ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 2.

УДК 515.146.6+515.164.635 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-26-36

О свойствах группы кобордизма стабильно-оснащённых погружений в коразмерности k

П. М. Ахметьев

Ахметьев Петр Михайлович — Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова, Департамент прикладной математики, профессор; ведущий научный сотрудник теоротдела ИЗМИРАН (г. Москва).
e-mail: pmakhmet@mail.ru

Аннотация

Изучается понятие „intermediate bordism group", которое было введено П. Дж. Экклзом для исследовании фильтраций в стабильных гомотопических группах сфер. Введено новое понятие группы кобордизма стабильно-оснащенных погружений. Строится представляющее пространство для новых групп и вычисляются ранги этих групп кобордизма. Инварианты Хопфа и гомоморфизм Кана-Придди обобщаются на группы кобордизма стабильно-оснащенных погружений.

Ключевые слова: стабильные гомотопические группы сфер, погружения;

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:
П. М. Ахметьев. О свойствах группы кобордизма стабильно-оснащённых погружений в коразмерности k // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 26–36.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 2.

UDC 515.146.6+515.164.635 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-26-36

On the properties of the cobordism group of stably-framed immersions in codimension k

P. M. Akhmet'ev

Akhmet'ev Petr Mikhailovich — HSE Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics (MIEM HSE), School of Applied Mathematics, professor (Moscow).
e-mail: pmakhmet@mail.ru

Abstract

The notion „intermediate bordism group", which was introduced by P. J. Eccles to investigate filtrations in stable homotopy group of spheres, is considered. A new notion „cobordism groups of stable-framed immersions" is introduced. The classifying space for the new groups is constructed, ranks of the groups are calculated. Hopf invariants and the Kahn-Priddy homomorphism are generalized for cobordism groups of stable-framed immersions.

Keywords: stable homotopy groups of spheres, immersion.

Bibliography: 11 titles.

For citation:
P. M. Akhmet'ev, 2020, "On the properties of the cobordism group of stably-framed immersions in codimension k" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 26–36.

1. Введение

В работах [7], [8] были определены группы кобордизма „intermediate bordism group", которые использовались для изучения фильтрации Вуда в гомотопических группах сфер. Фильтрацию Вуда, на наш взгляд, было бы правильно рассматривать вместе с денадстроечной фильтрацией и называть такую двойную фильтрацию бифильтрацией Вуда-Экклза. Коротко говоря, изучается возможность перевложить оснащенное вложенное подмногообразие, представляющее заданный элемент гомотопической группы сфер, в Евклидово пространство минимальной размерности. Чем выше минимальная коразмерность вложения, тем больше вес элемента в бифильтрации Вуда-Экклза. При этом, если мы ищем оснащенное вложение в классе оснащенного кобордизма, которое минимизирует коразмерность, то получается вес денадстроечной фильтрации. А если мы минимизируем коразмерность без условия оснащенности вложения, сохраняя лишь свойство стабильной оснащенности, т.е. сохраняя элемент в стабильной гомотопической группе сфер, и не требуем оснащения вложения, то получается вес фильтрации в смысле Вуда.

Экклзом были построены пространства Тома, гомотопические группы которых соответствуют „intermediate bordism group". На основе этих пространств Тома им были построены примеры элементов с разнообразными весами фильтрации.

В настоящей работе мы не используем понятие „intermediate bordism group" полностью, а используем лишь стабильную версию этих групп кобордизма. Поэтому мы ввели новый термин для изучаемых групп и назвали эти частные группы Экклза группами кобордизма стабильно-оснащенных погружений m-мерных многообразий в коразмерности k. Такие группы мы обозначим через $Imm^{st-fr}(m,k)$, определение приводится в разделе 2. представляющие пространства строятся в разделе 3. В разделе 4 проводятся вычисления рангов этих групп.

Группы кобордизма стабильно-оснащенных погружений в коразмерности k являются расширением стабильных гомотопических групп сфер. Расширенные группы естественно проектируются на стабильные гомотопические группы сфер, при этом, если $k = 1$, эта проекция естественна по отношению к действию алгебры Стинрода в спектральной последовательности Адамса для стабильных гомотопических групп сфер. Если же параметр k увеличивать от 1 до веса элемента фильтрации Вуда-Экклза (т.е. не более, чем до метастабильного ранга), в этом диапозоне размерностей разнообразных элементов в группах стабильно-оснащенных погружений становится больше. Таким образом, свойства групп кобордизма описываются новой алгебраической структурой, которая, по нашему мнению, требуется для более глубокого понимания самих стабильных гомотопических групп сфер.

В нашей работе мы сделали лишь начальный шаг в намеченном направлении. В разделе 5 мы отследили определение инвариантов Хопфа в новых группах кобордизма. В разделе 6 мы определили группы кобордизма $Imm^{st-sfr}(m-k,k)$ погружений в коразмерности k со стабильной проективной структурой нормального расслоения и построили трансфер $Imm^{st-sfr}(m-k,k)$ в группы $Imm^{st-fr}(m,k)$. Этот трансфер обобщает трансфер Кана-Придди. Мы исследовали простейшие алгебраические свойства нового трансфера, они оказались аналогичными.

Планируется перенести теорию вторичных операций в стабильных гомотопических группах сфер на теорию стабильно-оснащенных погружений. В частности планируется проанализировать теорему Браудера [2] об Арф-инварианте и конструкцию бесконечной серии элементов Маховальда в стабильных гомотопических группах сфер [4]. Проблема денадстройки элементов стабильной гомотопической группы в нестабильную область важна и выражается соответствующим весом элемента в фильтрации Вуда-Экклза. Планируется перенести результаты об итерированной денадстройке в стабильных гомотопических груцппах на группы кобордизма стабильно-оснащенных погружений. Несмотря на то, что группы кобордизма стабильно-оснащенных погружений содержат значительно больше элементов по сравнению со стабильными гомотопическими группами сфер, теорема о денадстройке, по-видимому, вносит некоторые ограничения на свойства элементов с точки зрения высших операций в алгебре Стинрода.

2. Группа кобордизма стабильно-оснащенных погружений в коразмерности k

Представляющая пара, – это пара (φ,Ξ), где $\varphi: M^m \looparrowright \mathbb{R}^{m+k}$ – погружение, Ξ – его стабильное n-оснащение, где n-большое натуральное число, т. е изоморфизм $\Xi: \nu_{I\circ\varphi} = n\varepsilon$, где $I: \mathbb{R}^{m+k} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ – стандартное координатное вложение. Отношение кобордантности определяется стандартным способом, оно задает отношение эквивалентности на представляющих парах, подробности в этом определении можно записать как в аналогичных определениях из [1]. Факторомножество пар, по отношению эквивалентности снабжено структурой абелевой группы относительно операции дизъюнктного объединения. Построенная группа обозначается через $Imm^{st-fr}(m,k)$ и называется группой m-мерного кобордизма стабильно-оснащенных (посредством Ξ) погружений в коразмерности k.

Определим два забывающих гомоморфизма

$$A: Imm^{st-fr}(m,k) \to \Pi_m = \pi_{m+N}(S^N), \quad N >> m; \tag{1}$$

$$B: Imm^{st-fr}(m,k) \to Imm^{SO}(m,k), \tag{2}$$

где $Imm^{SO}(m,k)$–группа кобордизма погружений в коразмерности k ориентированных многообразий размерности m.

В частном случае $k=2$ группа $Imm^{st-fr}(m,2)$ естественно отображается в $m+2$-стабильную гомотопическую группу пространства $BU(1) = CP(\infty) = K(\mathbb{Z},2)$, которая изучена при помощи конструкции Понтрягина-Тома в [11].

3. Пространство Тома

Представляющим пространством для $Imm^{st-fr}(m,k)$ служит пространство Тома $T(\eta)$ тавтологического n-мерного расслоения η над многообразием Штифеля $V_{n,n-k}$, n-большое натуральное число. Поскольку расслоение η– тривиальное, имеем равенство $T(\eta) = \Sigma^n(V_{n,n-k})$.

Гомотопическая группа $\pi_{m+n}(T(\eta))$ по конструкции Понтрягина-Тома представлена оснащенным вложением $(\psi : M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}; \Xi)$, при этом дополнительно определено поле $(n-k)$-реперов в нормальном расслоении ν_ψ, которое обозначим через Ψ. Согласно теореме Хирша, определено оснащенное погружение $\varphi : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{m+k} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ в гиперпространчство, регулярно гомотопное ψ, причем однозначно с точностью до регулярной конкордантности, если $k = 1$ и до регулярной гомотопии, если $k > 1$. При $k = 1$ получится оснащенное вложение $(\psi : M^m \subset \mathbb{R}^{m+n}; \Xi)$, которое дополнительно снабжено полем $n-1$-реперов Ψ нормального расслоения. Поле Ψ однозначно продолжается до полного поля n-реперов, поэтому получится отображение $F : M^m \to SO(n)$.

4. Рациональный гомотопический стабильный тип пространства Тома

Вычислим гомотопические группы $\pi_{m+n}\Sigma^n(V_{n,n-k}) \otimes \mathbb{Q}$, при условии, что $n >> m, n >> k$, используя простые факты из рациональной теории гомотопий, изложенные в [3]. Вначале вычислим $H^m(V_{n,n-k}) \otimes \mathbb{Q}$, $n >> m$, $n >> k$. Рассмотрим локально-тривиальное расслоение, при условии $k = 2l$:

$$V_{2l+1,1} \subset V_{n,n-2l} \to V_{n,n-2l-1}. \tag{3}$$

Далее рассмотрим цепочку локально-тривмальных расслоений

$$V_{2l+3,2} \subset V_{n,n-2l-1} \to V_{n,n-2l-3} \dots \tag{4}$$

$$V_{2l+2s+1,2} \subset V_{n,n-2l-2s+1} \to V_{n,n-2l-2s-1}. \tag{5}$$

Параметр s выбираем не слишком большим, так, что $n >> 2l+2s+1$, при этом вычисления групп когомологий проводим в диапазоне размерностей от 0 до $2l+2s-1$ включительно.

Слой $V_{2l+2s+1,2}$ в расслоении (5) является рациональной сферой $S^{4l+3s-1}$ при каждом $s \geqslant 0$. Действительно, многообразие $V_{2l+2s+1,2}$ является пространством расслоения:

$$S^{2l+2s-1} \subset V_{2l+2s+1} \to S^{2l+2s},$$

в котором рациональный фундаментальный класс слоя $[S^{2l+2s-1}]^*$ трангсгрессируется в рациональный фундаментальный класс базы $[S^{2l+2s}]^*$. Определено отображение $V_{2l+2s+1} \to S^{2l+2s+1}$, которое переводит гомологический фундаментальный класс $[V_{2l+2s+1}]_*$ в гомологический фундаментальный класс образа $[S^{2l+2s+1}]_*$ и индуцирует изоморфизм групп гомологий с рациональными коэффициентами.

Теорема 1. *При условии $n >> m$, $n >> k$, группа $H^m(V_{n,n-k}) \otimes \mathbb{Q}$ при $m = k$, $2k+3$, $2k+7, \dots$ имеет ранг 1, если $k = 2l$, и при $m = 2k+3, 2k+7, \dots$, если $k = 2l+1$.*

Следствие 1. *Градуированные группы $\Pi_m(V_{n,n-k}) \otimes \mathbb{Q} = \pi_{m+n}\Sigma^n(V_{n,n-k}) \otimes_{\mathbb{Q}}$, $n >> m$, $n >> k$ вычисляются как произведение градуированных групп от образующих размерностей $m = k$, $2k+3$, $2k+7, \dots$, если $k = 2l$ и от образующих размерностей $2k+7, \dots$, если $k = 2l+1$.*

Доказательство. Поскольку гомотопические группы $\Pi_m(V_{n,n-k}) \otimes_{\mathbb{Q}}$ вычисляются лишь в метастабильных размерностях (в размерностях не более $2n-2$) у n-связного клеточного пространства, они изоморфны группам гомологий многобразия $V_{n,n-k}$, которые ваычислены в Теореме 1. Вычисляющий гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом Гуревича, который переводит фундаментальный класс $n+m$-мерного сферойда в класс гомологий представляющего пространства Тома. Пользуясь изоморфизмом Тома, можно заметить, что при гомоморфизме Гуревича фундаментальный класс $[M^m]$ многообразия из представляющей пары переходит в m-мерный гомологический класс многообразия Штифеля $V_{n,n-k}$. □

При каждом четном $m = 2l$ согласно Следствию 1 группа $Imm^{st-fr}(m,m)$ содержит образующую бесконечного порядка. Опишем такую образующую, построив соответствующее погружение со стабильным оснащением.

Рассмотрим разложение координатного $2m$-мерного пространства в прямую сумму двух ортогональных m-мерных координатных подпространств: $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{R}^m_1 \oplus \mathbb{R}^m_2$. В подпространствах рассмотрим единичные диски $D_i \subset \mathbb{R}^m_i$, $i = 1,2$. Определим образ кусочно-линейного погружения $f : S^m \looparrowright \mathbb{R}^{2m}$, соединив отрезками точки с одинаковыми координатами на дисках. Само погружение f, тем самым, также определено. Мы будем считать, что f-гладкое, для этого у построенного погружения (которое не переобозначаем) сгладим углы в точках прикрепления отрезков к дискам. Представляющую пару (φ, Ξ) определим по формуле: $\varphi = Id \circ f$, где $Id : \mathbb{R}^{2m} \subset \mathbb{R}^{2m+(n-m)}$ координатное вложение, $n > 2m$; Ξ–оснащение размерности $n-m$, определенное координатными векторами гиперпространства образа вложения Id.

Аналогичная конструкция проходит и для нечетных m. Обозначим серию построенных элементов $\alpha_m \in Imm^{st-fr}(m,m)$. Докажем, что α_{2l}, $l \geqslant 0$, является образующей бесконечного порядка. Для $l = 0$ это очевидно. Для положительного $m = 2l$ погружение φ_m имеет дисковое нормальное расслоение, изоморфное дисковому касательному расслоению $T(S^m)$. При регулярной гомотопии погружения $\varphi_m : S^m \looparrowright \mathbb{R}^{2m} \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ к стандартному вложению $\bar{\varphi}_m : S^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \subset \mathbb{R}^{2m+1}$, вектор оснащения вдоль оси с номером $2m+1$, т.е. первый вектор оснащения Ξ, перейдет перейдет в вектор, параметризующий m-сферу направлений в стандартном $m+1$-оснащении к вложению $\bar{\varphi}_m$. Остальные $(n-m-1)$ вектора оснащения Ξ, начиная со второго, не изменяют направления вдоль координатных осей.

Тем самым, представляющая пара (φ_m, Ξ) строится так, что при образе гомоморфизма Гуревича, фундаментальный класс $[S^m]$ переходит в образующую $H_m(V_{n,n-m}, \mathbb{Q}) = H_{m+n}(\Sigma^n(V_{n,n-m}))$, $m = 2l$. Дополнительно заметим, что $m = 2l+1$ аналогичная конструкция также возможна. При произвольном m получается образующая из $H_m(V_{n,n-m}; \mathbb{Z}/2)$.

5. Стабильно-оснащенные погружения с инвариантом Хопфа 1

Инвариантом Хопфа называется гомоморфизм (ср. с формулой (2))

$$h_m : Imm^{st-fr}(m,m) \to Imm^{SO}(m,m) \to \mathbb{Z}/2, \tag{6}$$

сопоставляющий погружению $\varphi : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{2m}$ (которое предполагается самотрансверсальным) представляющей пары четность числа его точек самопересечения. Выше было доказано, что при любом положительном m существует инвариант Хопфа является ненулевым. Условно будем считать, что при $m = 0$ инвариант Хопфа совпадает с четностью числа компонент многообразия M^m.

Наша ближайшая цель – выписать формулу для вычисления инварианта Хопфа в терминах гомотопических инвариантов пространства Тома.

Напомним необходимые сведения из теории (обобщенных) систем Постникова, [5]. Определим одноэтажные системы Постникова, которые строятся по образующим элементам алгебры Стинрода.

Рассмотрим класс когомологий $Sq^{k+1} \in K(\mathbb{Z}, n)$, $n > 2k+2$. Рассмотрим одноэтажную систему расслоенных пространств, дополненную слева отображением $f : S^{n+k} \to S^n$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K(\mathbb{Z}/2, n+k) & \xrightarrow{i_1} & P_1 & & \\
 & \bar{f} \nearrow & & & \downarrow & & \\
S^{n+k} & \xrightarrow{f} & S^n & \xrightarrow{i_0} & P_0 \cong K(\mathbb{Z}, n) & \xrightarrow{Sq^{k+1}} & K(\mathbb{Z}/2, n+k+1).
\end{array} \tag{7}$$

Используя диаграмный поиск и размерностные соображения, заключаем, что определено отображение $\bar{f} : S^{n+k} \to K(\mathbb{Z}/2, n+k)$, дополняющее диаграмму до коммутативной. Определено характеристическое число $h(f) = (\bar{f})[\tau] \in \mathbb{Z}/2$, $\tau \in H^{n+k}(K(\mathbb{Z}/2, n+k); \mathbb{Z}/2)$, ассоциированное с отображением $\bar{f} : S^{n+k} \to K(\mathbb{Z}/2, n+k)$ (на диаграмме левое диагональное). Это число детектирует элемент $[f] \in \pi_{n+k}(S^n)$ гомотопической группы при помощи когомологической операции Sq^{k+1} в одноэтажной системе Постникова (здесь и далее в этом разделе когомологии и гомологии рассматриваются над $\mathbb{Z}/2$). Это характеристическое число называется инвариантом Хопфа отображения f. По теореме Адамса $h(f) = 0$, если $k + 1 \neq 2, 4, 8$. Существуют отображения (расслоения) $S^3 \to S^2$, $S^7 \to S^4$, $S^{15} \to S^8$ с инвариантом Хопфа 1.

Перенесем это определение на случай гомотопических групп $\pi_{n+k}(\Sigma^n(V_{n,n-m}))$, $k = m$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & K(\mathbb{Z}/2, n+m) & \xrightarrow{i_1} & P_1 & & \\
 & \bar{f} \nearrow & & & \downarrow & & \\
S^{n+m} & \xrightarrow{f} & \Sigma^n(V_{n,n-m}) & \xrightarrow{i_0} & P_0 \cong K(\mathbb{Z}, n) & \xrightarrow{Sq^{m+1}} & K(\mathbb{Z}/2, n+m+1).
\end{array} \tag{8}$$

В диаграмме (8) отображение i_0 определено как класс Тома.

Определено отображение $\bar{f} : S^{n+m} \to K(\mathbb{Z}/2, n+m)$, дополняющее диаграмму до коммутативной. Индуцированное характеристическое число

$$h(f) = (\bar{f})[\tau] \in \mathbb{Z}/2, \quad \tau \in H^{n+m}(K(\mathbb{Z}/2, n+m); \mathbb{Z}/2) \tag{9}$$

называется инвариантом Хопфа отображения f. Поскольку диаграмма (7) естественно отображается в диаграмму (8), инвариант Хопфа на $\pi_{n+m}(\Sigma^n(V_{n,n-m}))$ согласован со стандартным инвариантом Хопфа на образе группы $\pi_{n+m}(S^n)$.

Теорема 2. *Инвариант Хопфа (Хопфа-Стинрода) на всей группе* $\pi_{n+m}(\Sigma^n(V_{n,n-m}))$, *определенный по диаграмме* (8), *согласован с инвариантом Хопфа (Хопфа-Джеймса), определенным по диаграмме* (6).

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & \Sigma^{n-m-1}MO(m+1) & \xrightarrow{Sq^{m+1}} & K(\mathbb{Z}/2, n+m+1) \\
 & & & & \uparrow & & \Updownarrow \\
 & & & & \Sigma^{n-m}MO(m) & \xrightarrow{Sq^{m+1}} & K(\mathbb{Z}/2, n+m+1) \\
 & & & \nearrow & \uparrow & & \Updownarrow \\
D^{n+m+1} & \supset & S^{n+m} & \xrightarrow{f} & \Sigma^n(V_{n,n-m}) & \xrightarrow{Sq^{m+1}} & K(\mathbb{Z}/2, n+m+1).
\end{array} \tag{10}$$

Отображение $S^{n+m} \to \Sigma^{n-m}MO(m) \to \Sigma^{n-m-1}MO(m+1)$, заданное композицией косой и левой верхней вертикальных стрелок, продолжается до отображения диска D^{n+m+1} (по теореме Тома о кобордизме, по конструкции Понтрягина – Тома и теореме Уитни о вложении). При этом относительный конус $(C_f, \Sigma^n(V_{n,n-m}))$ отображения f отображается в пару пространств $(\Sigma^{n-m-1}MO(m+1), \Sigma^{n-m}MO(m))$ посредством отображения $F : D^{n+m+1} \to \Sigma^{n-m-1}(MO(m+1))$ с фиксированным ограничением $f : S^{n+m} \to$ $\to \Sigma^{n-m-1}(MO(m+1))$ на основание.

Действительно, рассмотрим представляющую пару (φ, Ξ) для отображения $S^{n+m} \xrightarrow{f}$ $\longrightarrow \Sigma^n(V_{n,n-m})$, здесь $\varphi : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{2m}$–погружение, Ξ – стабильное оснащение этого погружения в коразмерности $n-m$. Рассмотрим однократную надстройку $\bar{\varphi} : M^m \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ погружения φ, отображение $\bar{\varphi}$–вложение. По теореме Тома о кобордизме найдется многообразие с краем W^{m+1}, $\partial W = M^m$, поскольку M^m–оснащенное многообразие. По теореме Уитни о вложении, найдется вложение $\theta : (W^{m+1}, M^m) \subset \mathbb{R}^{2m+1} \times [0,1], \mathbb{R}^{2m+1} \times \{0\}$, продолжающее вложение $\bar{\varphi}$.

Вложение $\bar{\varphi}$ является надстройкой над φ, поэтому снабжено ненулевым вертикальным сечением ξ нормального расслоения $\nu_{\bar{\varphi}}$. Препятствие $h \in \mathbb{Z}/2$ к продолжению ненулевого сечения нормального расслоения ν_θ над W^{m+1} с заданным сечением ξ на ∂W называется инвариантом Хопфа-Стинрода погружения φ. Инвариант Хопфа-Стинрода является препятствием, которое вычисляется как характеристическое число $Sq^{m+1}[F^*(i)]$, где $i \in H^n(V_{n,n-m})$–класс Тома. По коммутативности диаграммы (10) инвариант Хопфа-Стинрода совпадает с (9). С другой стороны, инвариант Хопфа-Стинрода, определенный геометрически, совпадает и инвариантом Хопфа-Джеймса, который определен последовательностью (6). Последнее вытекает из того, что инвариант Хопфа-Стинрода определяется как четность числа критических точек проекции $p \circ \theta : W^{m+1} \to \mathbb{R}^{2m+1} \times [0,1] \to \mathbb{R}^{2m} \times [0,1]$. Многообразие критических точек проекции кобордантно (посредством многообразия самопересечения погружения $p \circ \theta$) многообразию точек самопересечения погружения φ, поскольку ограничение проекции $p \circ \theta$ на ∂W^{m+1} совпадает с φ. $\square$

6. Трансфер Кана-Придди

Напомним конструкцию трансфера Кана-Придди, следуя [6], [10]. Начнем построение, используя конструкцию Понтрягина-Тома, получится определение трансфера в форме Кошорке.

Пусть дано погружение $f : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{m+1}$ ориентированного многообразия, представляющее элемент $[f] \in \Pi_m$. Предположим, что погружение f общего положения и имеет трансверсальное самопересечение. В этом случае многообразие самопересечения погружение f является замкнутым многообразием, которое обозначим через N^{m-1}, это многообразие, вообще говоря, неориентируемо и снабжено погружением $g : N^{m-1} \looparrowright \mathbb{R}^m$. Погружение g определено однозначно, с точностью до регулярной конкордантности. Погружение g представляет элемент стабильной гомотопической группы $\Pi_m(\mathbb{RP}^\infty)$, поскольку $\mathbb{RP}^\infty$ является пространством Тома канонического линейного расслоения над $\mathbb{RP}^{\infty-1} = Gr^O(1,\infty)$.

Конструкция, ставящая в соответствие погружению $g : N^{m-1} \looparrowright \mathbb{R}^m$ неориентированного многообразия ориентированное погружение $f : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{m+1}$, состоит в следующем. Рассмотрим погружение $I \circ g : N^{m-1} \looparrowright \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, где $I : \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$–стандартное вложение. Погружение $I \circ g$ имеет нормальное расслоение $\nu_{I \circ g}$, которое изоморфно сумме Уитни линейного ориентирующего расслоения κ_N (над N^{m-1}) и тривиального расслоения ε. В каждый слой расслоения $\nu_{I \circ g}$ вклеивается кривая формы ∞, причем так, что горизонтальная ось симметрии кривой, прересекающая кривую в 4 точках, соответствует слагаемому ε нормального расслоения $\nu_{I \circ g}$. Семейство кривых параметризует замкнутое ориентированное многообразие, которое мы обозначим через M^m. Многообразие M^m наделим ориентацией так, что вектор внешней нормали в обеих крайних точках горизонтальной оси симметрии слоя был бы направлен вдоль положительного вектора слоя ε. Определено, тем самым, погружение $f : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{m+1}$ ориентированного многообразия, которое представляет элемент $[f] \in \Pi_m$. Соответствие $g \mapsto f$ называется прямым трансфером. Соответствие $f \mapsto g$ называется обратным трансфером.

Теперь проведем аналогичное построение, используя петлевые пространства, которые являются представляющими пространствами для групп оснащенных и скошенно-оснащенных погружений. Отображение $QS^0 \to Q\mathbb{RP}^\infty$, где $Q = \Omega^\infty\Sigma^\infty$, которое определяет обратный трансфер, описано в [10], предложение 1.5.5.

Определим отображение Кана-Придди $\lambda : \mathbb{RP}^\infty \to Q(S^0)$, $Q(\dots) = \Omega^\infty\Sigma^\infty(\dots) = \lim_{k\to+\infty}(\Omega^{k+1}\Sigma^{k+1}(S^0))$, $\Omega^{k+1}\Sigma^{k+1}(S^0) = \Omega^{k+1}(S^{k+1})$. Определим отображение $\lambda_k : \mathbb{RP}^{k+1} \to \Omega^{k+1}(S^{k+1})$.

Построим вспомогательное отображение $\tilde{\lambda}_k : \mathbb{RP}^k \to \Omega^{k+1}_\circ(S^{k+1})$ как семейство одноточечных компактификаций отражений $\mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{k+1}$ относительно прямой в плоскости, ортогональной прямой $x \subset \mathbb{R}^{k+1}$, проходящей через начало координат и соответствующей прямой $[x] \in \mathbb{RP}^k$. Мы воспользовались обозначением $\Omega_\circ$ для непунктированных петель.

Теперь определим отображение $\lambda_k : \mathbb{RP}^k \to \Omega^{k+1}(S^{k+1})$. Рассмотрим тождественное отображение $1 : S^{k+1} \to S^{k+1}$ степени $+1$, затем возьмем букетную сумму $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k * 1$ семейства $\tilde{\lambda}_k$ с тождественным отображением. Этим достигается, что образ отображения λ_k лежит в компоненте связности тождественной петли, т.к. имеет нулевую степень. Поэтому, где потребуется, мы сможем считать сразу для всех k, что отмеченная точка в $\mathbb{RP}^k$ отображается в тождественную петлю над отмеченной точкой S^{k+1}.

Рассмотрим допредельное отображение $\lambda_n : \Sigma^n \mathbb{RP}^{n-1} \to S^n$ Кана-Придди, $n >> 1$. Ограничение отображения $\bar{\lambda}_n$ на подпространство $\Sigma^n(\mathbb{RP}^1) = S^{n+1}$ пространства $\Sigma^n \mathbb{RP}^{n-1}$ представляет (по элементарным геометрическим соображениям) отображение $f : S^{n+1} \to S^n$ с нечетным инвариантом Хопфа. Поясним этот хорошо известный результат, см. [6], начало доказательства предложения 4.6.

Заметим, что отображение f является $(n-2)$-кратной надстройкой над отображением $f_1 : \Sigma^2(\mathbb{RP}^1) \to S^2$. Для построения f_1 опишем однопараметрическое семейство вспомогательных отображений f'_φ, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Отображение f'_φ– это композиция проекции $p : S^2 \to S^2 \vee S^2$, однопараметрического поворота первой сферы в букете $S^2 \vee S^2$ на угол φ вдоль экватора и стандартного отображения проекции $\pi : S^2 \vee S^2 \to S^2$ степени -1 на первой сфере и степени $+1$ на второй сфере (это отображение $S^2 \to S^2$ над выделеенной точкой $pt \in \mathbb{RP}^1$). Теперь рассмотрим гомотопию $\pi \circ p$ над отмеченной точкой $pt \in \mathbb{RP}^1$ в нулевое отображение (такую гомотопию считаем стандартной). Выделенную сферу в $S^2 \times \mathbb{RP}^1$ над $S^2 \times pt$ стягиваем, из $\pi \circ f'_\varphi \circ p$ получается отображение f_1 на $S^2 \times \mathbb{RP}^1 / S^2 \times pt = \Sigma^2(\mathbb{RP}^1)$. Из построения следует, что прообразы двух регулярных значений отображения f_1, каждый прообраз - это кривая в $\Sigma^2(\mathbb{RP}^1) = S^3$, зацеплены с нечетным коэффициентом. Значит, отображение $f : S^{n+1} \to S^n$, действительно, имеет нечетный инвариант Хопфа.

Известно, что сфероид $f : S^{n+1} \to S^n$ с нечетным инвариантом Хопфа детектируется функциональной когомологической операцией Sq^2_f, примененной к фундаментальному классу $[S^n] \in H^n(S^n; \mathbb{Z}/2)$, [5].

Обозначим через $Sq^{k+1}_{\bar{\lambda}_n}([i]) \in H^{n+k}(\Sigma^n \mathbb{RP}^\infty)$ результат применения функциональной когомологической операции Sq^{k+1} при отображении λ к фундаментальному классу $[i] \in H^n(S^n)$ (подробности в определении функциональной когомологической операции см. [5], гл. 16). В частности, согласно замечанию выше, при $k = 1$ получим $Sq^2_{\bar{\lambda}}([i]) = t$, где $t \in H^{n+1}(\Sigma^n(\mathbb{RP}^{n-1}); \mathbb{Z}/2)$–образующий когомологический класс.

Теорема 3. *В [6], Предложение 4.6, доказано, что если* $S^{n+k} \to \Sigma^n(\mathbb{RP}^{n-1}) \xrightarrow{\bar{\lambda}_n} S^n$ *произвольный сфероид,* $f : S^{n+k} \to S^n$, *определяющий элемент* $[f] \in \Pi_k$, $k << n$, *то* $[f]$ *детектируется* Sq^k, *тогда и только тогда, когда образ фундаментального класса сфероида* $S^{n+k} \to \Sigma^n(\mathbb{RP}^n)$ *совпадает с образующей* $t^k \in H^{n+k}(\Sigma^n(\mathbb{RP}^n))$.

7. Обобщение трансфера Кана-Придди в форме Кошорке для стабильно-оснащенных погружений

Обобщим вышеизложенные результаты, докажем аналогичные результаты для группы кобордизма стабильно-оснащенных погружений. Определим группу кобордизма скошенных стабильно-оснащенных $(m-k)$-мерных погружений в коразмерности k, которую обозначим через $Imm^{st-sf}(m-k, k)$. Элементы группы представлены тройками (ψ, f, Ψ), где $\psi : N^{m-k} \looparrowright \mathbb{R}^m$-погружение (если k-нечетно, то многообразие N^{n-k} ориентированным не предполагается); $f : N^{m-k} \to PV_{n,n-k}$ – отображение в многообразие Штифеля проективных $n-k$-реперов в n-пространстве; $\Psi : \nu_\psi \cong f^*(\eta_{n,n-k})$, где $\eta_{n,n-k}$–каноническое k-мерное расслоение над $PV_{n,n-k}$, при этом предполагается, что $n >> m$.

Замечание 1. *В вычислительном аспекте потребуется знать кольцо когомологий многообразия $PV_{n,n-k}$. Удобно предположить, что общности не ограничивает, что $n-k = 2^s$, $k = 2^l$, $s >> l$. Согласно [9] в этом случае получим*

$$H^*(PV_{n,n-k}) = \mathbb{Z}_2[t]/t^{k+1} \otimes V(\tau_k, \tau_{k+1}, \dots \tau_{n-1}),$$

где τ_i, $i = k, \dots, n-1$ – классы когомологий размерности i, которые можно определить в терминах когомологий канонического двулистного накрытия $V_{n,n-k} \to PV_{n,n-k}$, t-класс линейного канонического расслоения γ над $PV_{n,n-k}$. Пространство Тома $\Sigma^n(PV_{n,n-k})$ имеет те же группы когомологий со сдвинутой на n градуировкой, так что элемент $t^j\tau_k$ имеет размерность $j+k+n$. При $k = n-1$ получается случай Кана-Придди, поскольку $PV_{n,1} = \mathbb{RP}^{n-1}$.

Определим гомоморфизм обобщенного трансфера $Imm^{st-sf}(m-k,k) \to Imm^{st-fr}(m,k)$, $(\psi, f, \Psi) \mapsto (\varphi, \Xi)$. Для этого к нормальному расслоению ν_ψ (обозначим для краткости это расслоение через ζ) погружения $\psi : N^{m-k} \looparrowright \mathbb{R}^m$ добавим прямое слагаемое $\zeta \otimes \mathbb{Z}/2$. Расслоение $\zeta \otimes \mathbb{Z}/2$ снабжено стабильной тривиализацией $\Psi_{tw} : \zeta \otimes \mathbb{Z}/2 \oplus (n-k)\varepsilon = n\varepsilon$, построенной по стабильной скошенной тривиализации расслоения ζ путем тензорного домножения на линейное расслоение $f^*(\gamma)$. Здесь через $\zeta \otimes \mathbb{Z}/2$ обозначено расслоение $f^*[(\eta_{n,n-k}) \otimes \gamma] = \zeta \otimes f^*(\gamma)$, где γ-каноническое линейное расслоение над $PV_{n,n-k}$.

Рассмотрим погружение $\psi : N^{m-k} \looparrowright \mathbb{R}^m$ и стабилизируем это погружение, добавив к нормальному расслоению слагаемое $\zeta \otimes \mathbb{Z}/2$ с заданной стабильной тривиализацией. Полученное погружение обозначим через $\psi_1 : N^{m-k} \looparrowright \mathbb{R}^{m+k}$, его нормальное расслоение раскладывается в сумму Уитни двух k-мерных расслоений $\Psi_1 = \Psi \oplus \Psi_{tw} : \nu_{\psi_1} \cong \zeta \oplus \zeta \otimes \mathbb{Z}/2$.

Построим погружение $\varphi : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{m+k}$. Сферу S^k впишем в каждый слой подрасслоения $\zeta \oplus \zeta \otimes \mathbb{Z}/2$, дополнив пару дисков вдоль пары биссектриссных подрасслоений семейством отрезков, соединяющих соответствующие точки на дисках. Под биссектриссами понимаются всевозможные неупорядоченные пары прямых l, l', биссектрисс в плоскостях $x, x \otimes \mathbb{Z}/2$, где прямые $x \subset \zeta$, $x \otimes \mathbb{Z}/2 \subset \eta \otimes \mathbb{Z}/2$ соответствуют друг другу. Направления на $l, l \otimes \mathbb{Z}/2$ связаны друг с другом при проекции на $x \otimes \mathbb{Z}/2$, они могут обратится лишь одновременно.

Полученное погружение обозначим через $\varphi : M^m \looparrowright \mathbb{R}^{m+k}$. Докажем, что погружение φ является стабильно-параллелизуемым посредством Ξ (в коразмерности $n-m$). Нормальное расслоение к паре биссектриссных дисков L, L' определим параллельным слагаемому $\zeta \otimes \mathbb{Z}/2$. Над соответствующими точками дисков с общей проекцией на горизонтальный слой отождествление слоев над соответствующих точках биссектриссных дисков с общей горизонтальной проекцией следует выбирать $\mathbb{Z}/2$-косоинвариантным, этим достигается корректность.

На ленточке из отрезков над граничной (экваториальной) S^{m-k-1}-мерной сферой слои обеих расслоений отождествляются со слоем, нормального расслоения к погруженной сфере в рассматриваемом слое. Хотя такое отождествление задается с известным произволом, оно общее для слоя каждого диска, поэтому слои двух дисков над экваториальной сферой отождествляются тождественной матрицей в горизонтальном слое. Поэтому нормальное расслоение к каждой погруженной сфере естественно изоморфно горизонтальному слою $\zeta \oplus \mathbb{Z}/2$, а все нормальное расслоение ν_φ изоморфно $\pi^*(\zeta \otimes \mathbb{Z}/2)$, где $\pi : M^m \to N^{n-k}$– послойная проекция каждой вписанной сферы на нулевой вектор нормального расслоения к N^{m-k}. Построеная стабильная тривиализация $\Xi : \nu_\varphi \oplus (n-k)\varepsilon = n\varepsilon$ завершает конструкцию. Трансфер $(\psi, f, \Psi) \mapsto (\varphi, \Xi)$ определен.

Автор благодарит А. С. Мищенко за обсуждения, Ф. Ю. Попеленского за обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. P.M.Akhmet'ev, O.D.Frolkina, „On properties of skew-framed immersions cobordism groups", http://arxiv.org/abs/1712.00959v1.
2. W.Browder, *The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization*, Ann. of Math., (2) 90 (1969) 157-186.
3. Ф.А.Гриффитс, Д.В.Морган *Рациональная теория гомотопий и дифференциальные формы* пер. с англ. М. Наука 1990.
4. M.Mahowald, *A new infinite family in* ${}_2\pi_*^S$, Topology vol. 16 (1977) 249-256.
5. Mosher R.S. Tangora M.C., *Cohomology operations and their applications in homotopy theory*, N.Y. Harper and Row, Publishers, 1968. Перевод Мир 1970.
6. P.J.Eccles, *Codimension One Immersions and the Kervaire Invariant One Problem*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. vol 90 (1981) 483- 493.
7. P. J. Eccles, *Representing framed bordism classes by manifolds embedded in low codimension*, Geometric Applications of Homotopy Theory, Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977, Vol. I, Lecture Notes in Math. Vol. 657, Springer, Berlin, 1978, pp. 150–155.
8. P. J. Eccles, *Filtering framed bordism by embedding codimension*, J. London Math. Soc. (2) 19 (1979), 163–169.
9. S. Gitler and D.Handel *The projective Stiefel manifolds - I*, Topology Vol. 7, pp. 39-45.
10. V.P. Snaith, *Stable homotopy around the Arf-Kervaire invariant*, Birkhauser Progress on Math. Series vol. 273 (April 2009).
11. A.Szucs and T.Terpai, *Singularities and stable homotopy groups of spheres. II* Journal of Singularities Volume 17 (2018), 28-57.

REFERENCES

1. P.M.Akhmet'ev, O.D.Frolkina, „On properties of skew-framed immersions cobordism groups", http://arxiv.org/abs/1712.00959v1.
2. W.Browder, *The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization*, Ann. of Math., (2) 90 (1969) 157-186.
3. P.Griffiths; J.Morgan *Rational Homotopy Theory and Differential Forms* Progress in Mathematics, 16. Birkhuser, Boston, Mass., 1981
4. M.Mahowald, *A new infinite family in* ${}_2\pi_*^S$, Topology vol. 16 (1977) 249-256.
5. Mosher R.S. Tangora M.C., *Cohomology operations and their applications in homotopy theory*, N.Y. Harper and Row, Publishers, 1968.
6. P.J.Eccles, *Codimension One Immersions and the Kervaire Invariant One Problem*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. vol 90 (1981) 483- 493.
7. P. J. Eccles, *Representing framed bordism classes by manifolds embedded in low codimension*, Geometric Applications of Homotopy Theory, Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977, Vol. I, Lecture Notes in Math. Vol. 657, Springer, Berlin, 1978, pp. 150–155.

8. P. J. Eccles, *Filtering framed bordism by embedding codimension*, J. London Math. Soc. (2) 19 (1979), 163–169.

9. S. Gitler and D.Handel *The projective Stiefel manifolds - I*, Topology Vol. 7, pp. 39-45.

10. V.P. Snaith, *Stable homotopy around the Arf-Kervaire invariant*, Birkhauser Progress on Math. Series vol. 273 (April 2009).

11. A.Szucs and T.Terpai, *Singularities and stable homotopy groups of spheres. II* Journal of Singularities Volume 17 (2018), 28-57.

Получено 25.12.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.