козлов Иван Константинович — кандидат физико-математических наук, доцент, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: ikozlov90@gmail.com
Ошемков Андрей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: a@oshemkov.ru

Аннотация

В работе приводится алгоритм топологической классификации невырожденных особенностей типа седло-фокус интегрируемых гамильтоновых систем с тремя степенями свободы с точностью до полулокальной эквивалентности. В частности, мы доказываем, что любую особенность типа седло-фокус можно представить в виде почти прямого произведения, в котором действующая группа циклическая. На основе построенного алгоритма получен полный список особенностей типа седло-фокус сложности 1, 2 и 3, т. е. особенностей с одной, двумя или тремя особыми точками ранга 0 на слое. Ранее обе особенности типа седло-фокус сложности 1 были также описаны Л. М. Лерманом.

Ключевые слова: интегрируемая система, слоение Лиувилля, особенность типа седло-фокус.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
И. К. Козлов, А. А. Ошемков. Классификация особенностей типа седло-фокус // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 228–243.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 517.938.5+515.164.15 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-228-243

Classification of saddle-focus singularities

I. K. Kozlov, A. A. Oshemkov

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 17-11-01303).

Kozlov Ivan Konstantinovich — Candidate of physical and mathematical Sciences, Associate Professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: ikozlov90@gmail.com
Oshemkov Andrey Alexandrovich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: a@oshemkov.ru

Abstract

The paper presents an algorithm for topological classification of nondegenerate saddle-focus singularities of integrable Hamiltonian systems with three degrees of freedom up to semilocal equivalence. In particular, we prove that any singularity of saddle-focus type can be represented as an almost direct product in which the acting group is cyclic. Based on constructed algorithm, a complete list of singularities of saddle-focus type of complexity 1, 2, and 3, i. e., singularities whose leaf contains one, two, or three singular points of rank 0, is obtained. Earlier, both singularities of saddle-focus type of complexity 1 were also described by L. M. Lerman.

Keywords: integrable system, Liouville foliation, saddle-focus singularity.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
I. K. Kozlov, A. A. Oshemkov, 2020, "Classification of saddle-focus singularities", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 228–243.

1. Введение

В работе исследуется топологическое устройство особенностей интегрируемых гамильтоновых систем в окрестности особого слоя. Точнее, мы рассматриваем особенности типа седло-фокус для систем с тремя степенями свободы с точностью до полулокальной лиувиллевой эквивалентности (т. е. с точностью до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля в окрестности особого слоя). В частности, в работе приведен алгоритм для построения полного списка особенностей типа седло-фокус данной сложности k, т. е. с k особыми точками ранга 0 на слое (см. Раздел 3). На основе этого алгоритма получена классификация особенностей типа седло-фокус сложности $\leqslant 3$ (см. Теоремы 4, 5, 6).

Все необходимые сведения об интегрируемых системах и невырожденных особенностях можно найти в [3] или [4]. Коротко дадим лишь необходимые нам определения.

Интегрируемая гамильтонова системой с n степенями свободы — это $2n$-мерное симплектическое многообразие (M^{2n}, ω) с заданными на нем n функциями $f_1, \dots, f_n$, для которых гамильтоновы векторные поля $\operatorname{sgrad} f_i$ полны, попарно коммутируют и линейно независимы почти всюду на M^{2n}. Отображение $\Phi = (f_1, \dots, f_n) : M \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением момента* интегрируемой гамильтоновой системы $(M^{2n}, \omega, f_1, \dots, f_n)$.

Отметим, что обычно в определение гамильтоновой системы включается *гамильтониан* — некоторая выделенная функция H из набора $f_1, \dots, f_n$ (или функция от f_i), гамильтонов поток которой и задает динамическую систему на фазовом пространстве M^{2n}. Для нас выбор гамильтониана не важен, поскольку мы интересуемся не динамикой, а лишь топологией слоения, порожденного первыми интегралами $f_1, \dots, f_n$, которое определяется следующим образом.

Определение 1. *Разложение фазового пространства интегрируемой гамильтоновой системы на связные компоненты $\Phi^{-1}(y)$ (т. е. на связные компоненты совместных поверхностей уровня первых интегралов $f_1, \dots, f_n$) называется* слоением Лиувилля, *соответствующим этой системе.*

Определение 2. *Две интегрируемые гамильтоновы системы на U_1 и U_2 называются* топологически эквивалентными *(или* лиувиллево эквивалентными*), если существует гомеоморфизм $\Psi\colon U_1 \to U_2$, который переводит каждый слой слоения Лиувилля на U_1 в слой слоения Лиувилля на U_2.*

Обычно слоение Лиувилля не является локально тривиальным и имеет особенности. В этой работе мы рассматриваем слоения Лиувилля, у которых все особенности невырождены. Такие особенности являются для интегрируемых систем особенностями общего положения, по сути это многомерный симплектический аналог "морсовских особенностей". Мы приведем лишь характеристическое свойство невырожденных особенностей (Теорема 1), которое можно взять за определение (точное определение см. в [3] или [4]).

Есть три типа простейших "базисных" невырожденных особенностей, они задаются следующими слоениями Лиувилля:

- E — слоение Лиувилля, заданное в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ функцией $p^2 + q^2$ (эллиптический тип);
- H — слоение Лиувилля, заданное в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ функцией pq (гиперболический тип);
- F — слоение Лиувилля, заданное в окрестности нуля в $(\mathbb{R}^4, dp \wedge dq)$ коммутирующими функциями $p_1q_1 + p_2q_2$ и $p_1q_2 - q_1p_2$ (тип фокус-фокус).

Если слоение Лиувилля задано функциями $f_1, \dots, f_n$, то его особые точки — это те, в которых подпространство, порожденное $\operatorname{sgrad} f_i$, имеет размерность меньше n. *Рангом* особой точки называется размерность этого подпространства. В частности, особые точки указанных слоений Лиувилля E, H и F имеют ранг 0.

Теорема 1 (Элиассон; см.[5, 3]). *Слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки ранга r локально послойно симплектоморфно прямому произведению k_e экземпляров слоения E, k_h экземпляров слоения H и k_f экземпляров слоения F, а также тривиального слоения $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r$.*

Тройка (k_e, k_h, k_f) называется *типом* невырожденной особой точки. Легко видеть, что тип точки определен однозначно.

Особенность слоения Лиувилля — это росток отображения момента на особом слое, т. е. слое, содержащем особые точки. Особенность мы будем называть *невырожденной* (в частности — эллиптической, гиперболической, фокусной), если все ее особые точки невырождены (и их тип соответственно эллиптический, гиперболический или фокус-фокус).

Ранг особенности — это минимальный ранг точек на ней. Для рассматриваемых в этой работе особенностей типа почти прямого произведение (см. Определение 3) типы всех ее точек минимального ранга совпадают. Этот тип (k_e, k_h, k_f) называется *типом особенности.*

Пусть $W_1, \dots, W_l$ — слоения без особенности или простейшие особенности: эллиптические, гиперболические или фокусные. На их произведении $W_1 \times \dots \times W_l$ естественным образом определено слоение Лиувилля с особенностью. Она называется *прямым произведением*, а особенности, лиувиллево эквивалентные ей — особенностями *типа прямого произведения.*

Определение 3. Почти прямое произведение *особенностей — это фактор прямого произведения $W_1 \times \dots \times W_l$ по действию ψ конечной группы G, которое удовлетворяет следующим условиям:*

1) *действие ψ на $W_1 \times \dots \times W_l$ покомпонентное, т.е.*

$$\psi(g)(x_1, \dots, x_l) = (\psi_1(g)(x_1), \dots, \psi_l(g)(x_l)),$$

где $\psi_1, \dots, \psi_l$ — действия группы G на особенностях $W_1, \dots, W_l$,

2) *действие на каждом сомножителе* $\psi_i(g) : W_i \to W_i$ *— это симплектоморфизм, сохраняющий функции, задающие слоение Лиувилля (и, в частности, само это слоение),*

3) *действие* ψ *на* $W_1 \times \cdots \times W_l$ *свободно.*

Особенность, лиувиллево эквивалентная почти прямому произведению $(W_1 \times \cdots \times W_l)/G$, *называется особенностью* типа почти прямого произведения.

Замечание 1. *Далее мы будем рассматривать только особенности типа почти прямого произведения, поскольку Н. Т. Зунг в [17] доказал, что любая невырожденная особенность, удовлетворяющая условию нерасщепляемости (заключающемуся в том, что для каждой особой точки минимального ранга на особом слое ее локальная бифуркационная диаграмма совпадает с бифуркационной диаграммой всей особенности), является особенностью типа почти прямого произведения. Большинство особенностей, которые встречаются в интегрируемых системах в механики и физике — нерасщепляемые (см. [3]). Тем не менее, особенности, не удовлетворяющие условию нерасщепляемости, возникают в системах, инвариантных относительно вращения (см., например, статью Е. А. Кудрявцевой и А. А. Ошемкова в этом выпуске, а также ссылки, приведенные в ней). Также можно построить "искуственные" примеры "расщепимых" особенностей (см. [4]).*

Отметим, что теорема Зунга носит топологический характер, т. е. лиувиллево эквивалентные почти прямые произведения особенностей могут не быть послойно симплектоморфными. Поскольку в данной работе мы рассматриваем особенности лишь с точностью до лиувиллевой эквивалентности, особенности типа почти прямого произведения мы иногда будем называть просто почти прямыми произведениями.

Имеется множество работ, в которых особенности интегрируемых гамильтоновых систем (или слоений Лиувилля) изучались с разных точек зрения: исследование конкретных интегрируемых систем, инварианты особенностей (топологические, гладкие, симплектические), классификация особенностей некоторого фиксированного типа. Поскольку локальная классификация невырожденных особенностей описывается теоремой Элиассона (Теорема 1), говоря здесь о классификации особенностей мы обычно имеем в виду их *полулокальную классификацию*, т. е. с точностью до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля в окрестности особого слоя.

Отметим также, что имеется хорошо развитая теория, описывающая "глобальные" свойства слоений Лиувилля (и в частности их особенностей) на изоэнергетических многообразиях интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Развитие этой теории было начато в работах А. Т. Фоменко (см. [6, 7]). Ее подробное изложение содержится в книге [3].

Перечислим основные результаты, касающиеся классификации невырожденных особенностей ранга 0 с полулокальной точки зрения.

- Особенности типа $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$ ранга 0 хорошо известны. Их свойства подробно исследованы в [3] (см. также описание этих особенностей в терминах атомов в [2] и с помощью f-графов в [14]). В частности, существует единственный эллиптический 2-атом A, соответствующий минимаксной особенности, а все остальные 2-атомы — седловые. Например, на рис. 1 и 2 схематично изображены все 2-атомы сложности 1 и 2 с их стандартными обозначениями.

- Полный список особенностей типа седло-седло (т. е. особенностей типа $(0, 2, 0)$ и ранга 0) был описан и изучен в работах Л. М. Лермана, Я. Л. Уманского [10], А. В. Болсинова [1], В. С. Матвеева [12]. Оказывается, что существует 4 и 39 топологически различных особенностей типа седло-седло сложности 1 и 2 соответственно.

- Полный ответ в чисто седловом случае, т. е. для особенностей типа $(0, n, 0)$ и ранга 0 был получен А. А. Ошемковым [15]. Например, существует 32 особенности ранга 0 типа $(0, 3, 0)$ сложности 1 (см. [16]).

- Классификация особенностей ранга 0 типа $(0,0,m)$ произвольной сложности (т. е. в чисто фокусном случае) была сделана А. М. Изосимовым [8].
- Особенности типа седло-фокус сложности 1 были описаны Л. М. Лерманом (см. [11]).

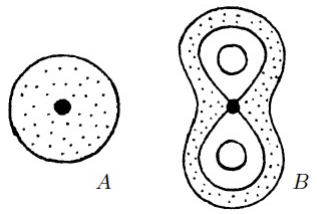

Рис. 1: Атомы сложности 1

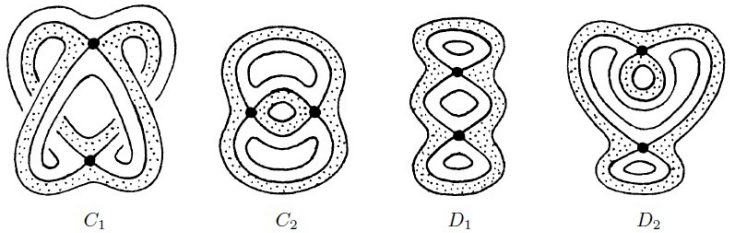

Рис. 2: Атомы сложности 2

В этой работе мы будем рассматривать особенности типа седло-фокус (т. е. типа $(0,1,1)$) ранга 0. Точнее (в соответствии с Замечанием 1) мы будем рассматривать особенности типа почти прямого произведения $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$, где $\mathcal{V}_m$ — какой-то седловой 2-атом сложности m, а $\mathcal{F}_n$ — фокусная особенность сложности n. Следуя [17], почти прямое произведение будем называть *минимальной моделью* особенности типа седло-фокус, если любой (не единичный) элемент $g \in G$ нетривиально действует на каждой компоненте произведения $\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n$. Любое почти прямое произведение можно свести к его минимальной модели, заменяя сомножитель на его фактор по подгруппе, которая тривиально действует на другом сомножителе.

В статье Н. Т. Зунга [17] утверждалось, что минимальная модель для особенности типа почти прямого произведения единственна. Вообще говоря, это не верно.

Пример 2. *Рассмотрим 2-атомы B, D_1 (см. рис. 1 и 2) и регулярное слоение Лиувилля над прямой $W_{\mathrm{reg}} \approx S^1 \times \mathbb{R}$. Соответствующие этим 2-атомам 3-атомы $B \times S^1$ и $(D_1 \times S^1)/\mathbb{Z}_2$ лиувиллево эквивалентны (см. [3]). Особенности $B \times W_{\mathrm{reg}}$ и $(D_1 \times W_{\mathrm{reg}})/\mathbb{Z}_2$ тоже лиувиллево эквивалентны, хотя и являются минимальными моделями.*

Утверждение о единственности минимальной модели верно для некоторых классов особенностей (например, для эллиптических или для седловых особенностей ранга 0 (см. [15]). Однако, как показывает следующий пример, для особенностей типа седло-фокус минимальная модель также не единственна.

Пример 3. *Минимальные модели $B \times \mathcal{F}_1$ и $(D_1 \times \mathcal{F}_1)/\mathbb{Z}_2$, где группа $\mathbb{Z}_2$ действует на $\mathcal{F}_1$ как сдвиг вдоль периодического интеграла на половину периода, лиувиллево эквивалентны.*

Более общее утверждение (частным случаем которого является пример 3) доказано ниже в Лемме 1.

Мы докажем, что от подобных действий, лежащих в непрерывной компоненте группы автоморфизмов фокусной особенности, всегда можно “избавиться”. А именно, для особенностей типа седло-фокус мы введем понятие простой минимальной модели (см. Определение 4) и докажем следующее (см. Теоремы 2 и 3):

- любая особенность лиувиллево эквивалентна некоторой простой минимальной модели;
- более того, из любого почти прямого произведения $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ можно получить простую минимальную модель факторизацией по действию некоторой подгруппы $N \triangleleft G$;
- для простой минимальной модели группа G всегда циклическая;
- для простой минимальной модели ее сомножители $\mathcal{V}_m$ и $\mathcal{F}_n$, а также порядок группы G определены однозначно.

2. Простая минимальная модель особенности типа седло-фокус

2.1. Существование простой минимальная модели

Определение 4. *Почти прямое произведение* $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ *мы будем называть* простой минимальной моделью, *если любой (не единичный) элемент* $g \in G$

(1) *нетривиально действует на* $\mathcal{V}_m$ *и* $\mathcal{F}_n$,

(2) *не имеет неподвижных точек ранга* 0 *на* $\mathcal{F}_n$.

Это определение простой минимальной модели отличается от определения минимальной модели в статье Н. Т. Зунга [17] добавлением условия (2).

Теорема 2. *Рассмотрим особенность типа седло-фокус, являющуюся почти прямым произведением* $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$. *Пусть* $N \subset G$ *— подгруппа, порожденная элементами, которые тривиально действуют на седловой компоненте или имеют неподвижные точки на фокусной компоненте. Тогда*

1. *подгруппа* N *нормальна и* $G/N \cong \mathbb{Z}_k$,
2. $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/N$ *послойно симплектоморфно прямому произведению* $\mathcal{V}'_{m'} \times \mathcal{F}_{n'}$, *где* $V'_{m'} = V_m/N$, *а* n' *— количество орбит действия подгруппы* N *на множестве точек ранга* 0 *фокусной особенности* $\mathcal{F}_n$,
3. $(\mathcal{V}'_{m'} \times \mathcal{F}_{n'})/\mathbb{Z}_k$ *— простая минимальная модель особенности* $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$.

Доказательство. [Доказательство Теоремы 2] Очевидно, что N — нормальная подгруппа в G. Покажем, что почти прямое произведение $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ можно “профакторизовать” по N, т. е. заменить $\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n$ на $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/N$, а G — на G/N.

Ясно, что если в почти прямом произведении $(W_1 \times W_2)/G$ группа G действует тривиально на компоненте W_2, то $(W_1 \times W_2)/G$ послойно симплектоморфно $(W_1/G) \times W_2$. Поэтому, без ограничения общности, мы можем считать, что рассматриваемое почти прямое произведение $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ является минимальной моделью (т. е. выполнено условие (1) Определения 4).

По условию, G — подгруппа группы автоморфизмов фокусной особенности $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_n)$, т. е. группа послойных симплектоморфизмов особенности $\mathcal{F}_n$ в себя, тождественных на базе слоения. Эта группа описана в [8]. Напомним некоторые доказанные там утверждения. Пусть H_f — подгруппа гамильтоновых автоморфизмов фокусной особенности в группе $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_n)$, и пусть $x_1, \ldots, x_n$ — по порядку пронумерованные особые точки фокусной особенности.

Утверждение 4 (см. [8, Утверждение 6]). *Группа* $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_n)$ *изоморфна* $\mathbb{Z}_k \times H_f$, *где* k *— делитель* n, $\mathbb{Z}_k = \langle a \rangle$, $a(x_q) = x_{q+k \pmod n}$ *для всякой особой точки* x_q.

Следствие 1 (см. [8, Утверждение 7]). *Все элементы конечного порядка в группе* $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_n)$ *лежат в ее “компактной части”* $\mathrm{Aut}_0(\mathcal{F}_n) = \mathbb{Z}_k \times S^1$.

Следствие 2. *Для любой минимальной модели особенности типа седло-фокус группа* G *либо циклическая, либо изоморфна* $\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$. *Более точно,* $G \cap H_f \cong \mathbb{Z}_l$ *и* $G/(G \cap H_f) \cong \mathbb{Z}_k$, *где* $k, l \geqslant 1$ *(здесь мы формально полагаем* $\mathbb{Z}_1 = \{0\}$*).*

Для доказательства Теоремы 2 остается профакторизовать особенность по действию группы $G \cap H_f \cong \mathbb{Z}_l$, т. е. доказать следующее утверждение.

Лемма 1. *Любая особенность типа седло-фокус вида* $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$, *где группа* G *действует на* $\mathcal{F}_n$ *гамильтоновыми автоморфизмами (т. е. сохраняет все особые точки* $\mathcal{F}_n$*), послойно симплектоморфна особенности* $(\mathcal{V}_m/G) \times \mathcal{F}_n$.

Доказательство. [Доказательтво Леммы 1] Представим 2-атом $\mathcal{V}_m$ в удобном для нас виде. Мы хотим разрезать $\mathcal{V}_m$ так, чтобы из его частей можно было склеить $\mathcal{V}_m/G$. Для этого воспользуемся следующим очевидным утверждением.

Утверждение 5. *Если группа G свободно действует на 2-атоме $\mathcal{V}_m$, то его можно разрезать на "крестики" K_i и "ленточки" L_j так, чтобы группа G свободно действовала на множествах "крестиков" и "ленточек".*

В рассматриваемом случае группа G действует на $\mathcal{V}_m$ свободно, поскольку она свободно действует на $\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n$ и сохраняет все особые точки $\mathcal{F}_n$. На рис. 3 в качестве примера изображено подобное представление 2-атома D_1, на котором действует группа $\mathbb{Z}_2$ (как центральная симметрия), и выделена фундаментальная область для этого действия.

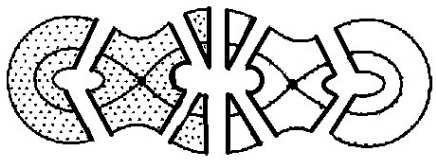

Рис. 3: Фундаментальная область для действия $\mathbb{Z}_2$ на D_1

Пусть $\mathcal{V}_m/G$ получается в результате склейки по границе некоторых "крестиков" $K_1, \dots, K_p$ и "ленточек" $L_1, \dots, L_q$. Рассмотрим произвольную граничную точку $x \in \partial\big(\big(\bigcup K_i\big) \cup \big(\bigcup L_j\big)\big)$. Обозначим через $\sigma(x)$ точку, с которой она отождествляется. Тогда $(\mathcal{V}_m/G) \times \mathcal{F}_n$ гомеоморфно фактор-пространству

$$\Big(\bigcup K_i \times \mathcal{F}_n\Big) \cup \Big(\bigcup L_j \times \mathcal{F}_n\Big) \Big/ \sim_1,$$

где $(x, y) \sim_1 (\sigma(x), y)$ для любой точки $y \in \mathcal{F}_n$. В свою очередь, $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ гомеоморфно фактор-пространству

$$\Big(\bigcup K_i \times \mathcal{F}_n\Big) \cup \Big(\bigcup L_j \times \mathcal{F}_n\Big) \Big/ \sim_2,$$

где $(x, y) \sim_2 (\sigma(x), h_x(y))$ для любой точки $y \in \mathcal{F}_n$, где h_x — некоторый гамильтонов автоморфизм особенности $\mathcal{F}_n$.

Любой гамильтонов автоморфизм h гомотопен тождественному в классе гамильтоновых автоморфизмов (если h — сдвиг на единичное время вдоль гамильтонова векторного поля v, то гомотопия — сдвиг на время t вдоль v). Поэтому $(\mathcal{V}_m/G) \times \mathcal{F}_n$ и $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ гомеоморфны, так как мы можем "раскрутить" каждое отображение h_x на "прямоугольнике" — маленькой окрестности границы. Для этого можно воспользоваться следующим утверждением, которое легко доказать, с помощью теоремы о трубчатой окрестности.

Утверждение 6. *Если разрезать многообразие M^n по подмногообразию Q^{n-1} коразмерности 1, а потом склеить полученные компоненты границы по отображению, гомотопному исходному, то получится многообразие, гомеоморфное M^n.*

Отсюда следует, что $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ и $(\mathcal{V}_m/G) \times \mathcal{F}_n$ лиувиллево эквивалентны. Остается показать, что лиувиллеву эквивалентность между ними можно сделать симплектической. Для этого достаточно заметить, что построенные гомотопии автоморфизмов h_x сохраняют симплектическую структуру. То, что гомотопию всех гамильтоновых автоморфизмов h_x можно сделать гладко зависящей от точки x, гарантируется следующим простым утверждением.

Утверждение 7. *Пусть $\mathcal{F}_n$ — фокусная особенность, f_1, f_2 — ее интегралы, причем траектории гамильтонова векторного поля $\operatorname{sgrad} f_2$ замкнуты с периодом 2π. Тогда функции $H_1 = H_1(f_1, f_2)$ и $H_2 = H_2(f_1, f_2)$ задают одинаковые гамильтоновы автоморфизмы*

особенности $\mathcal{F}_n$ (т. е. 1-сдвиги вдоль гамильтоновых векторных полей $\operatorname{sgrad} H_1$ *и* $\operatorname{sgrad} H_2$ *равны) тогда и только тогда, когда*

$$H_2 - H_1 = \frac{c_1}{2\pi} f_2 + c_2,$$

где $c_1 \in \mathbb{Z}$ и $c_2 \in \mathbb{R}$.

Лемма 1 доказана. □

После факторизации минимальной модели по действию группы $G \cap H_f$ мы получаем простую минимальную модель с действием группы $G/(G \cap H_f)$. Тем самым выполнен пункт 3 Теоремы 2. Пункт 2 Теоремы 2 является следствием Леммы 1, пункт 1 вытекает из Следствия 2. Теорема 2 доказана. □

2.2. Однозначность простой минимальной модели

Теорема 3. *Для любой простой минимальной модели $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ особенности типа седло-фокус ее 2-атом $\mathcal{V}_m$, фокусная особенность $\mathcal{F}_n$ и группа $\mathbb{Z}_k$ однозначно определяются структурой самой особенности.*

Перечислим некоторые свойства критических точек особенности типа седло-фокус в виде следующего утверждения, доказательство которого несложно получить исходя из того, что мы знаем, как действует группа $\mathbb{Z}_k$ в простой минимальной модели (см. Теорему 2).

Утверждение 8. *Рассмотрим простую минимальную модель $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ особенности типа седло-фокус. Обозначим через K_i множество ее критических точек ранга i. Тогда для достаточно малой окрестности особого слоя выполнено следующее.*

1. *Бифуркационнная диаграмма, т. е. образ всех критических точек особенности при отображении момента — это объединение прямой l и плоскости Π, трансверсально пересекающихся в точке P.*

2. *Множество K_0 состоит из $\frac{mn}{k}$ точек, лежащих в прообразе точки P.*

3. *Множество $K_0 \cup K_1$ образует 2-мерное симплектическое подмногообразие M_1^2, содержащееся в прообразе прямой l. Индуцированное слоение Лиувилля на M_1^2 лиувиллево эквивалентно $\frac{n}{k}$ экземплярам 2-атома $\mathcal{V}_m$.*

4. *Множество $K_0 \cup K_2$ образует 4-мерное симплектическое подмногообразие M_2^4, содержащееся в прообразе плоскости Π.*

   (a) *Если k нечетно, то индуцированное слоение Лиувилля на M_2^4 лиувиллево эквивалентно объединению $\frac{m}{k}$ фокусных особенностей $\mathcal{F}_n$.*

   (b) *Если $k = 2k_1$ и у действия $\mathbb{Z}_k = \langle a \rangle$ на $\mathcal{V}_m$ ровно s точек ранга 0, имеющих стабилизатор $\mathbb{Z}_2$ (т. е. точек, неподвижных относительно действия элемента a^{k_1}), где $0 \leqslant s \leqslant m$, то индуцированное слоение Лиувилля на M_2^4 лиувиллево эквивалентно объединению $\frac{m-s}{k}$ фокусных особенностей $\mathcal{F}_n$ и $\frac{s}{k_1}$ фокусных особенностей $\mathcal{F}_{\frac{n}{2}}$.*

Отметим следующий факт, вытекающий из пункта 4 Утверждения 8.

Следствие 3. *Если для двух простых минимальных моделей вида $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ у действия $\mathbb{Z}_k$ на $\mathcal{V}_m$ разное число точек ранга 0, имеющих стабилизатор $\mathbb{Z}_2$, то эти особенности лиувиллево не эквивалентны.*

Доказательство. [Доказательство Теоремы 3] Пусть $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ — некоторая простая минимальная модель для данной особенности типа седло-фокус. Тогда согласно пункту 3 Утверждения 8 стуктура индуцированного слоения Лиувилля на многообразии $M_1^2 = K_0 \cup K_1$ однозначно определяет 2-атом $\mathcal{V}_m$, а также отношение $\frac{n}{k}$.

Чтобы определить n (т. е. сомножитель $\mathcal{F}_n$ в минимальной модели), рассмотрим индуцированное слоение Лиувилля на $M_2^4 = K_0 \cup K_2$. Согласно пункту 4 Утверждения 8 это слоение есть либо объединение некоторого количества c фокусных особенностей $\mathcal{F}_N$ для некоторого N, либо объединение a фокусных особенностей $\mathcal{F}_N$ и b фокусных особенностей $\mathcal{F}_{2N}$, где $a, b \geqslant 1$. Во втором случае мы сразу получаем, что $n = 2N$ (а также легко вычисляем s, зная a и b). Если же реализуется первый случай, т. е. в индуцированном слоении на M_2^4 есть лишь фокусные особенности одной сложности N, то теоретически возможны два варианта: $s = 0$ или $s = m$. Для варианта $s = 0$ будем иметь $n = N$ (и $k = \frac{m}{c}$), а для варианта $s = m$ получим $n = 2N$ (и $k = \frac{2m}{c}$). Вообще говоря, мы не можем различить эти два варианта исходя лишь из информации об индуцированных слоениях Лиувилля на подмногообразиях M_1^2 и M_2^4. Иными словами, исходя из пунктов 3 и 4 Утверждения 8, мы можем различить любые простые минимальные модели кроме пары следующего вида:

(i) $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$, где действие любого нетривиального элемента группы $\mathbb{Z}_k$ не имеет неподвижных точек ранга 0 на $\mathcal{V}_m$,

(ii) $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$, где инволюция a^k на $\mathcal{V}_m$ (здесь a — образующая группы $\mathbb{Z}_{2k}$) оставляет неподвижными все m точек ранга 0.

Оказывается, что два действия с такими условиями могут существовать лишь на 2-атомах $\mathcal{V}_m$ некоторого специального вида, описанных в следующем простом утверждении.

Утверждение 9. *Если на 2-атоме $\mathcal{V}_m$ существует инволюция, которая оставляет на месте все точки ранга 0, то такой атом принадлежит одной из двух серий атомов, изображенных на рис. 4 (также там приведены их f-графы).*

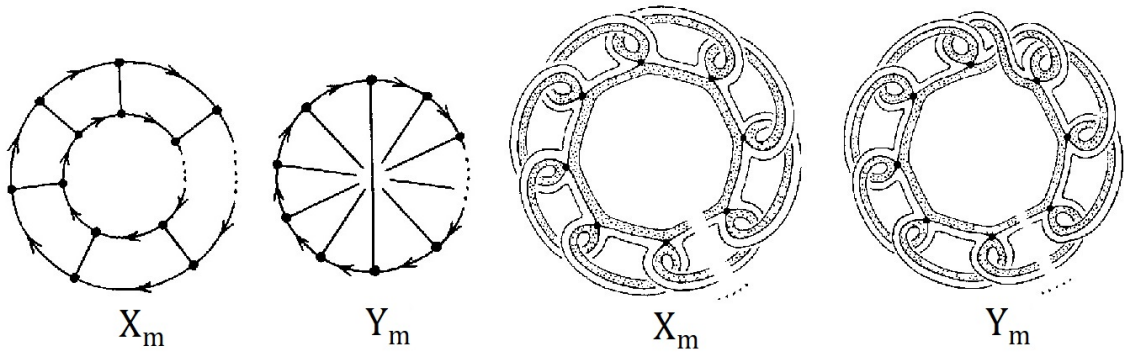

Рис. 4: Атомы X_m и Y_m с их f-графами

В книге [3] (откуда взяты рисунки 4) эти серии 2-атомов приведены в качестве примеров максимально симметричных атомов и обозначены через X_m и Y_m соответственно. Отметим, что свойства 2-атомов X_m и Y_m зависят от четности числа m, равного их сложности. В частности 2-атомы X_{2r} описывают перестройку двух окружностей в две окружности, 2-атомы Y_{2r} — перестройку одной окружности в одну окружность, а атомы X_{2r+1} и Y_{2r+1} переходят друг в друга при изменении знака функции, задающей слоение на них, и описывают перестройку соответственно двух окружностей в одну или одной в две.

Как было отмечено выше, для простых минимальных моделей вида (i) и (ii) индуцированные слоения Лиувилля на многообразиях M_1^2 и M_2^4 одинаковы. Рассмотрим другие характеристики этих особенностей, учитывая, что из Утверждения 9 мы знаем, какие 2-атомы V_m могут быть в минимальных моделях вида (i) и (ii).

Для особенности типа седло-фокус имеется следующая простая характеристика: пара чисел, равных количеству торов Лиувилля в прообразах регулярных точек каждого из полупространств, на которые плоскость Π в образе отображения момента делит пространство (см. пункт 1 Утверждения 8). Рассматривая все возможные действия групп $\mathbb{Z}_k$ и $\mathbb{Z}_{2k}$ на 2-атомах серий X_m и Y_m, удовлетворяющие условиям, перечисленным в (i) и (ii), получаем следующее утверждение.

Утверждение 10. *Пусть $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ и $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$ — простые минимальные модели вида* (i) *и* (ii)*, где $\mathcal{V}_m$ — 2-атом из серий X_m или Y_m. Тогда количество торов Лиувилля в прообразах регулярных точек пары полупространств, на которые плоскость Π из бифуркационной диаграммы делит образ отображения момента, равно*

- $(2,2)$ *для* $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ *и* $(1,1)$ *для* $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$*, если* $\mathcal{V}_m = X_m$*, где m четно,*
- $(1,1)$ *для* $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ *и* $(1,1)$ *для* $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$*, если* $\mathcal{V}_m = Y_m$*, где m четно,*
- $(2,1)$ *для* $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ *и* $(1,1)$ *для* $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$*, если* $\mathcal{V}_m = X_m$ *или* $\mathcal{V}_m = Y_m$*, где m нечетно.*

Таким образом, остается доказать, что особенности $(Y_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ и $(Y_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$, где m четно, лиувиллево не эквивалентны. Для этого достаточно исследовать комбинаторную структуру особого слоя L (т. е. прообраз точки пересечения прямой l и плоскости Π в бифуркационной диаграмме). А именно, нужно посмотреть на стратификацию слоя L точками различного ранга, т. е. на множества $L \cap K_i$, и на то, как они примыкают друг к другу.

Каждая трехмерная орбита в L — это полноторие $\mathbb{R}^2 \times S^1$. В его границе лежат две одномерные орбиты $\mathbb{R}^1$, две двумерные орбиты $\mathbb{R}^1 \times S^1$ и четыре нульмерные орбиты (при этом некоторые из этих орбит могут совпадать). Мы можем рассмотреть цепочки граничных трехмерных орбит и одномерных. У рассматриваемых особенностей $(Y_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ и $(Y_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$ они будут разными. Для примера рассмотрим случай $n = 1$ и $m = 2$ (отметим, что Y_2 — это 2-атом C_1, см. рис. 2). У $C_1 \times \mathcal{F}_1$ будет 4 цепочки, состоящих из 1 одномерной орбиты и 1 трехмерной, а у $(C_1 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$ будет 2 цепочки, в которых 2 одномерных орбиты и 2 трехмерных орбиты. В общем случае доказательство аналогично.

Теорема 3 доказана. □

3. Описание алгоритма и классификация особенностей малой сложности

3.1. Группа симметрий 2-атома

Чтобы описать особенности типа седло-фокус малой сложности, кратко напомним устройство группы симметрий для 2-атомов малой сложности (подробнее см. [3]).

Пусть $\mathcal{V}_m$ — произвольный седловой 2-атом. Обозначим через $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$ группу автоморфизмов 2-атома $\mathcal{V}_m$ с точностью до изотопии. В [3] показывается, что это конечная группа, и что она изоморфна группе автоморфимов f-графа 2-атома. В Таблице 1 указаны группы $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$ для атомов сложности $m = 1, 2, 3$. Список 2-атомов сложности 3 приведен в [3]. Эти атомы схематично изображены на рис. 5.

m	1	2				3									
атом $\mathcal{V}_m$	B	C_1	C_2	D_1	D_2	E_1	E_2	E_3	F_1	F_2	G_1	G_2	G_3	H_1	H_2
$\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	e	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2$	S_3	e	e	$\mathbb{Z}_2$	e	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	e

Таблица 1: Группы симметрий седловых атомов сложности 1, 2, 3

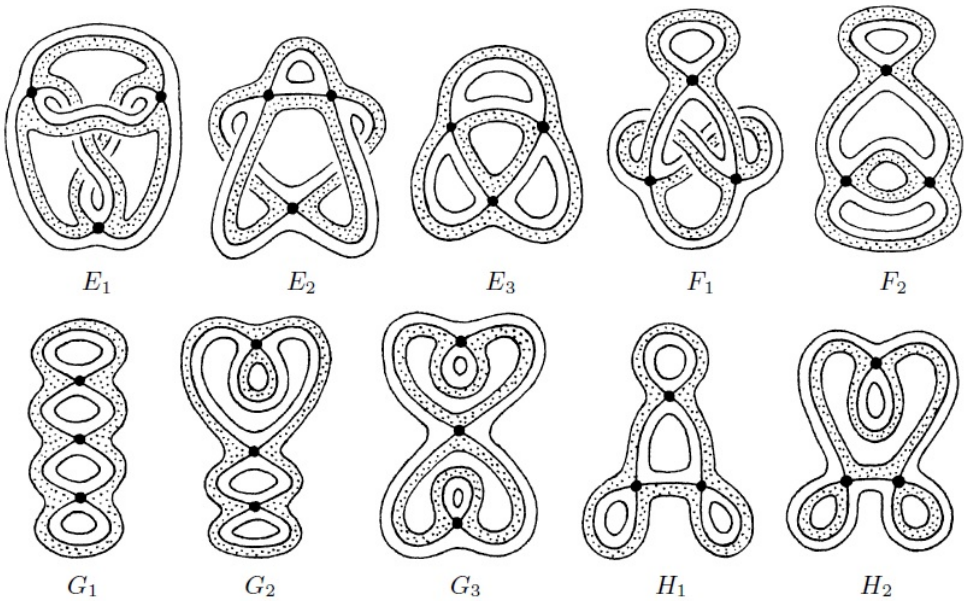

Рис. 5: Атомы сложности 3

Замечание 2. *У 2-атома C_2 группа симметрий $\mathrm{Sym}(C_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Если изобразить 2-атом C_2 симметрично, как на рис. 6, то нетривиальные элементы группы $\mathrm{Sym}(C_2)$ — это повороты на угол π вокруг осей x, y и z. У первых двух симметрий нет неподвижных точек ранга 0, последняя оставляет точки ранга 0 на месте.*

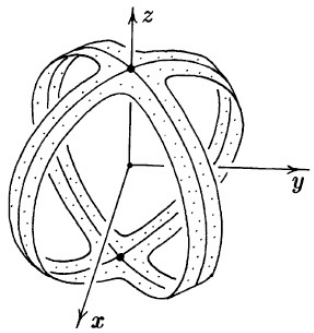

Рис. 6: Симметрии атома C_2

3.2. Алгоритм классификации особенностей типа седло-фокус

По теореме 2 для классификации особенностей типа седло-фокус достаточно рассматривать их простые минимальные модели. Все они имеют вид $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$. Заметим, что

- сложность особенности $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ равна md, где $n = kd$,

- порождающий элемент группы $\mathbb{Z}_k$ действует на $\mathcal{V}_m$ как элемент порядка k в группе симметрий $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$ атома $\mathcal{V}_m$,
- порядок группы симметрий $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$ не превосходит $2m$.

Основываясь на этих соображениях, получаем следующий алгоритм составления полного списка особенностей типа седло-фокус сложности p.

1. Перебираем всевозможные делители m числа p.
2. Для каждого седлового 2-атома $\mathcal{V}_m$ сложности m рассматриваем всевозможные k, для которых в группе $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$ содержится подгруппа $\mathbb{Z}_k$.
3. Рассматриваем всевозможные простые минимальные модели вида
$$\left(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{\frac{kp}{m}}\right)/\mathbb{Z}_k, \tag{1}$$
если они существуют.
4. Если получается несколько простых минимальных моделей одного и того же вида (1), то проверяется, являются ли они лиувиллево эквивалентными.

Покажем, что для особенности любой фиксированной сложности p алгоритм закончит работу за конечное число шагов. Очевидно, что количество чисел m, k и 2-атомов $\mathcal{V}_m$ (с точностью до лиувиллевой эквивалентности) конечно. Поэтому достаточно показать, что на шаге 3 достаточно рассматривать конечное особенностей. Если действия групп $\mathbb{Z}_k$ на (1) на любом из сомножителей сопряжены (автоморфизмом слоений Лиувилля), то получающиеся слоения лиувиллево эквивалентны.

Заметим, что у любой простой минимальной модели $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n/)\,\mathbb{Z}_k$ фактор $\mathcal{F}_n/\mathbb{Z}_k$ является невырожденной фокусной особенностью (т. е. типа $(0,0,1)$). При фиксированных k и n все такие особенности $\mathcal{F}_n/\mathbb{Z}_k$ лиувиллево эквивалентны (см., например, [8]). Поэтому, любые два действия группы $\mathbb{Z}_k$ на $\mathcal{F}_n$ в простых минимальных моделях можно перевести друг в друга лиувиллевой эквивалентностью $\mathcal{F}_n$ (при фиксированных k и n).

Остается доказать следующее утверждение.

Утверждение 11. *С точностью до лиувиллева автоморфизма 2-атома $\mathcal{V}_m$ существует лишь конечное число действий группы $\mathbb{Z}_k$ на 2-атоме $\mathcal{V}_m$.*

Утверждение 11 вытекает из следующего простого утверждения.

Утверждение 12. *Пусть ρ_1 и ρ_2 — два действия конечной группы G на 2-атоме $\mathcal{V}_m$, сохраняющие симплектическую структуру и функцию, задающую слоение Лиувилля (а следовательно, и само слоение Лиувилля). Тогда если ρ_1 и ρ_2 одинаково действуют на множестве одномерных ребер особого слоя 2-атома $\mathcal{V}_m$, то они совпадают с точностью до автоморфизма 2-атома $\mathcal{V}_m$. Иными словами, существует лиувиллева эквивалентность $f : \mathcal{V}_m \to \mathcal{V}_m$, такая что для любого $g \in G$ выполнено $\rho_2(g) = f^{-1} \circ \rho_1(g) \circ f$.*

По сути доказательство Утверждения 12 аналогично доказательству Утверждения 8 в [8]. Доказательство. [Доказательство Утверждения 12] Разрезая 2-атом на “крестики” и потом на более мелькие части, несложно построить гомеоморфные фундаментальные области для действий ρ_1 и ρ_2. Автоморфизм f отождествляет эти области, а потом продолжается до эквивариантного отображения. Утверждение 12 доказано. □

Замечание 3. *Не все отображения, одинаково действующие на множестве ребер, сопряжены. Например, сдвиги вдоль гамильтоновых векторных полей тождественно действуют на множестве ребер, но не сопряженны тождественному отображению. Мы использовали то, что группа G конечна. В этом случае не существует автоморфизма $\mathcal{V}_m$ конечного порядка, тождественного действующего на ребрах.*

Замечание 4. *В Утверждении 12 нельзя заменить послойный гомеоморфизм f на симплектоморфизм. У 2-атомов есть симплектические инварианты, и группа G обязана их сохранять.*

Замечание 5. *Число перестановок ребер конечно, поэтому Утверждение 11 можно обобщить. А именно, аналогично Утверждению 12 доказывается, что действия сопряжены, если они порождают одинаковые подгруппы в $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$. В частности, можно считать, что $G \subset \mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$.*

3.3. Особенности типа седло-фокус сложности 1, 2 и 3

Опишем теперь явно все невырожденные особенности типа седло-фокус (т. е. типа $(0,1,1)$) малой сложности.

Теорема 4. *Любая особенность типа седло-фокус сложности 1 лиувиллево эквивалентна ровно одному из следующих 2 почти прямых произведений:*

$$B \times \mathcal{F}_1, \qquad (B \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2. \tag{2}$$

Замечание 6. *Ранее обе эти особенности были описаны Л. М. Лерманом (см. [11]). Мы приведем другое доказательство этого утверждения.*

Доказательство. [Доказательство Теоремы 4] Применим описанный выше алгоритм.

1. Сложность $p = 1$. Единственный делитель p — это $m = 1$.
2. Единственная фокусная особенность сложности 1 — это 2-атом B. Группа симметрий $\mathrm{Sym}(B) = \mathbb{Z}_2$. Поэтому $k = 1$ или 2.
3. При $k = 1$ получаем прямое произведение $B \times \mathcal{F}_1$. Единственная простая минимальная модель при $k = 2$ — это $(B \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$.

По Теореме 3 простые минимальные модели с различными группами или сомножителями лиувиллево не эквивалентны. Мы получили требуемый список особенностей (2). Теорема 4 доказана. □

Теорема 5. *Любая особенность типа седло-фокус сложности 2 лиувиллево эквивалентна ровно одному из следующих 11 почти прямых произведений:*

$$B \times \mathcal{F}_2, \quad (B \times \mathcal{F}_4)/\mathbb{Z}_2, \quad D_1 \times \mathcal{F}_1, \quad (D_1 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad D_2 \times \mathcal{F}_1,$$
$$C_1 \times \mathcal{F}_1, \quad (C_1 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad (C_1 \times \mathcal{F}_4)/\mathbb{Z}_4, \quad C_2 \times \mathcal{F}_1,$$
$$\text{и два варианта } (C_2 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2.$$

Два варианта $(C_2 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$ отличаются количеством неподвижных точек ранга 0 у действия $\mathbb{Z}_2$ на C_2.

Замечание 7. *Иными словами, если представить 2-атом C_2 как на рис. 6, то в одном варианте почти прямого произведения $(C_2 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$ группа $\mathbb{Z}_2$ действует как поворот на угол π относительно оси z, а в другом — как повороты на угол π относительно оси x или y.*

Доказательство. [Доказательство Теоремы 5] Теорема 5 доказывается аналогично Теореме 4. Разберем только случай почти прямых произведений $(C_2 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$. Представим 2-атом C_2 как на рис. 6. Указанные в условии теоремы особенности лиувиллево не эквивалентны по Следствию 3. Особенности, соответствующие поворотам на угол π относительно осей x и y лиувиллево эквивалентны, потому что действия сопряжены в группе автоморфизмов 2-атома C_2. Теорема 5 доказана. □

Особенности типа седло-фокус сложности 3 классифицируются аналогично.

Теорема 6. *Любая особенность типа седло-фокус сложности* 3 *лиувиллево эквивалентна ровно одному из следующих* 21 *почти прямых произведений:*

$$B \times \mathcal{F}_3, \quad (B \times \mathcal{F}_6)/\mathbb{Z}_2, \quad E_1 \times \mathcal{F}_1, \quad (E_1 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad (E_1 \times \mathcal{F}_3)/\mathbb{Z}_3, \quad (E_1 \times \mathcal{F}_6)/\mathbb{Z}_6,$$
$$E_2 \times \mathcal{F}_1, \quad (E_2 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad E_3 \times \mathcal{F}_1, \quad (E_3 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad (E_3 \times \mathcal{F}_3)/\mathbb{Z}_3,$$
$$F_1 \times \mathcal{F}_1, \quad F_2 \times \mathcal{F}_1, \quad G_1 \times \mathcal{F}_1, \quad (G_1 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad G_2 \times \mathcal{F}_1,$$
$$G_3 \times \mathcal{F}_1, \quad (G_3 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad H_1 \times \mathcal{F}_1, \quad (H_1 \times \mathcal{F}_3)/\mathbb{Z}_3, \quad H_2 \times \mathcal{F}_1.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bolsinov A. V. Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant // Topological classification of integrable systems (Advances in Soviet Mathematics, Vol. 6) / ed. Fomenko A. T. — Providence: AMS, 1991 — P. 147–183.

2. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Т. 45, №2(272). С. 49–77

3. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

4. Bolsinov A. V., Oshemkov A. A. Singularities of integrable Hamiltonian systems // Topological Methods in the Theory of Integrable Systems / eds. Bolsinov A. V., Fomenko A. T., Oshemkov A. A. — Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2006 — P. 1–67.

5. Eliasson L. H. Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case // Comment. Math. Helv. 1990. V. 65, №1. P. 4–35.

6. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50, №6. С. 1276–1307.

7. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил. 1988. Т. 22, №4. С. 38–51.

8. Изосимов А. М. Классификация почти торических особенностей лагранжевых слоений // Матем. сб. 2011. Т. 202, №7. С. 95–116.

9. Lerman L. M., Umanskii Ya. L. Structure of the Poisson action of $\mathbb{R}^2$ on a four-dimensional symplectic manifold. I; II // Selecta Math. Sov. 1987. V. 6. P. 365–396; 1988. V. 7. P. 39–48.

10. Лерман Л. М., Уманский Я. Л. Классификация четырехмерных интегрируемых гамильтоновых систем и пуассоновских действий $\mathbb{R}^2$ в расширенных окрестностях простых особых точек. I; II; III // Матем. сб. 1992. Т. 183, №12. С. 141–176; 1993. Т. 184, №4. С. 103–138; 1995. Т. 186, №10. С. 89–102.

11. Lerman L. M. Isoenergetical Structure of Integrable Hamiltonian Systems in an Extended Neighborhood of a Simple Singular Point: Three Degrees of Freedom // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 2000. V. 200. P. 219–242.

12. Матвеев В. С. Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус-фокус и седло-седло // Матем. сб. 1996. Т. 187, №4. С. 29–58.

13. Матвеев В. С., Ошемков А. А. Алгоритмическая классификация инвариантных окрестностей точек типа седло-седло // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 1999. №2. С. 62–65.

14. Ошемков А. А. Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем (Тр. МИАН, Т. 205) — М.: Наука, 1994 — С. 131–140.

15. Ошемков А. А. Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2010. Т. 201, №8. С. 63–102.

16. Ошемков А. А. Седловые особенности сложности 1 интегрируемых гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2011. №2. С. 10–20.

17. Nguyen Tien Zung. Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold–Liouville with singularities // Compositio Math. 1996. V. 101. P. 179–215.

18. Nguyen Tien Zung. A note on focus-focus singularities // Diff. Geom. and Appl. 1997. V. 7. P. 123–130.

REFERENCES

1. Bolsinov, A. V. 1991, “Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant”, in Fomenko, A. T. (Ed.), Topological classification of integrable systems (Advances in Soviet Mathematics, Vol. 6), AMS, Providence, pp. 147–183.

2. Bolsinov, A. V., Matveev, S. V. & Fomenko, A. T. 1990, “Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of systems of small complexity”, *Russian Math. Surv.*, vol. 45, no. 2, pp. 59–94.

3. Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004, Integrable Hamiltonian systems: geometry, topology, classification, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, London, N.Y., Washington.

4. Bolsinov, A. V. & Oshemkov, A. A. 2006, “Singularities of integrable Hamiltonian systems” in Bolsinov, A. V., Fomenko, A. T. & Oshemkov, A. A. (Eds.), Topological Methods in the Theory of Integrable Systems, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, pp. 1–67.

5. Eliasson, L. H. 1990, “Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case”, *Comment. Math. Helv.*, vol. 65, no. 1, pp. 4–35.

6. Fomenko, A. T. 1987, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 29, no. 3, pp. 629–658.

7. Fomenko, A. T. 1988, “Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, vol. 22, no. 4, pp. 286–296.

8. Izosimov, A. M. 2011, “Classification of almost toric singularities of Lagrangian foliations”, *Sb. Math.*, vol. 202, no. 7, pp. 1021–1042.

9. Lerman, L. M. & Umanskii, Ya. L. 1987; 1988, “Structure of the Poisson action of $\mathbb{R}^2$ on a four-dimensional symplectic manifold. I; II”, *Selecta Math. Sov.*, vol. 6, pp. 365–396; vol. 7, pp. 39–48.

10. Lerman, L. M. & Umanskii, Ya. L. 1994; 1994; 1995, “Classification of four-dimensional integrable Hamiltonian systems and Poisson actions of R^2 in extended neighborhoods of simple singular points. I; II; III”, *Sb. Math.*, vol. 77, no. 2, pp. 511–542; vol. 78, no. 2, pp. 479–506; vol. 186, no. 10, pp. 1477–1491.

11. Lerman, L. M. 2000, “Isoenergetical Structure of Integrable Hamiltonian Systems in an Extended Neighborhood of a Simple Singular Point: Three Degrees of Freedom”, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, vol. 200, pp. 219–242.

12. Matveev, V. S. 1996, “Integrable Hamiltonian system with two degrees of freedom. The topological structure of saturated neighbourhoods of points of focus-focus and saddle-saddle type”, *Sb. Math.*, vol. 187, no. 4, pp. 495–524.

13. Matveev, V. S. & Oshemkov, A. A. 1999, “Algorithmic classification of invariant neighborhoods for points of saddle-saddle type”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 54, no. 2, pp. 44–47.

14. Oshemkov, A. A. 1995, “Morse functions on two-dimensional surfaces. Encoding of singularities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 205, pp. 119–127.

15. Oshemkov, A. A. 2010, “Classification of hyperbolic singularities of rank zero of integrable Hamiltonian systems”, *Sb. Math.*, vol. 201, no. 8, pp. 1153–1191.

16. Oshemkov, A. A. 2011 “Saddle singularities of complexity 1 of integrable Hamiltonian systems”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 66, no. 2, pp. 60–69.

17. Nguyen Tien Zung. 1996, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. I: Arnold–Liouville with singularities”, *Compositio Math.*, vol. 101, pp. 179–215.

18. Nguyen Tien Zung. 1997, “A note on focus-focus singularities”, *Diff. Geom. and Appl.*, vol. 7, pp. 123–130.

Получено 1.12.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.