ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 2 (2013)

УДК 511

ТОЧНЫЕ КВАДРАТЫ ВИДА $[\alpha n]$

Д. В. Горяшин (г. Москва)

Аннотация

В работе доказывается асимптотическая формула для числа точных квадратов в последовательности $[\alpha n]$ для иррациональных чисел α , имеющих ограниченные неполные частные или являющихся алгебраическими.

Ключевые слова: точные квадраты, числовая последовательность, асимптотическая формула, тригонометрические суммы, суммы Вейля.

PERFECT SQUARES OF THE FORM $[\alpha n]$

D. V. Goryashin (Moscow)

Abstract

An asymptotic formula is proved for the number of perfect squares in the sequence $[\alpha n]$ for algebraic numbers α and irrational numbers α with restricted partial quotients.

Keywords: perfect squares, Beatty sequence, asymptotic formula, exponential sums, Weyl sums.

Пусть α — иррациональное число. Рассмотрим задачу о нахождении асимптотической формулы для количества S точных квадратов в последовательности $[\alpha n]$, $n \leq N$ при $N \rightarrow \infty$. Обозначим

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = k^2 \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда S равно значению суммы

$$S = S(\alpha, N) = \sum_{n \leq N} \delta([\alpha n]).$$

Отметим, что задачам об асимптотическом поведении аналогичных сумм с различными арифметическими функциями посвящены работы многих авторов (см. [2–7]).

В настоящей работе мы доказываем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть иррациональное число α имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $N \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$S = \sum_{n \leq N} \delta([\alpha n]) = \sqrt{\frac{N}{\alpha}} + O\left(N^{\frac{1}{4} + \varepsilon}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $m = [\alpha n]$ равносильно тому, что $\alpha n - 1 < m < \alpha n$, $\frac{m}{\alpha} < n < \frac{m}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$, т.е. $\{\frac{m}{\alpha}\} > 1 - \frac{1}{\alpha}$. Пусть функция $\omega(x)$ задана на полуинтервале $(0; 1]$ следующим образом:

$$\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 - \frac{1}{\alpha} < x < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 1 - \frac{1}{\alpha} \text{ или } x = 1; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

и продолжена периодически на всю числовую ось. Тогда

$$\sum_{n \leq N} \delta([\alpha n]) = \sum_{\substack{m \leq \alpha N \\ \{\frac{m}{\alpha}\} > 1 - \frac{1}{\alpha}}} \delta(m) = \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) \omega\left(\frac{m}{\alpha}\right).$$

Поскольку $\omega(x) = \frac{1}{\alpha} + \rho(x + \frac{1}{\alpha}) - \rho(x)$, где $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, получаем

$$\sum_{k \leq N} \delta([\alpha n]) = \frac{1}{\alpha} \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) + \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) \rho\left(\frac{m+1}{\alpha}\right) - \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) \rho\left(\frac{m}{\alpha}\right).$$

Первое слагаемое в правой части даёт главный член асимптотики:

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) = \frac{1}{\alpha} [\sqrt{\alpha N}] = \sqrt{\frac{N}{\alpha}} + O(1).$$

Рассмотрим теперь второе и третье слагаемые. Обозначим их через

$$R = \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) \rho\left(\frac{m+1}{\alpha}\right) - \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) \rho\left(\frac{m}{\alpha}\right)$$

и воспользуемся следующей леммой о разложении функции $\rho(x)$ в ряд Фурье (см. [1]).

ЛЕММА 1. При всех $P \geq 2$ для функции $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$ имеет место разложение

$$\rho(x) = \sum_{1 \leq |k| \leq P} \frac{e^{2\pi i k x}}{2\pi i k} + O(r(x)),$$

где

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + P^2 \sin^2 \pi x}} = \sum_{1 \leq |k| \leq P \ln P} c_k e^{2\pi i k x} + O\left(\frac{\ln P}{P}\right), \quad c_k \ll \frac{\ln P}{P} e^{-|k|/P}.$$

Применяя эту лемму к сумме R , получаем:

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) \left(\rho \left(\frac{m+1}{\alpha} \right) - \rho \left(\frac{m}{\alpha} \right) \right) = \\
&= \left(\sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) \sum_{1 \leq |k| \leq P} \frac{e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}}}{2\pi i k} \left(e^{2\pi i \frac{k}{\alpha}} - 1 \right) + \right. \\
&\quad \left. O \left(\sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) \left(r \left(\frac{m+1}{\alpha} \right) + r \left(\frac{m}{\alpha} \right) \right) \right) \right) = \\
&= \sum_{1 \leq |k| \leq P} \frac{e^{2\pi i \frac{k}{\alpha}} - 1}{2\pi i k} \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}} + O \left(\sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) \left(r \left(\frac{m+1}{\alpha} \right) + r \left(\frac{m}{\alpha} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Параметр P выберем позднее, а пока считаем, что $2 \leq P \leq N$. Первая сумма оценивается следующим образом:

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq P} \frac{e^{2\pi i \frac{k}{\alpha}} - 1}{2\pi i k} \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}} \right| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{1 \leq |k| \leq P} \frac{1}{k} \left| \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}} \right|.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) r \left(\frac{m+1}{\alpha} \right) &= \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) \left(\sum_{1 \leq |k| \leq P \ln P} c_k e^{2\pi i k \frac{m+1}{\alpha}} + O \left(\frac{\ln P}{P} \right) \right) = \\
&= \sum_{1 \leq |k| \leq P \ln P} c_k e^{2\pi i k \frac{1}{\alpha}} \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}} + O \left(\frac{\sqrt{\alpha N}}{P} \ln^2 N \right).
\end{aligned}$$

Поскольку $c_k \ll \frac{\ln P}{P}$, отсюда получаем оценку

$$\sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) r \left(\frac{m+1}{\alpha} \right) \ll \frac{\ln P}{P} \sum_{1 \leq |k| \leq P \ln P} \left| \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}} \right| + \frac{\sqrt{\alpha N}}{P} \ln^2 N.$$

Аналогично оценивается и вторая сумма в остатке. Таким образом, требуется оценить тригонометрические суммы

$$W_1 = \sum_{1 \leq k \leq P} \frac{1}{k} \left| \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}} \right| = \sum_{1 \leq k \leq P} \frac{1}{k} \left| \sum_{r \leq \sqrt{\alpha N}} e^{2\pi i \lambda k r^2} \right|,$$

$$W_2 = \frac{\ln P}{P} \sum_{1 \leq k \leq P \ln P} \left| \sum_{m \leq \alpha N} \delta(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}} \right| = \frac{\ln P}{P} \sum_{1 \leq k \leq P \ln P} \left| \sum_{r \leq \sqrt{\alpha N}} e^{2\pi i \lambda k r^2} \right|.$$

где $\lambda = \frac{1}{\alpha}$. Обозначим также для краткости $M = \sqrt{\alpha N}$.

ЛЕММА 2. Пусть $\lambda = \frac{1}{\alpha} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $|\theta| \leq 1$, $1 \leq K, M \leq N$, $A = \max_{n \leq N^2} \tau(n)$. Тогда

$$W = \sum_{k \leq K} \left| \sum_{r \leq M} e^{2\pi i \lambda k r^2} \right| \ll A \ln^{\frac{1}{2}} N \left(\frac{KM}{\sqrt{q}} + K\sqrt{M} + \sqrt{qK} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы 2 воспользуемся методом Г. Вейля. Возведем данную сумму в квадрат и применим неравенство Коши:

$$|W|^2 \leq K \sum_{k \leq K} \left| \sum_{r \leq M} e^{2\pi i \lambda k r^2} \right|^2 = K \sum_{k \leq K} \sum_{r, s \leq M} e^{2\pi i \lambda k (r^2 - s^2)}.$$

Перейдем во внутренней сумме от переменной r к новой переменной суммирования h , $r = s + h$. Поскольку $r^2 - s^2 = (s + h)^2 - s^2 = 2sh + h^2$, имеем:

$$|W|^2 \leq K \sum_{k \leq K} \sum_{h=-M}^M \sum_{X \leq s \leq Y} e^{2\pi i \lambda k (2sh + h^2)},$$

где $X = \max(1, 1 - h)$, $Y = \min(M, M - h)$. Выделим в сумме по h отдельно слагаемое, соответствующее $h = 0$ и равное M . Получим:

$$\begin{aligned} |W|^2 &\leq K^2 M + K \sum_{k \leq K} \sum_{\substack{h=-M \\ h \neq 0}}^M e^{2\pi i \lambda k h^2} \sum_{X \leq s \leq Y} e^{2\pi i \lambda \cdot 2ksh} \leq \\ &\leq K^2 M + K \sum_{k \leq K} \sum_{\substack{h=-M \\ h \neq 0}}^M \left| \sum_{X \leq s \leq Y} e^{2\pi i \cdot 2\lambda ksh} \right|. \end{aligned}$$

Для оценки внутренней суммы воспользуемся следующими двумя классическими леммами И. М. Виноградова (см., например, [8]).

ЛЕММА 3. При $Y \geq 1$

$$\sum_{y \leq Y} e^{2\pi i \lambda y} \leq \min \left(Y, \frac{1}{2\|\lambda\|} \right),$$

где $\|\lambda\| = \min(\{\lambda\}, 1 - \{\lambda\})$ — расстояние от числа λ до ближайшего целого числа.

ЛЕММА 4. Пусть $\lambda = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $q \geq 1$, $|\theta| \leq 1$. Тогда при $X, Y \geq 1$

$$\sum_{x \leq X} \min \left(Y, \frac{1}{\|\lambda x\|} \right) \ll \frac{XY}{q} + (X + q) \ln 2q.$$

Применяя лемму 3, получаем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{X \leq s \leq Y} e^{2\pi i \cdot 2\lambda k s h} \right| &\ll \min \left(Y - X, \frac{1}{\|2\lambda k h\|} \right) \ll \min \left(M, \frac{1}{\|2\lambda k h\|} \right), \\ \sum_{k \leq K} \sum_{1 \leq h \leq M} \left| \sum_{X \leq s \leq Y} e^{2\pi i \cdot 2\lambda k s h} \right| &\ll \sum_{k \leq K} \sum_{1 \leq h \leq M} \min \left(M, \frac{1}{\|2\lambda k h\|} \right) \ll \\ &\ll \sum_{v \leq 2KM} \tau(v) \min \left(M, \frac{1}{\|\lambda v\|} \right). \end{aligned}$$

Оценим сверху $\tau(v)$ величиной $A = \max_{n \leq N^2} \tau(n)$ и применим лемму 4, считая, что $1 \leq q \leq N$:

$$\begin{aligned} \sum_{v \leq 2KM} \tau(v) \min \left(M, \frac{1}{\|\lambda v\|} \right) &\ll A \sum_{v \leq 2KM} \min \left(M, \frac{1}{\|\lambda v\|} \right) \ll \\ &\ll A \ln N \left(\frac{KM^2}{q} + KM + q \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|W|^2 \ll K^2 M + AK \ln N \left(\frac{KM^2}{q} + KM + q \right) \ll A \ln N \left(\frac{K^2 M^2}{q} + K^2 M + qK \right),$$

откуда и следует утверждение леммы 2. $\square$

Воспользуемся теперь доказанной леммой 2 для оценки сумм W_1, W_2 . Разобьем внешнюю сумму по k в сумме W_1 на $\ll \ln N$ сумм по промежуткам вида $(K; 2K]$, $2K \leq P$. Тогда

$$W_1 \ll (\ln N) \max_{K \leq P/2} \frac{1}{K} \sum_{K < k \leq 2K} \left| \sum_{r \leq M} e^{2\pi i \lambda k r^2} \right| \ll A \ln^{\frac{3}{2}} N \left(\frac{M}{\sqrt{q}} + \sqrt{M} + \sqrt{\frac{q}{K}} \right).$$

Известно, что справедлива оценка $A \ll N^{\frac{\varepsilon}{3}}$. Далее, если число α (а значит и $\lambda = \frac{1}{\alpha}$) имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим, то знаменатель q подходящей дроби к λ можно выбрать так, чтобы были выполнены неравенства $(MK^{\frac{1}{2}})^{1-\varepsilon} \ll q \leq MK^{\frac{1}{2}}$. Тогда

$$\begin{aligned} W_1 &\ll N^{\frac{\varepsilon}{3}} \ln^{\frac{3}{2}} N \left(\frac{M}{\sqrt{q}} + \sqrt{M} + \sqrt{\frac{q}{K}} \right) \ll \\ &\ll N^{\frac{\varepsilon}{3}} \ln^{\frac{3}{2}} N \left(\frac{M^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{K^{\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon}{4}}} + \sqrt{M} + \frac{\sqrt{M}}{K^{\frac{1}{4}}} \right) \ll M^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \ll N^{\frac{1}{4}+\varepsilon}. \end{aligned}$$

С помощью леммы 2 оценивается и сумма W_2 :

$$\begin{aligned} W_2 &\ll A \frac{\ln^{\frac{3}{2}} N}{P} \left(\frac{MP \ln P}{\sqrt{q}} + P \ln P \sqrt{M} + \sqrt{qP \ln P} \right) \ll \\ &\ll A \ln^{\frac{5}{2}} N \left(\frac{M}{\sqrt{q}} + \sqrt{M} + \sqrt{\frac{q}{P}} \right). \end{aligned}$$

Выбирая $P = \sqrt{M}$ и $(MP^{\frac{1}{2}})^{1-\varepsilon} \ll q \leq MP^{\frac{1}{2}}$, получим $W_2 \ll M^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \ll N^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Дрофа, 2003.
2. Бегунц А. В. Об одном аналоге проблемы делителей Дирихле // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2004. № 6. С. 52–56.
3. Бегунц А. В. О распределении значений сумм мультипликативных функций на обобщенных арифметических прогрессиях // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, вып. 2(14) С. 52–74.
4. Abercrombie, A. G. Beatty sequences and multiplicative number theory // Acta Arith. 1995. Vol. 70. P. 195–207.
5. Abercrombie, A. G., Banks, W. D., Shparlinski, I. E. Arithmetic functions on Beatty sequences // Acta Arith. 2009. Vol. 136, № 1. P. 81–89.
6. Gülođlu, A. M., Nevans, C. W. Sums of multiplicative functions over a Beatty sequence // Bull. Austral. Math. Soc. 2008. Vol. 78. P. 327–334.
7. Lü, G. S., Zhai, W. G. The divisor problem for the Beatty sequences // Acta Math. Sinica. 2004. Vol. 47. P. 1213–1216.
8. Vaughan R. C. On the distribution of αp modulo 1 // Mathematika. 1977. Vol. 24, № 48. P. 135–141.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.
Поступило 24.06.2013