ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 2.

УДК 511.361

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-159-168

О значениях гипергеометрических функций

П. Л. Иванков

Иванков Павел Леонидович — доктор физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: ivankovpl@mail.ru

Аннотация

При изучении арифметических свойств значений обобщенных гипергеометрических функций часто применяют известный в теории трансцендентных чисел метод Зигеля. Наиболее общие результаты в данной области были получены именно этим методом. Однако возможности метода Зигеля в случае гипергеометрических функций с иррациональными параметрами ограничены. Это связано с тем, что такие гипергеометрические функции не являются E -функциями, и по этой причине построить линейную приближающую форму с высоким порядком нуля с помощью принципа Дирихле здесь не удастся. При рассмотрении задач, связанных с исследованием арифметической природы значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами, в некоторых случаях можно применить метод, основанный на эффективном построении линейной приближающей формы, но возможности этого метода также ограничены из-за того, что слишком общие эффективные конструкции отсутствуют. Трудности имеются также и в тех случаях, когда такие конструкции известны. Особенности этих конструкций таковы, что часто не удается реализовать арифметическую часть метода.

Поэтому представляют интерес ситуации, когда можно провести требуемое исследование, опираясь на особые свойства конкретных гипергеометрических функций. Иногда удается так подобрать параметры исследуемых функций, что можно преодолеть те трудности, которые возникают в общем случае. В настоящей работе рассматривается гипергеометрическая функция специального вида и ее производные. С помощью эффективной конструкции удалось не только доказать линейную независимость значений этих функций над некоторым мнимым квадратичным полем, но и получить соответствующий количественный результат в виде оценки модуля линейной формы от указанных значений.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, эффективная конструкция, линейная независимость, мнимое квадратичное поле.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

П. Л. Иванков. О значениях гипергеометрических функций // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 159–168.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 2.

UDC 511.361

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-159-168

On the values of hypergeometric functions

P. L. Ivankov

Ivankov Pavel Leonidovich — doctor of physical and mathematical sciences, Bauman Moscow State Technical University (Moscow).

e-mail: ivankovpl@mail.ru

Abstract

The investigation of arithmetic properties of the values of the generalized hypergeometric functions is often carried out by means of known in the theory of transcendental numbers Siegel's method. The most general results in this field have been obtained precisely by this method. But the possibilities of Siegel's method in case of hypergeometric functions with irrational parameters are restricted. This is connected with the fact that such hypergeometric functions are not E -functions and for that reason one is unable to construct linear approximating form with large order of zero by means of pigeonhole method. To consider problems connected with the investigation of arithmetic properties of the values of hypergeometric functions with irrational parameters it is possible in some cases to use the method based on the effective construction of linear approximating form but the possibilities of this method are also limited because of the absence of too general effective constructions. There are some difficulties also in the cases when such constructions are available. The peculiarities of these constructions often hinder the realization of arithmetic part of the method.

For that reason of some interest are situations when one is able to realize the required investigation by means of specific properties of concrete functions. Sometimes it is possible to choose the parameters of the functions under consideration in such a way that one receives the possibility to overcome the difficulties of the general case. In this paper we consider hypergeometric function of a special kind and its derivatives. By means of effective construction it is possible not only to prove linear independence of the values of this function and its derivatives over some imaginary quadratic field but also to obtain corresponding quantitative result in the form of the estimation the modulus of the linear form in the aforesaid values.

Keywords: hypergeometric function, effective construction, linear independence, imaginary quadratic field.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

P. L. Ivankov, 2020, "On the values of hypergeometric functions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 159–168.

1. Введение

Обобщенная гипергеометрическая функция определяется равенством

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)}, \quad (1)$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — многочлены, старшие коэффициенты которых равны 1; степени этих многочленов равны соответственно r и m ; $a(x)b(x) \neq 0$ при $x = 1, 2, \dots$. Если корни $a(x)$ и $b(x)$

рациональны, то для изучения арифметической природы значений функций вида (1) и их производных обычно применяют метод Зигеля. Примеры применения метода Зигеля см. в [1]–[10]. В случае, когда некоторые из корней многочленов $a(x)$ и $b(x)$ иррациональны, обычно применяют метод, основанный на эффективном построении линейной приближающей формы. Первоначально рассматривался случай $a(x) \equiv 1$; см. [11]–[14]. В работах [15]–[18] эффективная конструкция использовалась и в случае $a(x) \not\equiv 1$. По-видимому до сих пор нет результатов об арифметической природе функций вида (1) для случая, когда два (или больше) корня многочлена $a(x)$ иррациональны. Если ровно один из корней этого многочлена является иррациональным, то теоремы об арифметической природе значений функций вида (1) можно найти в работах [19] и [20].

2. Результат

Пусть $\mathbb{I}$ – мнимое квадратичное поле,

$$\alpha \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}, \quad (2)$$

$m > 1$ – натуральное число,

$$a(x) = x + (m-1)\alpha, \quad b(x) = x \prod_{q=1}^{m-1} \left(x + m\alpha + \frac{q}{m-1} \right). \quad (3)$$

Рассмотрим при $j = 1, \dots, m$ функции

$$F_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \sigma_j(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)}, \quad (4)$$

где

$$\sigma_1(\nu) = 1, \quad \sigma_2(\nu) = \nu, \quad \sigma_j(\nu) = \sigma_{j-1}(\nu) \left(\nu + m\alpha + \frac{j-2}{m-1} \right), \quad j = 3, \dots, m. \quad (5)$$

При условии (2) функции (4) линейно независимы над полем $\mathbb{C}(z)$; это следует, например, из теорем, доказанных в работах [21] и [22].

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняется условие (2), и пусть $\xi \in \mathbb{I} \setminus \{0\}$. Пусть, далее, задано положительное число ϵ и нетривиальный набор целых чисел $h_1, \dots, h_m$ из поля $\mathbb{I}$. Тогда при $H = \max_{1 \leq j \leq m} |h_j| \geq H_0$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^m h_j F_j(\xi) \right| > H^{1-2m-\epsilon},$$

где H_0 зависит от ϵ , а также от α, m, ξ и от поля $\mathbb{I}$.

3. Леммы

Пусть $1 \leq l \leq m$. Рассмотрим однородную линейную функциональную приближающую форму

$$R_l(z) = \sum_{j=1}^m P_{lj}(z) F_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{l\nu} z^{\nu}. \quad (6)$$

В последнем равенстве

$$P_{lj}(z) = \sum_{s=0}^n p_{ljs} z^s \quad (7)$$

— многочлены с неопределенными коэффициентами, n — натуральное число. Из (4) следует, что

$$C_{l\nu} = \sum_{s=0}^{\min(n,\nu)} \sum_{j=1}^m p_{ljs} \sigma_j(\nu-s) \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{a(x)}{b(x)}.$$

Таким образом, если $0 \leq \nu < n$, то

$$C_{l\nu} = B_l(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} \prod_{x=1}^{n-\nu} \frac{1}{a(\nu-n+x)}, \quad (8)$$

где

$$B_l(\nu) = \sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^m p_{ljs} \sigma_j(\nu-s) \prod_{x=0}^{s-1} b(\nu-x) \prod_{x=1}^{n-s} a(\nu-n+x), \quad (9)$$

причем в последнем выражении верхний предел ν суммирования по s заменен на n в силу условия $b(0) = 0$, которое следует из (3). Если $\nu \geq n$, то

$$C_{l\nu} = B_l(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} \prod_{x=1}^{\nu-n} a(x). \quad (10)$$

В выражения (9) и (10) входит многочлен $B_l(\nu)$. Подберем коэффициенты многочленов (7) так, чтобы при $l = 1, \dots, m$ тождественно по ν выполнялось равенство

$$B_l(\nu) = \Phi_l(\nu), \quad (11)$$

где

$$\Phi_l(\nu) = \prod_{x=0}^{mn+l-2} (\nu-x). \quad (12)$$

С этой целью определим числа $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ с помощью равенства

$$a(\zeta) = \sum_{j=1}^m \vartheta_j \sigma_j(\zeta-1),$$

которое должно выполняться тождественно по ζ ; очевидно, $\vartheta_1 = 1 + (m-1)\alpha$, $\vartheta_2 = 1$, $\vartheta_3 = \dots = \vartheta_m = 0$. Пусть, далее,

$$K_{js}(\zeta) = \begin{cases} a(\zeta+1), & \text{если } s=0, j=1, \dots, m, \\ \sum_{q=1}^j \vartheta_q \sigma_q(\zeta), & \text{если } s=1, \dots, n, j=1, \dots, m. \end{cases}$$

ЛЕММА 1. Если при $l, j = 1, \dots, m$, $s = 0, 1, \dots, n$, положить

$$p_{ljs} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K_{js}(\zeta-s) \Phi_l(\zeta)}{\sigma_{j+1}(\zeta-s) \prod_{x=0}^{s-1} b(\zeta-x) \prod_{x=1}^{n-s+1} a(\zeta-n+x)} d\zeta, \quad (13)$$

то равенство (11) будет выполняться тождественно по ν . В (13) через Γ обозначен простой замкнутый кусочно гладкий положительно ориентированный контур, охватывающий все нули многочлена $\prod_{x=0}^n b(\zeta-x)$, и такой, что все нули многочлена $\prod_{x=1}^n a(\zeta-n+x)$ лежат в его внешности. Многочлен $\sigma_{m+1}(\zeta)$, входящий в правую часть (13) при $j = m$, совпадает с $b(\zeta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование контура Γ обеспечивается условием (2) и определением (3) многочленов $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$. Выпишем из работы [15] тождество (2.21), с. 287; применительно к нашему случаю это тождество выглядит так:

$$\frac{1}{\zeta - \nu} \prod_{x=1}^n \frac{a(\nu - n + x)}{a(\zeta - n + x)} = \sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^m \frac{K_{js}(\zeta - s) \sigma_j(\nu - s)}{a(\zeta - s + 1) \sigma_{j+1}(\zeta - s)} \times \\ \times \prod_{x=0}^{s-1} \frac{b(\nu - x)}{b(\zeta - x)} \prod_{x=1}^{n-s} \frac{a(\nu - n + x)}{a(\zeta - n + x)} + \frac{1}{\zeta - \nu} \prod_{x=0}^n \frac{b(\nu - x)}{b(\zeta - x)}.$$

Если это тождество умножить на $\Phi_l(\zeta)$ и затем проинтегрировать по контуру Γ , считая, что внутри этого контура лежит также и точка ν , то с учетом равенств

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi_l(\zeta)}{\zeta - \nu} \prod_{x=1}^n \frac{a(\nu - n + x)}{a(\zeta - n + x)} d\zeta = \Phi_l(\nu),$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi_l(\zeta)}{\zeta - \nu} \prod_{x=0}^n \frac{b(\nu - x)}{b(\zeta - x)} d\zeta = 0,$$

мы получим требуемое. Подробности доказательства см. в [15]. Лемма доказана.

Через $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от n (но, возможно, зависящие от α, m, ξ и от поля $\mathbb{I}$). Общим знаменателем некоторого множества чисел $X \subset \mathbb{I}$ назовем натуральное число q такое, что $qx \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$ для любого $x \in X$. Наименьший из таких знаменателей будем называть наименьшим общим знаменателем этого множества чисел.

ЛЕММА 2. *Наименьший общий знаменатель множества чисел*

$$p_{ljs}, \quad l, j = 1, \dots, m, \quad s = 0, 1, \dots, n, \quad (14)$$

оценивается сверху величиной $e^{\gamma_1 n} (n!)^{1/2}$; для модулей чисел (14) выполняется неравенство $|p_{ljs}| \leq e^{\gamma_2 n} (n!/s!)^{m-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $f_{ljs}(\zeta)$ обозначим подынтегральную функцию из правой части (13). Тогда

$$p_{ljs} = -\operatorname{Res}_{\zeta=\infty} f_{ljs}(\zeta) - \sum_{x=1}^{n-s+1} \operatorname{Res}_{\zeta=-(m-1)\alpha+n-x} f_{ljs}(\zeta). \quad (15)$$

Вычет функции $f_{ljs}(\zeta)$ относительно бесконечно удаленной точки можно вычислить без труда и убедиться, что общий наименьший знаменатель получившейся совокупности чисел при всевозможных значениях индексов l, j и s , указанных в (14), ограничен сверху величиной $e^{\gamma_3 n}$.

Оценку общего наименьшего знаменателя вычетов относительно конечных особых точек, входящих в правую часть (15), удобнее провести отдельно для различных значений индексов j и s . Пусть, например, $j = m$ и $1 \leq s \leq n$. В этом случае $K_{ms}(\zeta - s) = a(\zeta - s + 1)$, $\sigma_{m+1}(\zeta - s) = b(\zeta - s)$, и с учетом (3) и (12) мы получаем для вычета в точке $\zeta = -(m-1)\alpha + n - x_0$, $1 \leq x_0 \leq n - s$, такое выражение

$$\left. \frac{\prod_{x=0}^{mn+l-2} (\zeta - x)}{\prod_{x=0}^s (\zeta - x) \prod_{q=1}^{m-1} (\zeta - x + m\alpha + q/(m-1))} \right|_{\zeta=-(m-1)\alpha+n-x_0} \times \\ \times \lim_{\zeta \rightarrow -(m-1)\alpha+n-x_0} \frac{\zeta + (m-1)\alpha - n + x_0}{\prod_{x=1}^{n-s} (\zeta + (m-1)\alpha - n + x)} = \pm (m-1)^{(m-1)(s+1)} \cdot Q_1 Q_2,$$

где

$$Q_1 = \frac{\prod_{x=1}^{n-s-x_0} ((m-1)\alpha - n + s + x_0 + x) \prod_{x=1}^{x_0+l-2} ((m-1)\alpha + (m-1)n + x)}{(n-s-x_0)!(x_0-1)!},$$

$$Q_2 = \frac{\prod_{x=1}^{(m-1)n} ((m-1)\alpha + x)}{\prod_{x=0}^s \prod_{q=1}^{m-1} ((m-1)\alpha + (m-1)(n-x_0-x) + q)}.$$

Легко видеть, что все множители, входящие в знаменатель дроби Q_2 , сокращаются, и фактически остается лишь оценить общий наименьший знаменатель дроби Q_1 . Здесь надо привлечь теорию делимости в квадратичных полях; см., например, [23, глава III, § 8]. Через D обозначим абсолютную величину дискриминанта поля $\mathbb{I}$. Тогда существует гомоморфизм χ мультипликативной группы классов вычетов по модулю D , взаимно простых с D , в мультипликативную группу, состоящую из чисел -1 и 1 , такой, что если $\chi(p) = 1$, то простое число p разлагается в поле $\mathbb{I}$ в произведение двух простых идеалов, норма каждого из которых равна p . Ясно, что количество элементов в множестве $\chi^{-1}(1)$ равно $\phi(D)/2$. Далее, пусть число $u \in \mathbb{N}$, таково, что $u\alpha \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$. Тогда, рассуждая как при доказательстве леммы 3, [24, с. 196-197], мы получим, что числитель дроби Q_1 после умножения на u^{2n} делится на $p^{\left[\frac{n-s-x_0}{p}\right] + \left[\frac{x_0+l-2}{p}\right]}$, где p — простое число, не делящее D , и такое, что $\chi(p) = 1$. Теперь воспользуемся соотношением

$$\sum_{p \leq x, p \equiv t \pmod{D}} \frac{\ln p}{p} = \frac{1}{\phi(D)} \ln x + O(1), \quad (16)$$

в котором $(t, D) = 1$. По поводу доказательства см., например, [25, с. 129]. С помощью (16) нетрудно получить оценку

$$\prod_{p \leq n} p^{\frac{n}{p}} \geq (n!)^{\frac{1}{2}} e^{-\gamma_4 n}, \quad (17)$$

где произведение из левой части распространено на те простые числа p , не делящие D , для которых $\chi(p) = 1$. Суммируя все вышесказанное, получаем, что в качестве общего знаменателя дробей Q_1 при рассматриваемых значениях индексов j и s можно взять число

$$\frac{u^{\gamma_5 n} n!}{\prod_{p \leq n} p^{[n/p]-3}}, \quad (18)$$

где произведение распространено на указанные значения p , а γ_5 — соответствующим образом подобранное натуральное число. Мы видим, что в рассматриваемом случае указанная в лемме оценка общего наименьшего знаменателя справедлива. Аналогично можно разобрать и остальные случаи. Во всех этих случаях число (18) будет знаменателем соответствующей дроби Q_1 . Окончательная оценка сверху для общего наименьшего знаменателя чисел p_{ljs} следует из (17), (18) и из сделанного выше замечания по поводу вычета функции $f_{ljs}(\zeta)$ относительно $\zeta = \infty$. Оценка модулей чисел p_{ljs} вытекает непосредственно из (13). Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что если коэффициенты многочленов (7) определены равенствами (13), то линейная форма $R_l(z)$ имеет вид

$$R_l(z) = \sum_{\nu=mn+l-1}^{\infty} \Phi_l(\nu) \prod_{x=1}^{\nu-n} a(x) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)}. \quad (19)$$

Отсюда получаем такую оценку

$$|R_l(\xi)| \leq e^{\gamma_6 n} (n!)^{-(m-1)^2}.$$

4. Доказательство теоремы

Составим определитель из многочленов (7):

$$\Delta = \Delta(z) = |P_{lj}(z)|_{l,j=1,\dots,m}.$$

Внимательное рассмотрение правой части (13) показывает, что на главной диагонали такого определителя стоят многочлены степени n ; ниже главной диагонали – многочлены степени не больше n , а выше главной диагонали – многочлены, степени которых меньше n . Непосредственное вычисление показывает, что при этом

$$p_{11n} = -\operatorname{Res}_{\zeta=n-1-(m-1)\alpha} f_{11n}(\zeta) \neq 0, p_{lln} = -\operatorname{Res}_{\zeta=\infty} f_{11n}(\zeta) \neq 0, l = 2, \dots, m.$$

С другой стороны, умножив первый столбец определителя Δ на $F_1(z)$ и прибавив к нему остальные столбцы, умноженные соответственно на $F_j(z)$ при $j = 2, \dots, m$, мы получим новый определитель, отличающийся от Δ лишь тем, что его первый столбец составлен из функций $R_l(z)$. Поскольку из (19) следует, что такой определитель имеет при $z = 0$ порядок нуля, не меньший mn , то это же верно и для определителя Δ . Отсюда, учитывая все вышесказанное, получаем равенство

$$\Delta = Cz^{mn}, C \neq 0. \quad (20)$$

Пусть ξ – число, фигурирующее в теореме. Из (20) следует, что $\Delta(\xi) \neq 0$. Поэтому для любого нетривиального набора целых чисел $h_1, \dots, h_m$ из поля $\mathbb{I}$ одну из строк определителя $\Delta(\xi)$ можно заменить этим набором чисел так, чтобы получившийся определитель был по-прежнему отличен от нуля. Пусть, для определенности такой строкой будет первая:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_m \\ P_{21}(\xi) & P_{22}(\xi) & \dots & P_{2m}(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1}(\xi) & P_{m2}(\xi) & \dots & P_{mm}(\xi) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Из леммы 2 следует такая оценка модуля этого определителя снизу

$$|\Delta_1| \geq e^{-\gamma n} (n!)^{-(m-1)/2}. \quad (21)$$

Чтобы получить оценку модуля этого же определителя сверху, заметим сначала, что хотя бы одно из чисел $F_1(\xi), \dots, F_m(\xi)$ отлично от нуля: это следует из теоремы существования и единственности из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть, для определенности, $F_1(\xi) \neq 0$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{\Delta_1}{F_1(\xi)} = \frac{1}{F_1(\xi)} \begin{vmatrix} L & h_2 & \dots & h_m \\ R_2(\xi) & P_{22}(\xi) & \dots & P_{2m}(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_m(\xi) & P_{m2}(\xi) & \dots & P_{mm}(\xi) \end{vmatrix},$$

где $L = h_1 F_1(\xi) + \dots + h_m F_m(\xi)$. С помощью леммы 3 получаем теперь такую оценку

$$|\Delta_1| \leq |L| e^{\gamma n} (n!)^{(m-1)(m-2)} + H e^{\gamma n} (n!)^{-(m-1)}, \quad (22)$$

где H определено в условии теоремы. Из (21) и (22) можно без труда получить утверждение теоремы; см., например, окончание доказательства теоремы 1, [1, гл. 11, §2, с. 355-56].

5. Заключение

Исследование арифметических свойств значений функции (1) и ее производных, по-видимому, можно будет продолжить. Не исключено, что здесь возможно получение точных по высоте оценок линейных форм. Следует также рассмотреть совместные приближения, поскольку их применение во многих случаях дает лучшие результаты.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа М.: Наука, 1987.
2. Шидловский А.Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов // ДАН СССР. 1954. Т. 96, № 4. С. 697-700.
3. Шидловский А.Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E -функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка // ДАН СССР. 1966. Т. 169, № 1. С. 42-45.
4. Шидловский А.Б. Об алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E -функций. // Труды Московского математического общества. 1967. Т. 18. С. 55-64.
5. Белогривов И.И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E -функций // ДАН СССР. 1967. Т. 174, № 2. С. 267-270.
6. Чирский В.Г. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Вестник МГУ. Серия 1, математика, механика. 1978, № 5. С. 3-8.
7. Салихов В.Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E -функций // Acta Arithm. 1990. **53**:5. Р. 453-471.
8. Черепнев М.А. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E -функций // Математические заметки. 1995. **57**:6. С. 896-912.
9. Салихов В.Х. Критерий алгебраической независимости значений гипергеометрических E -функций (четный случай) // Математические заметки. 1998. **64**:2. С. 273-284.
10. Горелов В.А. Об алгебраической независимости значений обобщенных гипергеометрических функций // Математические заметки. 2013. **94**:1. С. 94-108.
11. Osgood Ch. F. Some theorems on diophantine approximation // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 123, № 1. Р. 64-87.
12. Галочкин А.И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций // Математические заметки. 1970. Т. 8, № 1. С. 19-28.
13. Галочкин А.И. Уточнение оценок некоторых линейных форм // Математические заметки. 1976. Т. 20, № 1. С. 35-45.
14. Галочкин А.И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, № 6. С. 1220-1235.
15. Иванков П.Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций // Математический сборник. 1991. Т. 182, № 2. С. 283-302.

16. Иванков П.Л. Оценки снизу линейных форм от значений функции Куммера с иррациональным параметром // Математические заметки. 1991. Т. 49, вып. 2. С. 55-63.
17. Иванков П.Л. Об оценках некоторых линейных форм // Известия вузов. Математика. 1993, № 2. С. 38-45.
18. Иванков П.Л. Об оценках мер линейной независимости некоторых чисел // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 3. С. 59-67.
19. Иванков П.Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1, № 1. С. 191-206.
20. Иванков П.Л. О приближении значений некоторых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами. Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, вып. 1. С. 108-116.
21. Galochkin A.I. On effective bounds for certain linear forms // New Advances in Transcendence theory. Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney. 1988. P. 207-215.
22. Galochkin A.I. Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions // Moscow journal of combinatorics and number theory. 2011. Vol. 1, iss. 2. P. 27-32.
23. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.
24. Иванков П.Л. О значениях гипергеометрических функций с различными иррациональными параметрами // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 11, № 6. 2005. С. 65-72.
25. Прахар К. Распределение простых чисел М.: Мир, 1967.

REFERENCES

1. Shidlovskii, A.B. 1987, "*Transtsendentnye chisla*", [Transcendental numbers] Nauka, Moscow, 448 pp. (Russian)
2. Shidlovskii, A.B. 1954, "On transcendentality and algebraic independence of the values of entire functions of certain class *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 96, № 4. pp. 697-700. (Russian)
3. Shidlovskii, A.B. 1954, "Transcendence and algebraic independence of values of *E*-functions satisfying linear nonhomogeneous differential equations of the second order *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 169, № 1. pp. 42-45. (Russian)
4. Shidlovskii, A.B. 1968, "Algebraic independence of the values of certain hypergeometric *E*-functions *Trudy Moskov. Mat. Obsh.*, vol. 18, № 4. pp. 55-64. (Russian)
5. Belogrivov I.I., 1967, "On transcendence and algebraic independence of values of certain hypergeometric *E*-functions *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 174, № 2. pp. 267-270. (Russian)
6. Chirsky V.G., 1978, "On arithmetic properties of the values of hypergeometric functions with irrational parameters *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Meh.* no. 5, pp. 3-8.
7. Salikhov V.Kh., 1990, "Irreducibility of hypergeometric equations and algebraic independence of values of *E*-functions 1990, *Acta Arithm.*, **53**:5, pp. 453-471.
8. Cherepnev M.A., 1995, "On algebraic independence of values of hypergeometric *E*-functions *Mat. Zametki*, vol. 57, no. 6, pp. 896-912.

9. Salikhov V.Kh., 1998, "Criterion for the algebraic independence of the values of hypergeometric E -functions (even case) *Mat. Zametki*, vol. 64, no. 2, pp. 273-284.
10. Gorelov V.A., 2013, "On algebraic independence of the values of hypergeometric functions *Mat. Zametki*, vol. 94, no. 1, pp. 94-108.
11. Osgood, Ch. F. 1966, "Some theorems on diophantine approximation" *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 123, no. 1, pp. 64-87.
12. Galochkin, A.I. 1970, "Lower estimates of the linear forms in the values of some hypergeometric functions *Mat. Zametki*, v. 8, no. 1, pp. 19-28. (Russian).
13. Galochkin, A.I. 1976, "Sharpening of the estimates of some linear forms *Mat. Zametki*, v. 20, no. 1, pp. 35-45. (Russian).
14. Galochkin, A.I. 1976, "On arithmetic properties of the values of some entire hypergeometric functions *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 17, no. 6, pp. 1220-1235. (Russian)
15. Ivankov, P.L., 1991 "On the arithmetic properties of the values of hypergeometric functions *Matematicheskij Sbornik*, v. 182, no. 2, pp. 283-302. (Russian).
16. Ivankov, P.L., 1991 "Lower estimates of the linear forms in the values of Kummer's function with irrational parameter *Matematicheskije Zametki*, v. 49, no. 2, pp. 55-63. (Russian).
17. Ivankov, P.L., 1993 "On the estimates of some linear forms *Izvestija vuzov. Matematika*, no. 2, pp. 38-45. (Russian).
18. Ivankov, P.L., 1994 "On the estimates of linear independence measure of some functions *Matematicheskije Zametki*, v. 55, no. 3, pp. 59-67. (Russian).
19. Ivankov, P.L., 1995 "On linear independence of the values of some functions *Fundamentalnaja i Prikladnaja Matematika*, v. 1, no. 1, pp. 191-206. (Russian).
20. Ivankov, P.L., 2016 "On approximation of the values of some hypergeometric functions with irrational parameters *Chebyshevskij Sbornik*, v. 17, no. 1, pp. 108-116. (Russian).
21. Galochkin, A.I. On effective bounds for certain linear forms // New Advances in Transcendence theory. Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney. 1988. P. 207-215.
22. Galochkin, A.I. Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions // Moscow journal of combinatorics and number theory. 2011. Vol. 1, iss. 2. P. 27-32.
23. Borevich, Z.I., Shafarevich, I.R. "*Teorija Chisel* [Number Theory] Nauka, Moscow, 504 pp. (Russian).
24. Ivankov, P.L., 2005 "On the values of hypergeometric functions with different irrational parameters *Fundamentalnaja i Prikladnaja Matematika*, v. 11, no. 6, pp. 65-72. (Russian).
25. Prachar, K. 1967, "*Raspredelenije prostych chisel* [Distribution of prime numbers] Mir, Moscow, 511 pp. (Russian)

Получено 30.11.2019 г.

Принято в печать 11.03.2020 г.