ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 517.977.57; 517.958 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-144-158

Оптимальное управление с обратной связью для одной модели движения нелинейно-вязкой жидкости[1]

В. Г. Звягин, А. В. Звягин, Н. М. Хонг

Звягин Виктор Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет (г. Воронеж).
e-mail: zvg_vsu@mail.ru
Звягин Андрей Викторович — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Воронежский государственный педагогический университет (г. Воронеж).
e-mail: zvyagin.a@mail.ru
Хонг Нгуен Минь — научный сотрудник, Научно-исследовательский институт математики Воронежского государственного университета (г. Воронеж).
e-mail: nmhong93@gmail.com

Аннотация

В работе рассматривается задача оптимального управления с обратной связью для начально-краевой задачи, описывающей движение нелинейно-вязкой жидкости. Доказывается существование оптимального решения, дающего минимум заданному функционалу качества. Для доказательства существования оптимального решения используется аппроксимационно-топологический метод исследования задач гидродинамики.

Ключевые слова: оптимальное управление с обратной связью, теорема существования, нелинейно-вязкая жидкость.

Библиография: 17 названия.

Для цитирования:
В. Г. Звягин, А. В. Звягин, Н. М. Хонг. Оптимальное управление с обратной связью для одной модели движения нелинейно-вязкой жидкости // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 144–158.

[1]Исследования первого автора выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00146, Теорема 1) и за счет гранта РФФИ в рамках научного проекта грант № 20-01-00051 (Леммы 1-2). Исследования второго автора выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта грант № 19-31-60014 (Теорема 2).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 517.977.57; 517.958 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-144-158

Optimal feedback control for one motion model of a nonlinearly viscous fluid

V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin, N. M. Hong

Zvyagin Viktor Grigor'evich — Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Voronezh State University (Voronezh).
e-mail: zvg_vsu@mail.ru
Zvyagin Andrey Viktorovich — Candidate of Physics and Mathematics, leading researcher, Voronezh State Pedagogical University (Voronezh).
e-mail: zvyagin.a@mail.ru
Hong Nguyen Minh — Researcher, Research Institute of Mathematics, Voronezh State University (Voronezh).
e-mail: nmhong93@gmail.com

Abstract

An optimal control problem with a feedback is considered for an initial boundary problem describing a motion of non-linearly viscous liquid. An existence of an optimal solution minimising a given quality functional is proved. A topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics is used in the proof of existence of an optimal solution.

Keywords: optimal control with feedback, existence theorem, nonlinearly viscous fluid.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin, N. M. Hong, 2020, "Optimal feedback control for one motion model of a nonlinearly viscous fluid" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 144–158.

Посвящается академику РАН Анатолию Тимофеевичу Фоменко по случаю 75-летия

1. Введение

Движение несжимаемой нелинейно–вязкой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset R^n$, $n = 2, 3$, на промежутке времени $[0, T]$ $(T < \infty)$ описывается следующей начально–краевой задачей:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \text{Div } \left[2\mu\big(I_2(v)\big)\varepsilon(v)\right] + \text{grad } p = f, \tag{1}$$

$$\text{div } v = 0, \qquad v|_{t=0} = v_0(x), \qquad v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \tag{2}$$

Здесь $v(x,t)$ — вектор–функция скорости частицы жидкости в точке $x \in \Omega$ в момент времени $t \in [0,T]$; p — функция давления в жидкости; f — плотность внешних сил; ε — тензор скоростей деформации $\varepsilon(v) = \big(\varepsilon_{ij}(v)\big)$, $\varepsilon_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$, тензор $I_2(v)$ определяется равенством:

$$I_2^2(v) = \varepsilon(v) : \varepsilon(v) = \sum_{i,j=1}^{n} \left[\varepsilon_{ij}(v)\right]^2.$$

Здесь для произвольных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ используется символ $A : B = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$. Символ $\mathrm{Div}\ M$ обозначающий дивергенцию тензора $M = (m_{ij})$, т. е. вектор

$$\mathrm{Div}\ M = \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial m_{1j}}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial m_{nj}}{\partial x_j}\Big).$$

Данная математическая модель подробно исследовалась в работах профессора В. Г. Литвинова (см. [1]), где приведены естественные ограничения на вязкость рассматриваемой среды через свойства функции $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$: $\mu(s)$ должна быть определенная при $s \geqslant 0$ непрерывно дифференцируемая скалярная функция, для которой выполнены неравенства

a) $0 < C_1 \leqslant \mu(s) \leqslant C_2 < \infty$;

b) $-s\mu'(s) \leqslant \mu(s)$ при $\mu'(s) < 0$;

c) $|s\mu'(s)| \leqslant C_3 < \infty$.

Здесь и далее через C_i обозначаются различные константы.

Вопрос существования решений для данной задачи рассматривался в работах В. Г. Литвинова (см., например, [1]), П. Е. Соболевского [2], В. Г. Звягина [3] и др. В работе [4] установлено существование траекторных и глобальных аттракторов для рассматриваемой начально-краевой задачи (1)–(2) в автономном случае.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления с обратной связью для системы уравнений (1)–(2). Исследованию задач управления посвящено большое количество работ (см. [5]-[7]). Однако, в то время как управление для линейных систем более или менее изучено, управление для нелинейных систем остается серьезной задачей (даже для конечномерных или локальных областей). На практике часто возникает задача управления (оптимального управления) движением жидкости при помощи внешних сил. Обычно при решении таких задач управление выбирается из некоторого заданного (конечного) множества управлений. В данной работе рассматривается управление внешними силами, которые зависят от скорости движения жидкости. Такие задачи называются задачами с обратной связью (см., например, [8]-[10] и приведенную там библиографию). Эта позволяет более точно выбирать управление, поскольку в данном случае управление выбирается не из конечного набора имеющихся управлений, а принадлежит образу некоторого многозначного отображения (естественно, что на это отображение накладываются некоторые условия), что может позволить более точно выбрать управление.

В данной работе изучается вопрос существования решений задачи управления с обратной связью для модели нелинейно–вязкой жидкости (1)–(2), а так же доказывается существование оптимального решения рассматриваемой задачи, дающего минимум заданному ограниченному функционалу качества.

2. Постановка задачи и основные результаты

Сначала введем основные обозначения и вспомогательные утверждения.

Через $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать множество измеримых вектор–функций $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$, суммируемых с p-ой степенью. Через $W_p^m(\Omega)$, $m \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, будем обозначать пространства Соболева. Через $C_0^\infty(\Omega)^n$ мы обозначим пространство бесконечно–дифференцируемых вектор–функций из Ω в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω. Обозначим через $\mathcal{V}$ множество $\{v \in C_0^\infty(\Omega)^n, \mathrm{div}\, v = 0\}$. Через H мы обозначим замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$, через V — по норме $W_2^1(\Omega)$.

Введем основное пространство, в котором будут изучаться слабые решения изучаемой задачи:

$$W_1 = \{v : v \in L_2(0,T,V) \cap L_\infty(0,T;H), v' \in L_1(0,T,V^*)\}.$$

Пространство W_1 снабжено нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0,T,V)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;H)} + \|v'\|_{L_1(0,T,V^*)}$.

Рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W_1 \multimap L_2(0,T,V^*)$ в качестве функции управления. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) Отображение Ψ определено на пространстве W_1 и имеет непустые, компактные и выпуклые значения;

(Ψ2) Отображение Ψ компактно и полунепрерывно сверху (т.е. для любой функции $v \in W_1$ и открытого множества $Y \subset L_2(0,T,V^*)$, такого что $\Psi(v) \subset Y$, существует окрестность $U(v)$ такая, что $\Psi(U(v)) \subset Y$);

(Ψ3) Отображение Ψ глобально ограничено, то есть существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0,T,V^*)} := \sup\{\|u\|_{L_2(0,T,V^*)} : u \in \Psi(v)\} \leq C \text{ для всех } v \in W_1;$$

(Ψ4) Отображение Ψ слабо замкнуто в следующем смысле: если $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset W_1, v_l \rightharpoonup v_0, u_l \in$ $\in \Psi(v_l)$ и $u_l \to u_0$ в $L_2(0,T,V^*)$ тогда $u_0 \in \Psi(v_0)$.

Будем рассматривать слабую постановку задачи управления с обратной связью для начально–краевой задачи (1)–(2). Под обратной связью мы понимаем условие

$$f \in \Psi(v). \tag{3}$$

Определение 1. *Пара функций $(v,f) \in W_1 \times L_2(0,T,V^*)$ называется слабым решением задачи с обратной связью (1)–(2), если она удовлетворяет при всех $\varphi \in V$ и п.в. $t \in [0,T]$ равенству*

$$\langle v', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + 2\int\limits_\Omega \mu(I_2(v))\varepsilon(v) : \varepsilon(\varphi)\, dx = \langle f, \varphi\rangle, \tag{4}$$

начальному условию $v(0) = v_0$ и условию обратной связи (3).

Здесь и далее $\langle v', \varphi\rangle = (\dfrac{\partial v}{\partial t}, \varphi)$.

Первым результатом работы является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть многозначное отображение Ψ удовлетворяет условиям $(\Psi 1)-(\Psi 4)$, а вязкость рассматриваемой среды удовлетворяет условиям $a)-c)$. Тогда существует хотя бы одно решение $(v_*, f_*) \in W_1 \times L_2(0,T,V^*)$ задачи с обратной связью (1)–(2), (3).*

Обозначим через $\Sigma \subset W_1 \times L_2(0,T;V^*)$ множество всех слабых решений задачи управления с обратной связью (1)–(2), (3). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Φ1) Существует число γ такое, что $\Phi(v,f) \geqslant \gamma$ для всех $(v,f) \in \Sigma$.

(Ψ2) Если $v_l \rightharpoonup v_*$ в W_1 и $f_l \to f_*$ в $L_2(0,T;V^*)$, то $\Phi(v_*, f_*) \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} \Phi(v_l, f_l)$.

Основным результатом работы является следующая теорема:

Теорема 2. *Если отображение Ψ удовлетворяет условиям* $(\Psi 1)$–$(\Psi 4)$, *вязкость рассматриваемой среды удовлетворяет условиям* a) – c), *а функционал Φ удовлетворяет условиям* $(\Phi 1), (\Phi 2)$, *тогда задача оптимального управления с обратной связью* (1)–(2), (3) *имеет хотя бы одно слабое решение* (v_*, f_*) *такое, что*

$$\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f).$$

Доказательство теорем 1 и 2 основано на аппроксимационно–топологическом методе исследования задач гидродинамики (см. [11], [12]). Для этого сначала переходят к операторной трактовке рассматриваемой задачи (операторному включению) в подходящих функциональных пространствах. Далее, в связи с тем, что операторы в полученном операторном включении не обладают необходимыми свойствами, рассматривается задача, аппроксимирующая исходную (в данном случае это тоже операторное включение, но с лучшим оператором, обладающим требуемыми свойствами и в более лучших функциональных пространствах). После чего на основе априорных оценок решений и теории топологической степени многозначных векторных полей доказывается существование решения аппроксимационной задачи. И, наконец, показывается, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в некотором смысле к решению исходного операторного включения. После доказательства разрешимости задачи управления показывается, что в множестве решений найдется хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества (именно поэтому данный вид задач называют задачами оптимального управления движением жидкости с обратной связью).

Работа организована следующий образом. В пункте 3 рассматривается операторная трактовка изучаемой задачи и доказываются необходимые свойства введенных операторов. В пункте 4 вводится аппроксимационная задача и изучаются улучшенные свойства новых операторов. В следующем пункте 5 на основе теории топологической степени многозначных отображений доказывается разрешимость аппроксимационной задачи и устанавливаются необходимые оценки решений аппроксимационной задачи. Пункт 6 посвящен предельному переходу и доказательству теоремы 1, а заключительный пункт 7 — доказательству теоремы 2.

3. Операторная трактовка

Дадим операторную трактовку рассматриваемой задачи. Введем операторы при помощи следующих равенств:

$$K : V \to V^*, \quad \langle K(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in V, \varphi \in V;$$

$$D : V \to V^*, \quad \langle D(v), \varphi\rangle = 2\int\limits_\Omega \mu(I_2(v))\varepsilon(v) : \varepsilon(\varphi)\, dx, \quad v \in V, \varphi \in V.$$

Тогда из (4) в силу произвольности функции φ получаем следующее операторное уравнение:

$$v'(t) + D(v) - K(v) = f. \tag{5}$$

Таким образом, слабое решение задачи с обратной связью (1)–(2), (3) – это решение $(v, f) \in W_1 \times L_2(0, T, V^*)$ операторного уравнения (5), удовлетворяющее начальному условию $v|_{t=0} = v_0$ и условию обратной связи (3).

Отметим некоторые свойства введенных выше операторов.

Лемма 1. *Отображение $K : L_2(0,T;V) \to L_1(0,T;V^*)$ непрерывно и справедлива оценка*

$$\|K(v(t))\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_4 \|u\|^2_{L_2(0,T;V)}.$$

Доказательство данного факта приведено в монографии [13].

Лемма 2. *Отображение $D : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ непрерывно и монотонно.*

Доказательство. Покажем непрерывность оператора D. Положив $z = v - u$ и используя теорему Лагранжа на интервале $[0,1]$ для функции $f(\delta) = \mu(I_2(u+\delta z))\varepsilon(u+\delta z) : \varepsilon(w)$, получим:

$$\langle D(v) - D(u), w\rangle = 2\int\limits_\Omega [\mu(I_2(v))\varepsilon(v) - \mu(I_2(u))\varepsilon(u)] : \varepsilon(w)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \frac{d}{d\delta}[\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(u+\delta_0 z)] : \varepsilon(w)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(z) + \frac{d}{d\delta}\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(u+\delta_0 z)\right] : \varepsilon(w)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(w) + \frac{\varepsilon(u+\delta_0 z) : \varepsilon(z)}{(\varepsilon(u+\delta_0 z) : \varepsilon(u+\delta_0 z))^{\frac12}} \frac{d\mu(I_2(u+\delta_0 z))}{dI_2(u+\delta_0 z)}\varepsilon(u+\delta_0 z) : \varepsilon(w)\right] dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(w) + \frac{1}{I_2(u+\delta_0 z)} \frac{d\mu(I_2(u+\delta_0 z))}{dI_2(u+\delta_0 z)}(\varepsilon(u+\delta_0 z) : \varepsilon(z))(\varepsilon(u+\delta_0 z) : \varepsilon(w))\right] dx.$$

Следовательно

$$|\langle D(v) - D(u), w\rangle| \leqslant 2\Big|\int\limits_\Omega \mu(I_2(u+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(w)\,dx\Big| +$$

$$+2\left|\int\limits_\Omega I_2(u+\delta_0 z)\frac{d\mu(I_2(u+\delta_0 z))}{dI_2(u+\delta_0 z)} I_2(z) I_2(w)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2C_5\left(\int\limits_\Omega I_2^2(z)\,dx\right)^{\frac12}\left(\int\limits_\Omega I_2^2(w)\,dx\right)^{\frac12} + 2C_5\left(\int\limits_\Omega I_2^2(z)\,dx\right)^{\frac12}\left(\int\limits_\Omega I_2^2(w)\,dx\right)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \|z\|_{L_2(\Omega)} \|w\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_7 \|z\|_V \|w\|_V.$$

Следовательно, $\|D(v) - D(u)\|_{V^*} \leqslant C_7\|v-u\|_V$. Таким образом, оператор $D : V \to V^*$ непрерывен. Последнее неравенство выполнено для почти всех $t \in (0,T)$, возведем его в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T, получим

$$\int\limits_0^T \|D(v) - D(u)\|^2_{V^*}\,dx \leqslant C_7 \int\limits_0^T \|v-u\|^2_V\,dx.$$

Так как $\|v-u\|_V \in L_2(0,T)$, то $\|D(v)-D(u)\|_{V^*} \in L_2(0,T)$ и, следовательно, $D(v)-D(u) \in$ $\in L_2(0,T;V^*)$. Из последней оценки следует требуемое неравенство:

$$\|D(v) - D(u)\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant C_7\|v-u\|_{L_2(0,T;V)}.$$

Теперь покажем монотонность оператора $D(v)$. Здесь также применим теорему Лагранжа к той же функции, что и выше.

$$\langle D(v) - D(u), v-u\rangle = 2\int\limits_\Omega [\mu(I_2(v))\varepsilon(v) - \mu(I_2(u))\varepsilon(u)] : \varepsilon(v-u)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \frac{d}{d\delta}[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(v+\delta_0 z)] : \varepsilon(z)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z) + \frac{d}{d\delta}\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(v+\delta_0 z)\right] : \varepsilon(z)\,dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(z) + \frac{d}{d\delta}\mu((\varepsilon(v+\delta_0 z) : \varepsilon(v+\delta_0 z))^{\frac12})\varepsilon(v+\delta_0 z) : \varepsilon(z)\right]\,dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(z) + \frac{\varepsilon(v+\delta_0 z) : \varepsilon(z)}{(\varepsilon(v+\delta_0 z) : \varepsilon(v+\delta_0 z))^{\frac12}}\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}\varepsilon(v+\delta_0 z) : \varepsilon(z)\right] dx =$$

$$= 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(z) + \frac{1}{I_2(v+\delta_0 z)}\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}(\varepsilon(v+\delta_0 z) : \varepsilon(z))^2\right]\,dx.$$

Если $\dfrac{d\mu(s)}{ds} \geqslant 0$, тогда подынтегральная функция больше либо равна нулю. Следовательно

$$\langle D(u) - D(v), u-v\rangle \geqslant 0.$$

Если $\dfrac{d\mu(s)}{ds} \leqslant 0$, используя $s\dfrac{d\mu(s)}{ds} \geqslant -\mu(s)$, получим требуемое неравенство:

$$2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(z) + \frac{1}{I_2(v+\delta_0 z)}\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}(\varepsilon(v+\delta_0 z) : \varepsilon(z))^2\right]\,dx \geqslant$$

$$\geqslant 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(z) + \frac{I_2(v+\delta_0 z)}{I_2^2(v+\delta_0 z)}\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}I_2^2(v+\delta_0 z)I_2^2(z)\right]\,dx \geqslant$$

$$\geqslant 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))\varepsilon(z) : \varepsilon(z) + I_2(v+\delta_0 z)\frac{d\mu(I_2(v+\delta_0 z))}{dI_2(v+\delta_0 z)}I_2^2(z)\right]\,dx \geqslant$$

$$\geqslant 2\int\limits_\Omega \left[\mu(I_2(v+\delta_0 z))I_2^2(z) - \mu(I_2(v+\delta_0 z))I_2^2(z)\right]\,dx \geqslant 0,$$

что и завершает доказательство данной леммы. $\square$

4. Аппроксимационная задача

Рассмотрим оператор $K_\delta(v)$, аппроксимирующий оператор $K(v)$:

$$K_\delta : V \to V^*, \quad \langle K_\delta(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{v_i v_j}{1+\delta|v|^2}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx, \quad v \in V,\, \varphi \in V.$$

Здесь $|v|^2 = \sum_{i=1}^n v_i v_i$ и δ — положительная константа.

Рассмотрим аппроксимационную задачу, заменяя в операторном уравнении (5) оператор $K(v)$ на оператор $K_\delta(v)$. По аналогии определения слабого решения исходной задачи, дадим определение слабого решения аппроксимационной задачи. Для этого введем пространство

$$W = \{v : \, v \in L_2(0,T;V), \, v' \in L_2(0,T;V^*)\}$$

с нормой $\|v\|_W = \|v\|_{L_2(0,T;V)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^*)}$.

Определение 2. *Пара функций $(v,f) \in W \times L_2(0,T,V^*)$ называется слабым решением аппроксимационной задачи с обратной связью, если она удовлетворяет операторному равенству*

$$v'(t) + D(v) - K_\delta(v) = f, \tag{6}$$

начальному условию $v(0) = v_0$ и условию обратной связи

$$f \in \Psi(v). \tag{7}$$

Приведем свойства аппроксимационного оператора $K_\delta(v)$, доказанные в монографии [14]:

Лемма 3. *1. Для любого $\delta > 0$ отображение $K_\delta : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ корректно определено, непрерывно и справедлива оценка*

$$||K_\delta(v)||_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant \frac{C_8}{\delta} \tag{8}$$

с некоторой константой C_8, не зависящей от v.

2. Для любого $\delta > 0$ отображение $K_\delta : W \to L_2(0,T;V^*)$ вполне непрерывно.

3. Для любого $\delta \geqslant 0$ справедлива оценка

$$||K_\delta(v)||_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_9|v||^2_{L_2(0,T;V)}$$

с некоторой константой C_9, не зависящей от v и δ.

Для дальнейшего исследования введем новые операторы:

$$\begin{aligned} &\mathbf{L} : W \to L_2(0,T;V^*) \times H, \qquad &&\mathbf{L}(v) = (v' + D(v), v|_{t=0}); \\ &\mathbf{K}_\delta : W \subset L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*) \times H, \quad &&\mathbf{K}_\delta(v) = (K_\delta(v), 0); \\ &\mathbf{\Psi} : W \to L_2(0,T;V^*) \times H, \quad &&\mathbf{\Psi}(v) = (\Psi(v), v_0) \end{aligned}$$

и запишем аппроксимационную задачу в более компактном виде:

$$\mathbf{L}(v) - \mathbf{K}_\delta(v) \in \mathbf{\Psi}(v). \tag{9}$$

Исследуем свойства оператора $\mathbf{L}$.

Лемма 4. *Нелинейное отображение $\mathbf{L} : W \to L_2(0,T;V^*) \times H$, корректно определено, обратимо и справедлива оценка*

$$\|v\|_W \leqslant C_{10}\|\mathbf{L}(v)\|_{L_2(0,T;V^*)\times H}, \tag{10}$$

для любых $v \in W$ и некоторой константы C_{10}. Обратный оператор $\mathbf{L}^{-1} : L_2(0,T;V^*) \times H \to W$ непрерывен и

$$\|\mathbf{L}^{-1}(f,v_0)\|_W \leqslant C_{11}(\|v_0\|_H + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)}).$$

Доказательство.

Оператор взятия производной непрерывен, это следует из определения пространства W, оператор $D(v)$ непрерывен по доказанному выше. Так как вложение $W \subset C([0,T],H)$ непрерывно (см. [13]), то оператор взятия следа функции $v|_{t=0}$ корректно определен и непрерывен, а следовательно, корректно определен и непрерывен оператор $\mathbf{L}$.

Докажем оценку (10). Для $v \in W$ обозначим $\mathbf{L}(v) = (\hat{f}, \hat{v}_0)$. При каждом фиксированном $t \in [0,T]$ применим функционалы $v' + D(v) = \hat{f}$ к функции $v(t) \in V$

$$\langle v'(t), v(t)\rangle + \langle D(v), v(t)\rangle = \langle \hat{f}(t), v(t)\rangle.$$

Так как

$$\langle v'(t), v(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2;$$
$$\langle \hat{f}(t), v(t)\rangle_V \leqslant \|\hat{f}(t)\|_{V^*}\|v(t)\|_V;$$
$$\langle D(v), v(t)\rangle = 2\int\limits_\Omega \mu(I_2(v))\varepsilon(v) : \varepsilon(v)\,dx \geqslant 2C_{12}\int\limits_\Omega \varepsilon(v) : \varepsilon(v)\,dx \geqslant C_{12}||v||_V^2.$$

Последнее неравенство выполнено в силу первого неравенства Корна (см. [15], Часть 1, Пункт 12).

Проинтегрируем полученное неравенство по переменной t на отрезке $[0,t]$. Используя начальное условие для функции $v(t)$ и неравенство Коши $a\cdot b \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$ $(\forall \varepsilon, a, b > 0)$, приходим к оценке:

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|\hat{v}^0\|_H^2 + C_{12}\int_0^t \|v(\tau)\|_V^2 d\tau \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \|\hat{f}(t)\|_{V^*}^2 d\tau + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^t \|v(\tau)\|_V^2 d\tau$$

теперь выбирая $\varepsilon = C_{12}$, получаем

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}C_{12}\int_0^t \|v(\tau)\|_V^2 d\tau \leqslant \frac{1}{2}\|\hat{v}^0\|_H^2 + \frac{1}{2C_{12}}\int_0^t \|\hat{f}(t)\|_{V^*}^2 d\tau,$$

умножим обе части неравенства на 2 и вычислим максимум по $t \in [0,T]$, получим

$$\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_H^2 + C_{12}\|v\|_{L_2(0,T;V)}^2 \leqslant \|\hat{v}^0\|_H^2 + \frac{1}{C_{12}}\|\hat{f}\|_{L_2(0,T;V^*)}^2$$

Используя неравенство $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, $a, b > 0$, отсюда нетрудно получить итоговую оценку

$$\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_H + \|v\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{13}(\|\hat{v}^0\|_H + \|\hat{f}\|_{L_2(0,T;V^*)})$$

с некоторой константой C_{13}.

Для того, чтобы оценить$\|v'\|_{L_2(0,T;V^*)}$, воспользуемся равенством $v' = -D(v) + \hat{f}$, оценкой $\|D(v)\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant C_{14}\|v\|_{L_2(0,T;V)}$ и полученной выше оценкой

$$\|v'\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant \|\hat{f}\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|D(v)\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant \|\hat{f}\|_{L_2(0,T;V^*)} + C_{14}\|v\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant$$
$$\leqslant C_{15}(\|\hat{v}^0\|_H + \|\hat{f}\|_{L_2(0,T;V^*)}).$$

Таким образом, мы получаем требуемую оценку

$$\|v\|_W = \|v\|_{L_2(0,T;V)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant C_{15}\left(\|\hat{v}_0\|_H + \|\hat{f}\|_{L_2(0,T;V^*)}\right) = C_{15}\|\mathbf{L}(v)\|_{L_2(0,T;V^*)\times H}$$

с некоторой константой C_{15}.

Для доказательства обратимости отображения $\mathbf{L}$ достаточно применить теорему (см [16], Глава 4, Теорема 1.1). Так как, оператор $D : V \to V^*$ непрерывен и монотонен, то все условия теоремы выполнены. Применение теоремы показывает, что для каждого $(\hat{f}, \hat{v}_0)$ существует решение $v \in L_2(0,T;V)$, а следовательно, $v \in W$. Таким образом, оператор $\mathbf{L}$ обратим. Переписывая оценку (10) в виде

$$\|\mathbf{L}^{-1}(\hat{f}, \hat{v}_0)\|_W \leqslant C_{10}(\|\hat{v}^0\|_H + \|\hat{f}\|_{L_2(0,T;V^*)})$$

получаем, что оператор $\mathbf{L}^{-1}$ непрерывен.

□

Из последней леммы следует, что изучение операторного включения (9) эквивалентно исследованию задачи о неподвижной точке следующего включения:

$$v \in F(v), \tag{11}$$

где $F : W \to W$ и определен:

$$F(v) = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{K}_\delta(v) + \mathbf{\Psi}(v)).$$

5. Разрешимость аппроксимационной задачи

Теорема 3. *Операторное включение* (11) *имеет хотя бы одно решение* $v \in W$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы рассмотрим семейство аппроксимационных задач:

$$v' + D(v) - \lambda K_\delta(v) \in \lambda\Psi(v), \qquad \lambda \in [0,1], \tag{12}$$

или в компактной форме:

$$v \in G(v), \tag{13}$$

где $G(v) = \mathbf{L}^{-1}(\lambda\mathbf{K}_\delta(v) + \lambda\mathbf{\Psi}(v))$. Заметим, что данное семейство совпадает с изучаемой задачей (11) при $\lambda = 1$.

Покажем, что определена топологическая степень deg $(G, \bar{B}_R, 0)$ (см. [17]) для многозначного отображения G на шаре $\bar{B}_R \subset W$ достаточно большого радиуса R и отлична от нуля.

Если $v \in W$ – решение одного из уравнений (12), то в силу оценок (8) и (10) и условий $(\Psi 1) - (\Psi 4)$ имеем

$$||v||_W \leqslant C_{11}||\mathbf{K}_\delta(v) + (f, v_0)||_{L_2(0,T;V^*)\times H} \leqslant$$
$$\leqslant C_{11}\left(||\mathbf{K}_\delta(v)||_{L_2(0,T;V^*)} + ||f||_{L_2(0,T;V^*)} + ||v_0||_H\right) \leqslant C_{11}\left(\frac{C_8}{\delta} + C_{16} + ||v_0||_H\right).$$

Выберем $R > C_{11}\left(\frac{C_8}{\delta} + C_{16} + ||v_0||_H\right)$, тогда ни одно решение включения (13) не принадлежит границе шара $B_R \subset W$. Поэтому отображение $G : W \times [0,1] \to W$ определяет гомотопию многозначных отображений на B_R. Следовательно, топологическая степень $deg(G, \bar{B}_R, 0)$ определена для каждого значения $\lambda \in [0,1]$ и в силу свойства гомотопической инвариантности степени имеем

$$deg(G, \bar{B}_R, 0) = deg(F, \bar{B}_R, 0) = deg(I, \bar{B}_R, 0) = 1.$$

так как $0 \in B_R$. Отличие от нуля степени отображения F обеспечивает существование решения операторного включения (11), а, следовательно, существование решения включения (9) и аппроксимационной задачи. □

Теорема 4. *Для любого решения $v_\delta \in W$, $\delta > 0$, операторного включения (11) справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]} \|v_\delta(t)\|_H + \|v_\delta\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{17} \left(\|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v_{\delta_0}\|_H\right), \tag{14}$$

$$\|v'_\delta\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_{18} \left(1 + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v_{\delta_0}\|_H\right)^2, \tag{15}$$

с константами C_{17} и C_{18}, не зависящими от δ.

Доказательство. Пусть $v_\delta \in W$ решение операторного включения (11), существующего по предыдущей теореме для некоторого $\delta > 0$. Повторяя рассуждения доказательства оценки (10) и используя тот факт, что $\langle K_\delta(v_\delta(t)), v_\delta(t)\rangle = 0$ для всех $t \in [0,T]$, отсюда нетрудно получить требуемую оценку:

$$\max_{t\in[0,T]} \|v_\delta(t)\|_H + \|v_\delta\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant C_{17} \left(\|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v_{\delta_0}\|_H\right).$$

Для того, чтобы оценить $\|v'_\delta\|_{L_1(0,T;V^*)}$, воспользуемся равенством $v'_\delta = -D(v_\delta) + K_\delta(v_\delta) + f$. Отсюда

$$\|v'_\delta\|_{L_1(0,T;V^*)} \leq \|D(v_\delta)\|_{L_1(0,T;V^*)} + \|K_\delta(v_\delta)\|_{L_1(0,T;V^*)} + \|f\|_{L_1(0,T;V^*)}. \tag{16}$$

Используя непрерывность вложение $L_2(0,T;V^*) \subset L_1(0,T;V^*)$, с помощью неравенства Коши и оценки $\|D(v_\delta)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_{14}\|v_\delta\|_{L_2(0,T;V)}$ получим

$$\|D(v_\delta)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_{14}\|D(v_\delta)\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant C_{19}\|v_\delta\|_{L_2(0,T;V)}, \quad \|f\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant \sqrt{T}\|f\|_{L_2(0,T;V^*)}.$$

Кроме того, для $\|K_\delta(v_\delta)\|_{L_1(0,T;V^*)}$ имеется оценку:

$$\|K_\delta(v_\delta)\|_{L_1(0,T;V^*)} \leqslant C_{20}\|v_\delta\|^2_{L_2(0,T;V)}.$$

Подставляя полученные оценки в неравенство (16) и используя оценку (14), получим:

$$\begin{aligned}\|v'_\delta\|_{L_1(0,T;V^*)} &\leq C_{19}\|v_\delta\|_{L_2(0,T;V)} + C_{20}\|v_\delta\|^2_{L_2(0,T;V)} + \sqrt{T}\|f\|_{L_2(0,T;V^*)} \leqslant \\ &\leqslant C_{21}\left(1 + \|f\|_{L_2(0,T;V^*)} + \|v_{\delta_0}\|_H\right)^2.\end{aligned}$$

□

6. Доказательство теоремы 1

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1 о существовании слабых решений исходной задачи, сформулируем утверждение о предельном переходе для оператора K_δ.

Лемма 5. *Если последовательность $\{v_l\}_{l=1}^\infty$, $v_l \in L_2(0,T;V)$, удовлетворяет условиям:*

$$v_l \rightharpoonup v_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V),$$
$$v_l \to v_* \text{ почти всюду в } Q_T,$$
$$v_l \to v_* \text{ сильно в } L_2(Q_T),$$

тогда

$$K_\delta(v_l) \dashrightarrow K(v_*) \text{ в смысле распределений при } l \to \infty,\ \delta \to 0.$$

Доказательство данной леммы можно найти в [14] (Глава 5, Лемма 5.3).

Итак, докажем теорему 1 о существование решений задачи управления с обратной связью (1)–(2), (3).

Возьмем произвольную последовательность положительных чисел $\{\delta_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\delta_l \to 0$. Для каждого δ_l известно, что соответствующая аппроксимационная задача (11) имеет, по крайней мере, одно решение $v_l \in W$.

Из оценки (14) следует, что $\{v_l\}$ ограничена по норме $\|\cdot\|_{L_2(0,T;V)}$ и $\|\cdot\|_{L_\infty(0,T,H)}$, а из оценки (15) последовательность $\{v_l'\}$ ограничена по норме пространства $L_1(0,T;V^*)$. Тогда, не уменьшая общности рассуждений, будем полагать что:

$$v_l \rightharpoonup v_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V),$$
$$v_l \rightharpoonup \ ^*\text{- слабо в } L_\infty(0,T;H),$$
$$v_l \to v_* \text{ сильно в } L_2(Q_T),$$
$$v_l \to v_* \text{ почти всюду } Q_T,$$
$$v_l' \rightharpoonup v_*' \text{ в смысле распределений.}$$

Так как оператор D слабо непрерывен, то будем полагать, что $D(v_l) \rightharpoonup D(v_*)$слабо в $L_2(0,T;V^*)$, а следовательно, в смысле распределений со значениями в V^*.

В силу леммы (5) выполнена следующая сходимость:

$$K_{\delta_l}(v_l) \dashrightarrow K(v_*) \text{ в смысле распределений.}$$

Принимая во внимание оценки (14), (15) и условия $(\Psi1)-(\Psi4)$, без ограничения общности можем предположить, что существует $f_* \in L_2(0,T;V^*)$ такое, что $f_l \to f_* \in \Psi(v_*)$ при $l \to \infty$.

Таким образом, переходя в каждом из членов равенства

$$v_l' + D(v_l) - K_{\delta_l}(v_l) = f_l \in \Psi(v_l)$$

к пределу при $l \to \infty$, получим, что предельные функции (v_*, f_*) удовлетворяют равенству

$$v_*' + D(v_*) - K(v_*) = f_* \in \Psi(v_*),$$

а также переходя в начальном условии $v_l(0) = v_0$ к пределу при $l \to \infty$, получим что v_* удовлетворяет начальному условию $v_*(0) = v_0$.

Следовательно, (v_*, f_*) — слабое решение задачи управления с обратной связью (1)–(2), (3). Заметим, что так как $v_* \in L_2(0,T;V) \cap L_\infty(0,T;H)$, то из равенства (5) следует, что $v_*' \in L_1(0,T;V^*)$.

7. Доказательство теоремы 2

Из теоремы 1 получаем, что множество решений непусто. Следовательно, существует минимизирующая последовательность $(v_l, f_l) \in \Sigma$ такая, что

$$\lim_{l\to\infty} \Phi(v_l, f_l) = \inf_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v,f).$$

Как и ранее при доказательстве теоремы 1 из оценок (14), (15) следует:

$$v_l \rightharpoonup v_* \text{ слабо в } L_2(0,T;V),$$
$$v_l \rightharpoonup \ ^*\text{- слабо в } L_\infty(0,T;H),$$
$$v_l \to v_* \text{ сильно в } L_2(Q_T),$$
$$v_l \to v_* \text{ почти всюду } Q_T,$$
$$v_l' \rightharpoonup v_*' \text{ в смысле распределений,}$$
$$f_l \to f_* \in \Psi(v_*) \text{ сильно в } L_2(0,T;V^*).$$

Отсюда аналогично получаем:

$$D(v_l) \rightharpoonup D(v_*) \text{ слабо в } L_2(0,T;V^*),$$
$$K(v_l) \dashrightarrow K(v_*) \text{ в смысле распределений.}$$

Переходя к пределу в соотношении

$$v_l' + D(v_l) - K(v_l) = f_l \in \Psi(v_l),$$

получаем что $(v_*, f_*) \in \Sigma$. Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, имеем

$$\Phi(v_*, f_*) \leqslant \inf_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f).$$

Таким образом, (v_*, f_*) — требуемое решение, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литвинов В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. — М.: Наука, 1982.

2. Соболевский П. Е. Существование решений математической модели нелинейно вязкой жидкости // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285, № 1. — С. 44—48.

3. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. The topological degree method for equations of the Navier–Stokes type // Abstract and Applied Analysis. — 1997. — V. 2, № 1. — P. 1—45.

4. Звягин В.Г., Казначеев М.В. Аттракторы автономной модели нелинейно–вязкой жидкости // Доклады РАН. — 2020 (принята к печати).

5. Lions J. L. Optimal control of systems governed by partial differential equations. — Berlin: Springer, 1971.

6. Abergel F., Temam R. On some control problems in fluid mechanics // Theor. Comput. Fluid Dyn. — 1990. — V. 1, № 6. — P. 303—325.

7. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Университетская серия, 5, Научная книга, 1999.

8. Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A. On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems // J. Fixed Point Theory and Appl. — 2014. — V.16. — P. 27—82.

9. Звягин А.В. Оптимальное управление с обратной связью для термовязкоупругой модели движения жидкости Фойгта // Доклады РАН. — 2016. — Т. 468, № 3. — С. 251—253.

10. Звягин А.В. Оптимальное управление с обратной связью для альфа–модели Лере и альфа–модели Навье–Стокса // Доклады РАН. — 2019. — Т. 486, № 5. — С. 527—530.

11. Звягин В.Г. Аппроксимационно–топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики // Соврем. матем. Фундам. направления. — 2012. Т. 46. — С. 92—119.

12. Звягин В.Г., Турбин М.В. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. — М: КРАСАНД, 2012.

13. Темам Р. Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ. — М: Мир, 1971.

14. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. Аппроксимационно–топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье–Стокса. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

15. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. — М: Мир, 1974.

16. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные оператоные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М: Мир, 1978.

17. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces. — Berlin: Walter de Gruyter, 2001.

REFERENCES

1. Litvinov V.G., “Motion of nonlinear viscous fluid”, M.: Nauka, 1982.

2. Sobolevskii P.E., “The Existence of Solutions of a Mathematical Model of a Nonlinear Viscous Fluid”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **285** (1985), 44–48.

3. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G., “The topological degree method for equations of the Navier–Stokes type”, *Abstract and Applied Analysis*,**2**:1 (1997), 1–45.

4. Zvyagin V.G., Treasurer M.V., “Attractors of an autonomous model of a nonlinearly viscous fluid”, *Doklady RAS*, 2020 (accepted for publication).

5. Lions J. L., “Optimal control of systems governed by partial differential equations”, Berlin: Springer, 1971.

6. Abergel F., Temam R., “On some control problems in fluid mechanics”, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, **1**:6 (1990), 303–325.

7. Fursikov A. V., “Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications”, Transl. Math. Monogr. 187, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

8. Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A., “On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems”, *J. Fixed Point Theory and Appl.* **16** (2014), 27–82.

9. Zvyagin A. V., “Optimal feedback control for a thermoviscoelastic model of Voigt fluid motion”, *Dokl. Math.*, **93**:3 (2016), 270-272.

10. Zvyagin A. V., "Optimal feedback control for Leray and Navier-Stokes alpha models *Dokl. Math.*, **99**:3 (2019), 299-302.

11. Zvyagin V. G., “Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics”, *J. Math. Sci.*, **201**:6 (2014), 830-858.

12. Zvyagin V. G., Turbin M. V., “Mathematical problems in the hydrodynamics of viscoelastic media”, Moscow: KRASAND, 2012.

13. Temam R., “Navier-Stokes Equation: Theory and Numerical Analysis”, North-Holland, 1977.

14. Zvyagin V. G., Dmitrienko V.T., “Topological Approximation Approach to the Study of Hydrodynamical Problems. The Navier–Stokes System” [in Russian], Moscow: URSS Editorial, 2004.

15. Ficker G., “Existence Theorems in the Theory of Elasticity”, Moscow: Mir, 1974 [Russian translation]

16. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K., “Nichtlineare operatorgleichungen und operator differentialgleichungen”, Berlin: Akad Verlag, 1974.

17. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P., “Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces.” Berlin: Walter de Gruyter, 2001.

Получено 1.03.2020 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.