ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 2.

УДК 517.938.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-10-25

Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков на проективной плоскости в потенциальном поле[1]

Е. И. Антонов, И. К. Козлов

Антонов Евгений Игоревич — студент кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: antonov.zhenya@hotmail.com
Козлов Иван Константинович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: ikozlov90@gmail.com

Аннотация

Получена лиувиллева классификация натуральной гамильтоновой системы на проективной плоскости с метрикой вращения и линейным интегралом. Вычислены все инварианты Фоменко — Цишанга (т. е. меченые молекулы) системы.

Ключевые слова: интегрируемые гамильтоновы системы, геодезический поток, меченая молекула, инвариант Фоменко — Цишанга.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:
Е. И. Антонов, И. К. Козлов. Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков на проективной плоскости в потенциальном поле // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 2, с. 10–25.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 2.

UDC 517.938.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-2-10-25

Liouville classification of integrable geodesic flows on a projective plane in a potential field

E. I. Antonov, I. K. Kozlov

Antonov Evgenii Igorevich — student at the Department of Differential Geometry and Applications of the Faculty of Mechanics and Mathematics of M. V. Lomonosov MSU (Moscow).
e-mail: antonov.zhenya@hotmail.com
Kozlov Ivan Konstantinovich — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor at the Department of Differential Geometry and Applications of the Faculty of Mechanics and Mathematics of M. V. Lomonosov MSU (Moscow).
e-mail: ikozlov90@gmail.com

[1]Исследование И. К. Козлова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 17-11-01303).

Abstract

A Liouville classification of a natural Hamiltonian system on the projective plane with a rotation metric and a linear integral is obtained. All Fomenko–Zieschang invariants (i. e., labeled molecules) of the system are calculated.

Keywords: integrable Hamiltonian systems, geodesic flow, labeled molecule, Fomenko–Zieschang invariant.

Bibliography: 9 titles.

For citation:
E. I. Antonov, I. K. Kozlov, 2020, "Liouville classification of integrable geodesic flows on a projective plane in a potential field", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 2, pp. 10–25.

1. Введение

В данной работе мы изучим топологические свойства интегрируемого геодезического потока на $\mathbb{RP}^2$, получающегося как фактор по инволюции геодезического потока на S^2, рассмотренного в работе Е. О. Кантонистовой [3]. А именно, мы вычислим все инварианты Фоменко — Цишанга (т. е. меченые молекулы) этой системы (см. Теорему 3).

Полученные результаты основываются на теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, созданной А. Т. Фоменко и его школой (см. [2]). Основы этой теории были заложены в [5, 6, 7, 8].

Подробнее о лиувиллевой классификации (т.е. о вычислении инвариантов Фоменко — Цишанга) для геодезических потоков см. [2]. В частности, инварианты Фоменко — Цишанга для линейно интегрируемого геодезического потока на $\mathbb{RP}^2$ без потенциала были вычислены В. С. Матвеевым (см. [2, Том 2, Раздел 3.4]). В работе [3] Е. О. Кантонистовой были вычислены все меченые молекулы интегрируемых геодезических потоков на поверхностях вращения, гомеоморфных сфере S^2, с инвариантным потенциалом и линейным интегралом. Д. С. Тимонина в [4] описала все возможные грубые молекулы для геодезических потоков на $\mathbb{RP}^2$, получающих как фактор систем из [3] по инволюции. Коротко опишем эти системы на S^2 и $\mathbb{RP}^2$.

1.1. Линейно интегрируемый геодезический поток на S^2

Рассмотрим риманово многообразие вращения $M = S^2$ с естественными координатами $(r;\varphi), r \in (0;L), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, в которых метрика вращения записывается в виде

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + f^2(r)\mathrm{d}\varphi^2.$$

В окрестности полюсов введем локальные координаты

$$x = f(r)\cos\varphi, \qquad y = f(r)\sin\varphi.$$

Функция $f(r)$ удовлетворяет условиям следующей леммы, поэтому метрика в полюсах $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$.

Лемма 1 (А. Бессе [1]). *Метрика на многообразии вращения M и инвариантная при вращениях функция $V(r)$ на нем являются гладкими в полюсах (то есть в точках $r = 0$ и $r = L$), если существуют $F = F(r)$ и $W = W(r)$, определенные на всей числовой прямой такие, что $F|_{[0;L]} = f, W|_{[0;L]} = V$, и выполнены следующие условия:*

1. *$F(-r) = -F(r) = F(2L-r)$, то есть функции $F(r)$ и $F(L+r)$ нечетны (или, что эквивалентно, функция $F(r)$ — периодична с периодом $2L$ и нечетна) и $F'(0) = 1, F'(L) = -1$;*

2. *$W(-r) = W(r) = W(2L - r)$, то есть функции $W(r)$ и $W(L + r)$ четны (или, что эквивалентно, функция $W(r)$ — периодична с периодом $2L$ и четна).*

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему на кокасательном расслоении T^*S^2 с гамильтонианом

$$H = \begin{cases} \dfrac{p_r^2}{2} + \dfrac{p_\varphi^2}{2f^2(r)} + V(r), & \text{вне полюсов (т.е. } r \neq 0, L), \\ \dfrac{p_x^2 + p_y^2}{2} + V(0), & \text{в полюсах (т.е. } r = 0 \text{ или } L) \end{cases} \tag{1}$$

и первым интегралом

$$K = \begin{cases} p_\varphi, & \text{вне полюсов}, \\ xp_y - yp_x, & \text{в окрестности полюсов}. \end{cases} \tag{2}$$

Замечание 1 ([3]). *В полюсах (т.е. при $x = y = 0$) $K = 0$. При $K = 0$ у системы нет критических точек ранга 1 на неособых изоэнергетических поверхностях Q_h^3. При этом у системы на T^*S^2 ровно две точки ранга 0: это $(0, N)$ и $(0, S)$, где N и S — полюса сферы.*

Рассмотрим тор Лиувилля системы $H = h, K = k$, не содержащий точки полюсов. Тогда он состоит из точек (p_r, k, r, φ), $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, удовлетворяющих уравнению

$$p_r = \pm\frac{1}{f(r)}\sqrt{U_h(r) - k^2}, \tag{3}$$

где

$$U_h(r) = 2f^2(r)(h - V(r)). \tag{4}$$

Замечание 2. *В [3] объяснено, как построить грубую молекулу системы по графику функции $U_h(r)$ (см. также [2] или [4]). Молекула всегда симметрична относительно уровня $k = 0$ и имеет вид $W - W$. Неформально говоря, слоение Лиувилля для "половины молекулы" W получается, если взять "объемный горный рельеф" функции $U_h(r)$, расслоить его на поверхности уровня $U_h = \mathrm{const}$, а затем домножить на окружность S^1.*

Теорема 1 (Е. О. Кантонистова [3]). *Рассмотрим систему (то есть геодезический поток с линейным интегралом и с инвариантным при вращениях потенциалом) на многообразии вращения $M \approx S^2$, заданную парой функций $(V(r); f(r))$. Пусть $Q \subseteq Q_h^3$ — связная компонента неособой изоэнергетической поверхности, на которой K — функция Ботта. Тогда:*

1. *молекула системы симметрична (без учета ориентации на ребрах) относительно оси h, а ориентация на ребрах задается в сторону возрастания k. То есть молекула имеет вид $W - W$, где соединяющее молекулы ребро суть однопараметрическое семейство торов Лиувилля, а каждая молекула W — это либо один атом A, либо дерево. Все неконцевые (то есть седловые) вершины дерева — это атомы V_l, а концевые имеют тип A. При этом при $k > 0$ входящее ребро для каждого атома V_l — одно, а исходящих ребер — l (при $k < 0$ картина антисимметрична, то есть без учета ориентации на ребрах молекула симметрична относительно h, а ориентации на кусках $W_+ = W(k > 0)$ и $W_- = W(k < 0)$ противоположны).*

2. (a) *Метки на ребрах типа $A - V_l$ молекулы: $r = 0, \varepsilon = +1$.*

   (b) *Метки на ребрах типа $V_s - V_l$, где оба седловых атома находятся в одной полуплоскости ($k > 0$ или $k < 0$): $r = \infty, \varepsilon = +1$.*

(c) *метки на центральном ребре типа* $V_l - V_l$ *(симметричном относительно уровня* $k = 0$*):* $r = \infty, \varepsilon = -1$.

(d) *Если молекула* $W - W$ *имеет типа* $A - A$*, то метка* r *определяется следующим образом: разрежем многообразие* M^4 *по поверхности* Q^3 *на два куска* M^4_- *и* M^4_+ *(напомним, что* Q^3 *— связная компонента* Q^3_h*). Кусок* M^4_-*, который отвечает строго меньшим значениям энергии, чем* h*, может содержать* 2, 1 *или* 0 *особых точек ранга нуль. Тогда соответственно* $r = \frac{1}{2}$, $r = 0$, *или* $r = \infty$*. Во всех трех случаях* $\varepsilon = +1$.

(e) *Если молекула* $W - W$ *отлична от* $A - A$*, то она содержит единственную семью, получаемую отбрасыванием всех атомов* A*. Метка* n *в этом случае равна числу особых точек ранга ноль на многообразии* M^4_- *(см. п.* 2d*).*

Замечание 3. *Рассмотрим молекулу* $A - A$*. Метка* $r = \frac{1}{2}, 0, \infty$ *или* $r = \frac{p}{q}$ *(где* $p < q$ *и* $q \geq 3$*), тогда и только тогда, когда соответствующая поверхность* Q^3 *гомеоморфна* $\mathbb{RP}^3$*,* S^3*,* $S^1 \times S^2$ *или линзовому пространству* $L_{q,p}$ *соответственно (см. [2, Том 1, Предложение 4.3]).*

1.2. Линейно интегрируемый геодезический поток на $\mathbb{RP}^2$

Представим проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$ как фактор сферы S^2 по инволюции η, которая в координатах r, φ задается формулой:

$$\eta(r, \varphi) = (L - r, \varphi + \pi). \tag{5}$$

Полюса при инволюции переходят друг в друга: $\eta(S) = N, \eta(N) = S$. Имеем: $T^*\mathbb{RP}^2 = T^*S^2/\eta^*$, где

$$\eta^*(p_r, p_\varphi, r, \varphi) = (-p_r, p_\varphi, L - r, \varphi + \pi). \tag{6}$$

Далее мы считаем, что $f(r) = f(L - r)$ и $V(r) = V(L - r)$, чтобы f и V задавали функции на $\mathbb{RP}^2$.

Теорема 2 (Д. С. Тимонина, [4]). *Пусть система (то есть геодезический поток с линейным интегралом на многообразии вращения с инвариантным потенциалом) на проективной плоскости* $\mathbb{RP}^2$ *задана парой функций* $f(r)$ *и* $V(r)$ *так, как описано выше. Тогда молекуда системы, соответствующая связной компоненте изоэнергетичекой поверхности* $Q^3_{\mathbb{RP}^2}$*, симметрична и имеет вид* $W - W$*, где каждая молекула* W *— это либо один атом* A*, либо дерево. Все неконцевые (то есть седловые) вершины дерева — это атомы* V_l, V_k^*, A^**, а концевые вершины имеют тип* A*. Постороение грубой молекулы осуществляется по графику функции* $U_h(r) = 2f^2(r)(h - V(r))$.

Замечание 4. *Некоторые свойства функций* $U_h(r)$*:*

1. *Из симметрий функций* f *и* V *следует, что функция* $U_h(r)$ *симметрична относительно оси* $r = \frac{L}{2}$*. Иными словами, функция* $U_h(r - \frac{L}{2})$ *четная.*

2. *В полюсах* $U_h(0) = U_h(L) = 0$.

3. *При* $r \neq 0, L$ *функция* $U_h(r) > 0$ *тогда и только тогда, когда* $V(r) < h$.

4. *Также отметим, что при* $K = 0$ *и* $r \neq 0, L$ *нули* $U_h(r) = 0$ *не могут быть точками локального экстремума функции* $U_h(r)$*. В противном случае в этих точках* $p_r = 0$ *и* $\frac{\partial H}{\partial r} = 0$*, и это были бы точки ранга* 1*. Но на неособых поверхностях при* $K = 0$ *нет точек ранга* 1 *(см. Замечание* 1*).*

Несложно доказать следующее утверждение о топологии $Q^3_{\mathbb{RP}^2}$. Пусть $\pi : Q^3_h \to \mathbb{RP}^2$ — проекция изоэнергитической поверхности. Заметим, точки $\pi(Q^3_h)$ — это в точности точки, где $V(r) \le h$. Множество $\pi(Q^3_h)$ симметрично относительно вращения, поэтому каждая его связная компонента — либо все $\mathbb{RP}^2$, либо "шапочка" у полюса, либо лист Мебиуса (окрестность "экватора"), либо кольцо.

Утверждение 1. *Пусть Q^3 — связная компонента Q^3_h неособой изоэнергетической поверхности для рассматриваемой системы на $\mathbb{RP}^2$. Возможны три случая:*

1. *Если $\pi(Q^3) = \mathbb{RP}^2$, т.е. $V(r) \le h$ на всем $\mathbb{RP}^2$, то $Q^3 \approx L_{4,1}$.*
2. *Если $\pi(Q^3)$ — это диск D^2 с центром в полюсе, то $Q^3 \approx S^3$.*
3. *Если $\pi(Q^3)$ — это кольцо $I^1 \times S^1$ или лист Мебиуса $\mathbb{M}^2$, то $Q^3 \approx S^1 \times S^2$.*

Замечание 5. *В случаях из Утверждения 1 соответствующая поверхность для сферы $Q^3_{S^2}$ гомеоморфна $\mathbb{RP}^3$, S^3 и $S^1 \times S^2$ соответственно (см. [3]).*

Доказательство. [Доказательство Утверждения 1] Если $\pi(Q^3) = \mathbb{RP}^2$, то легко видеть, что Q^3 гомеоморфно расслоению единичных касательных векторов к $\mathbb{RP}^2$. Хорошо известно, что это пространство гомеоморфно $L_{4,1}$ (см., например, [9]). Если $\pi(Q^3) \approx D^2$ или $\pi(Q^3) \approx I^1 \times S^1$, то ответ такой же, как и для соответствующего случая на сфере S^2 (см. [3]). Остается рассмотреть случай $\pi(Q^3) \approx \mathbb{M}^2$. В этом случае $Q^3 \approx Q^3_{S^2}/\eta^*$, где инволюция η^* задана (6) и $Q^3_{S^2} \approx S^1 \times S^2$. Инволюция η^* действует на $Q^3_{S^2}$ следующим образом: координату φ на S^1 она увеличивает на π, а отображение на сомножителе S^2 изотопно тождественному отображению (в координатах (p_r, p_φ, r) легко видеть, что оно изотопно повороту на угол π вокруг оси p_φ). Следовательно, $Q^3 \approx S^1 \times S^2/\eta^* \approx S^1 \times S^2$. Утверждение 1 доказано. □

Замечание 6. *Для молекул вида $A-A$ по топологии Q^3 можно найти метку r (см. Замечание 3). Однако мы поступим наоборот: в Разделе 4 во всех трех случаях мы вначале вычислим метку r для молекул вида $A-A$. А потом убедимся, что ответ согласуется с Утверждением 1.*

2. Основные результаты

Для удобства разобьем классификацию меченых молекул для рассматриваемой системы на два утверждения: для случая, когда молекула имеет вид $A-A$, и для всех остальных случаев.

Теорема 3. *Рассмотрим натуральную гамильтонову систему на $\mathbb{RP}^2$ с гамильтонианом (1) и первым интегралом (2). Пусть Q^3 — связная компонента неособой изоэнергетической поверхности Q^3_h. Для всех молекул $A-A$ метка $\varepsilon = 1$, а метка r следующим образом зависит от проекции $\pi(Q^3)$ на $\mathbb{RP}^2$.*

1. *Если $\pi(Q^3) = \mathbb{RP}^2$, то метка $r = \frac{1}{4}$.*
2. *Если $\pi(Q^3) \approx D^2$, то метка $r = 0$.*
3. *В остальных случаях (т.е. если $\pi(Q^3) \approx I^1 \times S^1$ или $\pi(Q^3) \approx \mathbb{M}^2$) метка $r = \infty$.*

Замечание 7. *Пусть проекция Q^3 на $\mathbb{RP}^2$ в координатах (r, φ) имеет вид $\pi(Q^3) = [a, b] \times S^1$, где $[a, b] \subseteq \left[0, \frac{L}{2}\right]$ (при этом мы формально отождествляем все точки вида $(0, \varphi)$). Иными словами, пусть $[a, b] \subseteq \left[0, \frac{L}{2}\right]$ — связная компонента множества точек r,*

в которых $V(r) \leq h$. Молекула системы на Q^3 имеет тип $A-A$ тогда и только тогда, когда функция $U_h(r)$ на $[a,b]$ имеет ровно один положительный локальный экстремум (который будет глобальным максимумом), см. [4]. А топология $\pi(Q^3)$ следующим образом зависит от вида отрезка $[a,b]$.

1. *Если $a=0, b=\frac{L}{2}$, то $\pi(Q^3)=\mathbb{RP}^2$.*
2. *Если $a=0, b<\frac{L}{2}$, то $\pi(Q^3)\approx D^2$.*
3. *Если $a>0, b=\frac{L}{2}$, то $\pi(Q^3)\approx \mathbb{M}^2$.*
4. *Если $a>0, b<\frac{L}{2}$, то $\pi(Q^3)\approx I^1\times S^1$.*

Также отметим, что если молекула имеет вид $A-A$ и $\pi(Q^3)=\mathbb{RP}^2$ (т.е. $a=0, b=\frac{L}{2}$), то $U_h\left(\frac{L}{2}\right)$ — это максимум функции.

Пример 1. *Случай, когда потенциал $V(r)=0$ был разобран В. С. Матвеевым (см. [2, Том 2, Раздел 3.4]). В этом случае, если молекула имеет вид $A-A$, то $V(r)\leq h$ на всем $\mathbb{RP}^2$. Поэтому метка $r=\frac{1}{4}$ и $Q^3\approx L_{4,1}$.*

Теорема 4. *Пусть молекула $W-W$ системы на Q^3 отлична от $A-A$. Тогда метки на ней имеют следующий вид.*

1. *На ребрах типа $A-V_l$ метка $\varepsilon=1$. Если атом A центральный (см. Определение 1), то метка $r=\frac{1}{2}$, иначе метка $r=0$.*
2. *На ребрах между седловыми атомами метки $r=\infty$. Если ребро нецентральное (т.е. $k>0$ или $k<0$), то метка $\varepsilon=+1$. На центральном ребре метка $\varepsilon=-1$.*
3. *Если молекула $W-W$ отлична от $A-A$, то она содержит единственную семью, получаемую отбрасыванием всех атомов A. Метка n следующим образом зависит от проекции $\pi(Q^3)$ на $\mathbb{RP}^2$.*
   - *(a) Если $\pi(Q^3)=\mathbb{RP}^2$, то метка $n=-2$.*
   - *(b) Если $\pi(Q^3)\approx D^2$ или $\pi(Q^3)\approx \mathbb{M}^2$, то метка $n=-1$.*
   - *(c) В оставшемся случае (если $\pi(Q^3)\approx I^1\times S^1$) метка $n=0$.*

Замечание 8. *В [2, Том 2, Теорема 3.11] в результате В.С. Матвеева про случай нулевого потенциала $V(r)=0$ неверно указана метка n. Если $V(r)=0$, то $\pi(Q^3)=\mathbb{RP}^2$ и метка $n=-2$, а не -1 (это также подтверждается формулой Топалова, см. Замечание 13).*

3. Построение допустимых базисов

Для доказательства теорем 3 и 4 явно построим допустимые базисы для всех атомов, и затем вычислим по ним метки по правилам из [2]. Отдельно разберем построение допустимых атомов для эллиптических и седловых атомов.

3.1. Случай эллиптических атомов

Единственный эллиптический атом — это атом A.

Замечание 9. *Для атома A мы выбираем допустимый базис (λ, μ) по следующему правилу из [2]:*

1. *λ-цикл стягивается в точку;*
2. *μ-цикл дополняет цикл λ до базиса;*
3. *μ-цикл ориентирован направлением $\operatorname{sgrad} H$ на критической окружности;*
4. *λ-цикл ориентирован так, что пара (λ, μ) положительно ориентирована на граничном торе $\mathbb{T}^2$ полнотория. Мы считаем, что пара векторов u, v задает положительную ориентацию касательного пространства $T_x\mathbb{T}^2$, если*

$$\omega \wedge \omega(\operatorname{grad} H, N, u, v) > 0, \tag{7}$$

т.е. четверка $(\operatorname{grad} H, N, u, v)$, где N — внешняя нормаль к полноторию, положительно ориентирована относительно $\omega \wedge \omega$.

Напомним (см. [2]), что λ-цикл для атома A определен однозначно, а μ-цикл — с точностью до прибавления $k\lambda$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Замечание 10. *Замена*

$$(p_r, p_\varphi, r, \varphi) \to (p_r, -p_\varphi, r, -\varphi), \tag{8}$$

сохраняет симплектическую структуру $\omega = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi$ на T^*S^2, при этом $H \to H, K \to -K$. Мы будем строить допустимые базисы при $K < 0$ из допустимых базисов при $K > 0$ при помощи замены (8). В частности, для атома A в координатах $(p_{r'}, p_{\varphi'}, r', \varphi') = (p_r, -p_\varphi, r, -\varphi)$ допустимый базис (λ', μ') задается теми же формулами, что и базис (λ, μ).

Далее заметим, что при $K \neq 0$ (и до факторизации по инволюции (6)) тор Лиувилля, заданный (3), является произведением двух циклов:

1. цикла α_φ вида

$$\Big\{p_r = const, \quad p_\varphi = const, \quad r = const, \quad \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\Big\}, \tag{9}$$

   где мы считаем $\dot\varphi > 0$;

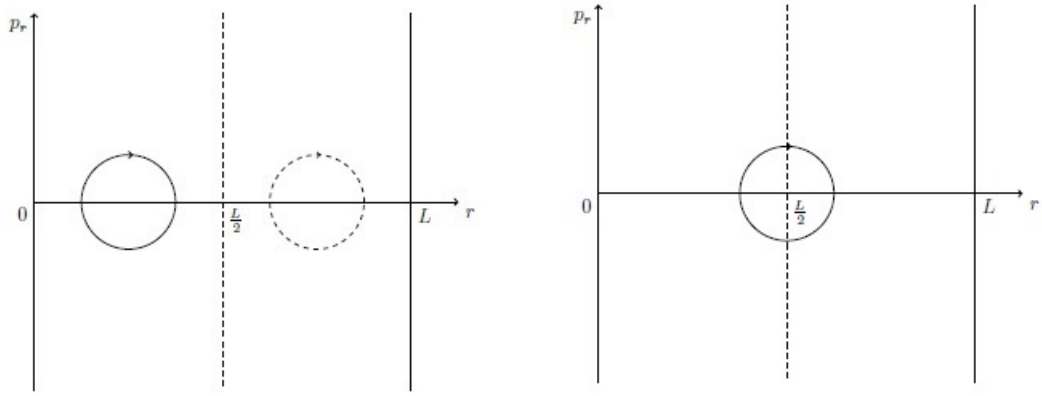
2. и цикла α_r вида

$$\Big\{p_r = \pm\frac{1}{f(r)}\sqrt{U_h(r) - k^2}, p_\varphi = const, r \in [r_1, r_2] \subset [0, L], \varphi = const\Big\}, \tag{10}$$

   который для определенности обходится по часовой стрелке (т.е. $\dot r > 0$ при $p_r > 0$).

Каждый атом A соответствует максимуму функции $U_h(r)$ при $K > 0$ и минимуму функции $U_h(r)$ при $K < 0$. Пусть это значение достигается в точке r_{ext}. Для $\mathbb{RP}^2$ будет два случая:

1. если $r_{\text{ext}} \neq \frac{L}{2}$, то инволюция (6) отождествляет два тора Лиувилля в окрестности особого слоя атома A (на Рис. 1a изображены соответствующие циклы α_r);



(a) Нецентральный атом (b) Центральный атом

Рис. 1: Сечения атома A

2. если же $r_{\text{ext}} = \frac{L}{2}$, то инволюция (6) переводит тор Лиувилля в окрестности особого слоя атома A в себя (см. Рис. 1b)

Definition 1. *Атом A, соответствующий $r_{\text{ext}} \neq \frac{L}{2}$, мы будем называть нецентральным, а атом A, соответствующий $r_{\text{ext}} = \frac{L}{2}$, — центральным.*

Утверждение 2. *Для рассматриваемой системы на $\mathbb{RP}^2$ в окрестности атома A можно взять указанные в Таблице 1 допустимые базисы (λ, μ) в зависимости от значений интеграла K и типа атома A.*

	Нецентр. A	Центр. A
$K > 0$	$\lambda = \alpha_r$, $\mu = \alpha_\varphi$	$\lambda = \alpha_r$, $\mu = \frac{\alpha_r + \alpha_\varphi}{2}$
$K < 0$	$\lambda = \alpha_r$, $\mu = -\alpha_\varphi$	$\lambda = \alpha_r$, $\mu = \frac{\alpha_r - \alpha_\varphi}{2}$

Таблица 1: Допустимые базисы для атома A

Доказательство. [Доказательство Утверждения 2] В соответствии с Замечанием 10 достаточно доказать утверждение при $K > 0$. Вначале рассмотрим нецентральные атомы (см. рис. 1a). Очевидно, что цикл λ стягивается в точку, и что (λ, μ) — базис. Далее, каноническая симплектическая структура на кокасательном расслоении имеет вид $\omega = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi$. Поэтому

$$\operatorname{sgrad} H = \omega^{-1} dH = \left(-\frac{\partial H}{\partial r}, 0, p_r, \frac{p_\varphi}{f^2} \right). \tag{11}$$

В особых точках ранга 1 векторное поле $\operatorname{sgrad} H$ пропорционально $\operatorname{sgrad} K = (0, 0, 0, 1)$. Поэтому ориентация цикла μ зависит только от знака $p_\varphi = k$ и выбрана правильно.

Остается проверить, что ориентация λ выбрана правильно, т.е. что выполнено (7). Обозначим через v_λ и v_μ касательные векторы к указанным циклам λ и μ. Будем считать $p_r > 0$. В данном случае четверка векторов будет выглядеть следующим образом.

$$\operatorname{grad} H = \left(p_r, \frac{p_\varphi}{f^2}, \frac{\partial H}{\partial r}, 0 \right), \qquad N = (\alpha, -1, -\alpha\beta, 0)$$
$$v_\lambda = (\beta, 0, 1, 0), \qquad v_\mu = (0, 0, 0, 1),$$

где

$$\alpha = \frac{k}{f^2}\frac{p_r}{p_r^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2}, \qquad \beta = -\frac{1}{p_r}\frac{\partial H}{\partial r}.$$

Отметим, что вектор N находится из условий

$$(N, \operatorname{grad} H) = (N, v_\lambda) = (N, v_\mu) = 0, \qquad N(p_\varphi) < 0.$$

Форма объема $\omega\wedge\omega = -2dp_r\wedge dp_\varphi\wedge dr\wedge d\varphi$, поэтому четверка будет положительно определена, т.к. определитель соответствующей матрицы отрицательный:

$$\begin{vmatrix} p_r & \frac{p_\varphi}{f^2} & \frac{\partial H}{\partial r} & 0 \\ \alpha & -1 & -\alpha\beta & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{p_r}\left(p_r^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2 + \frac{k^2}{f^4}\right) < 0,$$

т.к. мы взяли $p_r > 0$. Условие (7) выполнено, следовательно, (λ, μ) — допустимый базис.

Рассмотрим теперь центральные атомы (см. Рис. 1*b*). Достаточно доказать, что (λ, μ) — базис на торе Лиувилля (после факторизации по инволюции (6)). Остальные утверждения (что λ стягивается в точку, и что ориентации λ, μ выбраны правильно) доказываются так же, как и в случае $r_{\text{ext}} \neq \frac{L}{2}$. До факторизации по инволюции (6) можно взять такой же базис (λ', μ'), что и в случае $r_{\text{ext}} \neq \frac{L}{2}$. Введем на замкнутой кривой на Рис. 1*b* параметр $\psi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. При этом можно считать, что инволюция (6) действует как $(\varphi, \psi) \to (\varphi+\pi, \psi+\pi)$. В таком случае, до инволюции тор $\mathbb{T}^2$ получался как фактор $\mathbb{R}^2$ по подгруппе, порожденной векторами $(2\pi, 0)$ и $(0, 2\pi)$. После инволюции к порождающим подгруппы нужно добавить (π, π). Следовательно $\lambda = \lambda'$ и $\mu = \frac{\lambda'+\mu'}{2}$ действительно будут новым базисом в $\pi_1(\mathbb{T}^2/\mathbb{Z}^2)$. Что и требовалось доказать.

Утверждение 2 доказано. □

3.2. Случай седловых атомов

Есть два типа седловых атомов — со звездочками и без.

Замечание 11. *Для седлового атома без звездочек мы выбираем допустимые базисы (λ, μ_i) по следующему правилу из [2]:*

1. *λ-цикл — слой расслоения Зейферта (т.е. цикл получается из критической окружности непрерывным продолжением на соседние торы);*
2. *μ_i-циклы дополняют цикл λ до базиса, при этом должно существовать глобальное сечения 3-атома, проходящее одновременно через все μ_i.*
3. *λ-цикл ориентирован направлением $\operatorname{sgrad} H$ на критической окружности.*
4. *μ_i-цикл ориентирован так, что пара (λ, μ_i) положительно ориентирована на граничном торе $\mathbb{T}^2$ (ориентация на торе $\mathbb{T}^2$ задана (7), как и для случая атома A).*

Замечание 12. *Для атомов со звездочками, в соответствии с [2], мы построим допустимые базисы по дублю атома. В данном случае дубль атома — это соответствующий атом для сферы S^2. Если соответствующий тор Лиувилля переходит в себя при инволюции (6), то цикл $\hat{\mu}_i$ для сферы S^2 нужно заменить на $\mu_i = \frac{\lambda+\hat{\mu}_i}{2}$. В противном случае этот цикл можно оставить без изменения: $\mu_i = \hat{\mu}_i$.*

Напомним (см. [2]), что λ-цикл для седловых атомов определен однозначно, а μ_i-циклы — с точностью до прибавления $k_i\lambda$, где $k_i \in \mathbb{Z}$ и $\sum_i k_i = 0$.

Определение 1. *Седловой атом, который инволюция* (6) *переводит в себя мы будем называть центральным. Остальные седловые атомы мы будем называть нецентральными.*

Утверждение 3. *Для рассматриваемой системы на $\mathbb{RP}^2$ в окрестности седлового атома λ-цикл допустимого базиса равен α_φ при $K > 0$ и $-\alpha_\varphi$ при $K < 0$.*

1. *Пусть седловой атом — нецентральный (пример сечения такого атома до факторизации по инволюции* (6) *схематично изображено на Рис. 2c). Для "внешнего", в соответствии с рис. 2c, тора Лиувилля $\mu_{\text{out}} = -\alpha_r$, для "внутренних" торов $\mu_{\text{in}} = \alpha_r$.*

2. *Пусть седловой атом — центральный и не имеет звездочек (пример сечения такого атома до факторизации по инволюции* (6) *схематично изображен на Рис. 2b). В соотв. с рис. 2b будет 3 типа μ-циклов, соответствующих различным граничным торам Лиувилля — "внешний" μ_{out}, "внутренние не центральные" μ_{in} и "внутренний центральный" μ_{cent}. Их можно взять следующими:*

$$\mu_{\text{out}} = \begin{cases} \frac{\alpha_\varphi - \alpha_r}{2}, & K > 0, \\ \frac{-\alpha_\varphi - \alpha_r}{2}, & K < 0, \end{cases} \qquad \mu_{\text{in}} = \alpha_r, \qquad \mu_{\text{cent}} = \begin{cases} \frac{\alpha_r - \alpha_\varphi}{2}, & K > 0, \\ \frac{\alpha_r + \alpha_\varphi}{2}, & K < 0. \end{cases}$$

3. *Пусть седловой атом — центральный и имеет звездочки (пример сечения такого атома до факторизации по инволюции* (6) *схематично изображен на Рис. 2a). Для "внутренних", в в соответствии с Рис. 2a, торов Лиувилля $\mu_{\text{in}} = -\alpha_r$, а для "внешнего" тора $\mu_{\text{out}} = \frac{\alpha_\varphi - \alpha_r}{2}$ при $K > 0$ и $\frac{-\alpha_r - \alpha_\varphi}{2}$ при $K < 0$.*

Доказательство. [Доказательство Утверждения 3] Утверждение 3 доказывается аналогично Утверждению 2. Более того, большинство вычислений можно не проводить, поскольку в Утверждении 2 для каждого тора Лиувилля уже были найдены базисные циклы и найдена их ориентация. Также согласно Замечанию 10 достаточно построить базис при $K > 0$: в координатах $(p_{r'}, p_{\varphi'}, r', \varphi') = (p_r, -p_\varphi, r, -\varphi)$ для седловых атомов, как и для эллиптических, допустимый базис (λ', μ') задается теми же формулами, что и базис (λ, μ).

Для примера, рассмотрим "внешний" тор для случая, соответствующего Рис. 2c, при $K > 0$. Для седлового атома $\lambda = \alpha_\varphi$ при $K > 0$, поскольку это цикл, соответствующий критической окружности. Для соответствующего атома A допустимый базис $\lambda_A = \alpha_r, \mu_A = \alpha_\varphi$. Ориентация "внешних" торов Лиувилля будет как у соответствующих атомов A, а у "внутренних" — противоположная. Поэтому оставшийся цикл $\mu_{\text{out}} = -\alpha_r$.

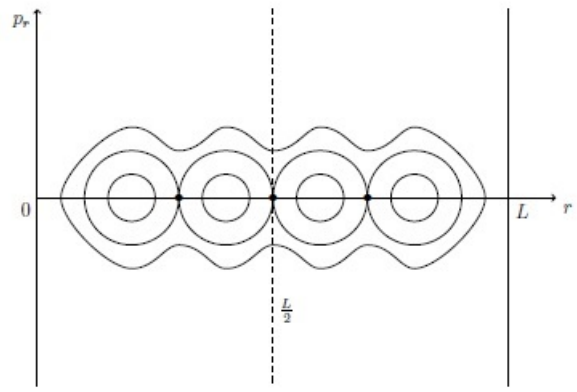
Отметим особенности выборов базисов в седловом случае. Для случая, соответствующего Рис. 2b), через циклы μ_i должно проходить сечение. Поэтому мы берем противоположные знаки при α_φ в μ_{out} и μ_{cent}, чтобы в сумме эти они сократились. Для случая, соответствующего Рис. 2a, μ-циклы находятся в соответствии с Замечанием 12.

Утверждение 3 доказано. □

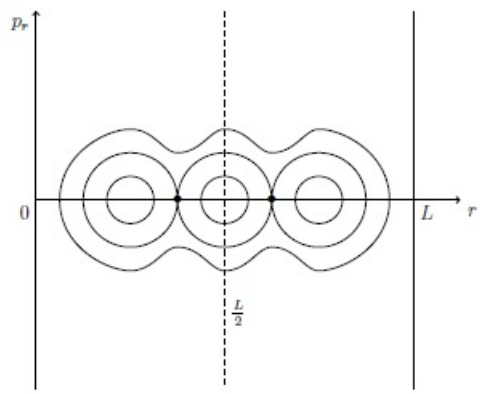
4. Доказательство Теоремы 3

Доказательство. [Доказательство Теоремы 3] Явно вычислим все матрицы перехода в указанных в Разделе 3 допустимых базисах. Во всех случаях метки r и ε вычисляются по матрице перехода так, как описано в [2].

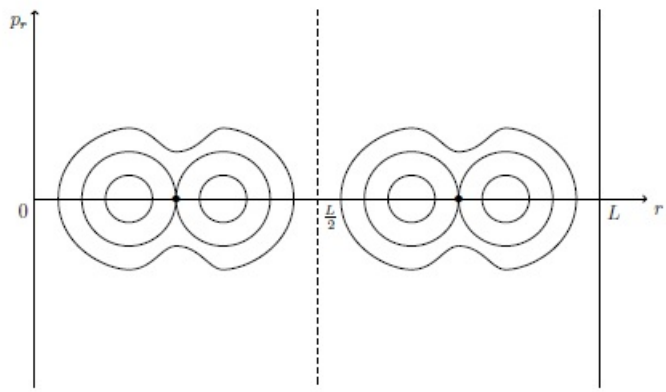
Обозначим через (λ_+, μ_+) и (λ_-, μ_-) допустимые базисы при $K > 0$ и $K < 0$ соответственно. Во всех случаях цикл α_φ корректно определен при всех K. Для циклов α_r это неверно,



(a) Атом со звездочкой



(b) Центральный атом без *



(c) Нецентральный атом без *

Рис. 2: Сечения седлового атома

потому что координаты (r, φ) имеют особенности в полюсах. Поэтому если уровень $K = 0$ содержит полюс, то циклы $\alpha_{r\pm}$ при $K > 0$ и $K < 0$ могут переходить в разные циклы при продолжении на уровень $K = 0$.

1. Вначале рассмотрим случай 3. Поскольку при $K = 0$ тор Лиувилля не содержит полюсов, $(p_r, p_\varphi, r, \varphi)$ будут глобальными координатами на Q^3. Поэтому формулы для допустимых базисов из Утверждения 2 будут выполнены для всех K. Матрица перехода для нецентральных атомов имеет вид
$$\begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \mu_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- \\ \mu_- \end{pmatrix},$$
а для центральных атомов — вид
$$\begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \mu_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- \\ \mu_- \end{pmatrix}.$$

2. Рассмотрим теперь случай 2. Несложно показать, что выполнено соотношение
$$\alpha_{r+} = \alpha_{r-} - \alpha_\varphi. \tag{12}$$
На Рис. 3 схематично изображено, как (непрерывно) меняется цикл α_{r+} при изменении K. Из (12) и Утверждения 2 вытекает, что в этом случае матрица перехода имеет вид
$$\begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \mu_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- \\ \mu_- \end{pmatrix}. \tag{13}$$

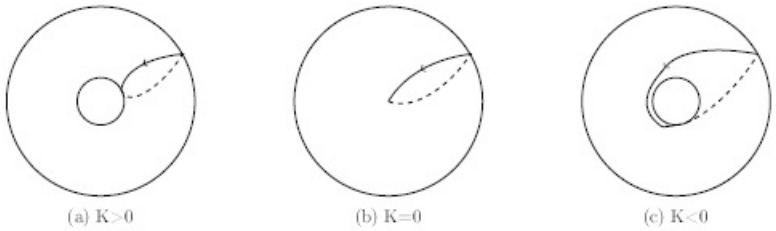


Рис. 3: Перестройка цикла λ в случае 2

Продемонстрируем это на простейшем примере: рассмотрим систему на плоскости $\mathbb{R}^2(x,y)$ натуральную систему с гамильтонианом $H = \frac{p_x^2+p_y^2}{2} + \frac{x^2+y^2}{2}$ и первым интегралом $K = xp_y - yp_x$. Легко видеть, что эта система имеет одну особую точку ранга 0 типа центр-центр. В координатах

$$u_1 = \frac{p_x + y}{\sqrt{2}}, \quad v_1 = \frac{p_y - x}{\sqrt{2}}, \quad u_2 = \frac{p_x - y}{\sqrt{2}}, \quad v_2 = \frac{p_y + x}{\sqrt{2}},$$

форма имеет вид $\omega = du_1 \wedge dv_1 + du_2 \wedge dv_2$, а интегралы $F_1 = \frac{H-K}{2} = \frac{u_1^2+v_1^2}{2}$ и $F_2 = \frac{H+K}{2} = \frac{u_2^2+v_2^2}{2}$ имеют канонический вид, как в теореме Элиассона (см. [2]). Обозначим через α_1 и α_2 циклы, соответстсвующие траекториям гамильтоновых векторных полей $\operatorname{sgrad} F_1$ и $\operatorname{sgrad} F_2$ соответственно. Аналогично доказательству Утверждения 2 несложно показать, что в качестве допустимых базисов можно взять $\lambda_+ = \alpha_1, \mu'_+ = \alpha_2$ (в окрестности точек $F_1 = 0$) и $\lambda_- = \alpha_2, \mu'_- = \alpha_1$ (в окрестности точек $F_2 = 0$). Для системы на $\mathbb{RP}^2$ в качестве циклов $\mu_\pm$ берутся циклы, соответствующие потокам $\operatorname{sgrad} K$. Поэтому нужно взять $\mu_+ = \alpha_2 - \alpha_1$ и $\mu_- = \alpha_1 - \alpha_2$. Таким образом мы получаем требуемое соотношение (13).

3. Рассмотрим наконец случай 1. Аналогично случаю 2 (см. также [2, Том 2, Раздел 3.4]) можно показать, что
$$\alpha_{r+} = \alpha_{r-} - 2\alpha_\varphi. \tag{14}$$
Из (14) и Утверждения 2 вытекает, что в этом случае матрица перехода имеет вид
$$\begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \mu_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- \\ \mu_- \end{pmatrix}.$$

Теорема 3 полностью доказана. □

5. Доказательство Теоремы 4

Доказательство. [Доказательство Теоремы 4] Теорема 4 доказывается аналогично Теореме 3. Укажем лишь все матрицы перехода между бифуркациями. Через $\lambda_\pm^A, \mu_\pm^A$ мы будем обозначать допустимые базисы для атома A, а через $\lambda_\pm^V, \mu_\pm^V$ мы будем обозначать допустимые базисы для седловых атомов (как со звездочками, так и без). Знак $\pm$ будет положительным у атома, отвечающему большему значению K (и отрицательном — для меньшего значения K).

В таблице 2 указана матрице перехода C для ребер вида $A - V$ и $V - A$ (т.е. между эллиптическим и седловым атомами). Здесь мы считаем, что $\begin{pmatrix} \lambda_+^A \\ \mu_+^A \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \lambda_-^V \\ \mu_-^V \end{pmatrix}$ при $K > 0$ и $\begin{pmatrix} \lambda_+^V \\ \mu_+^V \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \lambda_-^A \\ \mu_-^A \end{pmatrix}$ при $K < 0$.

	Нецентр. A	Центр. A
$K > 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$K < 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Таблица 2: Матрицы перехода между эллиптическими и седловыми атомами

Для нецентральных ребер вида $V - V$ (т.е. между седловыми атомами)

$$\begin{pmatrix} \lambda_+^V \\ \mu_+^V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_-^V \\ \mu_-^V \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода C на центральном ребре вида $V - V$ зависит от типа проекции $\pi(Q^3)$ на $\mathbb{RP}^2$ и указана в Таблице 3. Мы считаем, что $\begin{pmatrix} \lambda_+^V \\ \mu_+^V \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \lambda_-^V \\ \mu_-^V \end{pmatrix}$. Здесь достаточно воспользоваться тем, что мы знаем выражение допустимых базисов через α_r и α_φ (см. Утверждение 3) и то, как эти циклы меняются при изменении знака K (см. доказательство Теоремы 3). А именно, во всех случаях цикл α_φ не меняется, $\alpha_{r+} = \alpha_{r-}$ если $\pi(Q^3) \approx I^1 \times S^1$ или $\mathbb{M}^2$, выполнено (12) если $\pi(Q^3) \approx D^2$, и выполнено (14) если $\pi(Q^3) = \mathbb{RP}^2$.

$\pi(Q^3)$	$\mathbb{RP}^2$	D^2	$\mathbb{M}^2$	$I^1 \times S^1$
C	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Таблица 3: Матрицы перехода на центральном ребре между седловыми атомами

Все метки (r, ε и n) вычисляются по матрицам перехода по формулам из [2]. Теорема 4 полностью доказана. □

Замечание 13. *Продемонстрируем, что при $V(r) = 0$ по формуле Топалова (см. [2, Том 2, Раздел 1.9]) метка n равна 0 или -2, что согласуется с Теоремой 4, но не согласуется с указанной в [2, Том 2, Теорема 3.11]) меткой n. Если $V(r) = 0$, то для любой компоненты неособой изоэнергетической поверхности $\pi(Q^3) = \mathbb{RP}^2$ и $Q^3 \approx L_{4,1}$. Значит,* $\operatorname{Tor} H_1(Q^3) = 4$. *Возможны следующие два варианта.*

1. *Пусть $r = \frac{L}{2}$ является локальным максимумом функции $U_h(r)$. В этом случае в молекуле нет атомов со звездочками, зато есть два центральных атома A (пример такого атома и функции $U_h(r)$ указаны на Рис. 4).*

   На соответствующих двух ребрах, исходящих из единственной семьи, матрица перехода равна $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, и метка $r = \frac{1}{2}$ (отметим, что при $K < 0$ мы обратили ребро, и поэтому нужно взять не матрицу из Таблицы 2, а обратную к ней). На остальных исходящих ребрах матрица перехода равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и метка $r = 0$. В обозначениях из [2] энергия оснащенной молекулы $N(W^*) = 4$ и

$$N(W^*) = \beta_1 \dots \beta_m \tilde{n}. \tag{15}$$

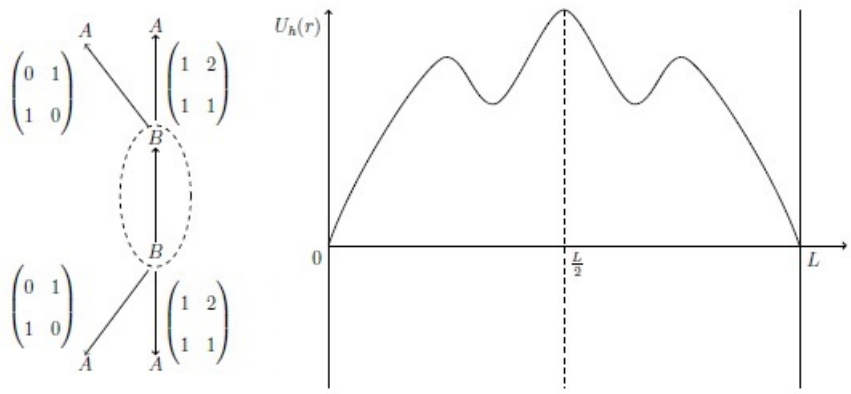


Рис. 4: Молекула с центральными атомами A

Два знаменателя r-меток равны двум: $\beta_1 = \beta_2 = 2$, а остальные $\beta_i = 0$. Поэтому "энергия семьи" $\tilde{n} = \pm 1$. С другой стороны, $\tilde{n} = n + \sum\limits_{\text{внешн. ребр.}} r_i = n + 1$. Откуда $n = 0$ или -2.

2. *Пусть $r = \frac{L}{2}$ является локальным минимумом функции $U_h(r)$. В этом случае в молекуле $p = 2$ атома со звездочкой, зато нет центральных атома A (пример такого атома и функции $U_h(r)$ указаны на Рис. 5).*

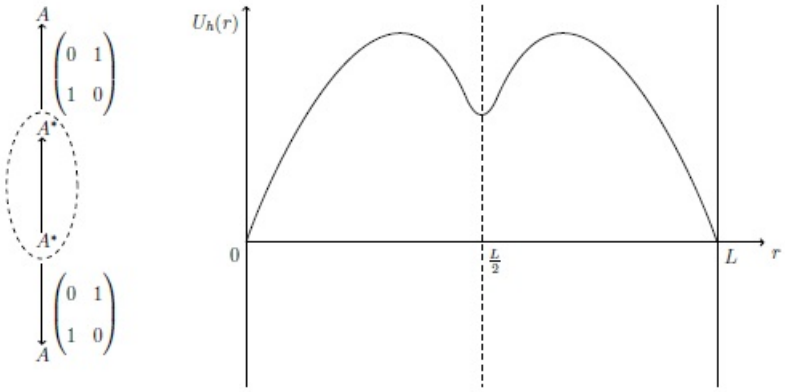


Рис. 5: Молекула без центральных атомов A

На всех исходящих ребрах матрица перехода равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и метка $r = 0$. По правилам из [2] формула (15) заменится на

$$N(W^*) = 4\beta_1 \dots \beta_m \tilde{n},$$

а "энергия семьи" $\tilde{n} = n + \sum\limits_{\text{внешн. ребр.}} r_i + \frac{p}{2} = n + 1$. Откуда опять же $n = 0$ или -2.

Неоднозначность в метке n здесь связана с выбором ориентации Q^3. При изменении ориентации Q^3 метка $n = 0$ меняется на $n = -2$ и наоборот (см. [2, Том 1, Раздел 4.5.2]). Мы выбрали ориентацию так, что $n = -2$.

6. Заключение

Получена лиувиллева классификация натуральной гамильтоновой системы на проективной плоскости с метрикой вращения и линейным интегралом. Вычислены все инварианты Фоменко — Цишанга (т.е. меченые молекулы) системы. Тем самым завершен тонкий лиувиллев анализ системы, начатый в [4]. Исправлена опечатка в метке n в [2, Том 2, Теорема 3.11].

И. К. Козлов благодарен проф. А. В. Болсинову за полезные комментарии и советы при написании работы. Исследование И. К. Козлова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01303).

Работа посвящается академику Анатолию Тимофеевичу Фоменко к его семидесятипятилетию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981, 327 с.

2. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2, Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999, 1: 444 с.; 2: 447 с.

3. Кантонистова Е. О. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле // Матем. сб., 207:3 (2016), 47–92;

4. Тимонина Д. С. Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков в потенциальном поле на двумерных многообразиях вращения: торе и бутылке Клейна // Матем. сб., 209:11 (2018), 103–136;

5. Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // Докл. АН СССР, 287:5 (1986), 1071–1075.

6. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем., 50:6 (1986), 1276–1307.

7. Фоменко А. Т., Цишанг Х. О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике // Докл. АН СССР, 294:2 (1987), 283–287.

8. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил., 22:4 (1988), 38–51.

9. Geiges H., Lange C., Seifert fibrations of lens spaces // `arXiv:1608.06844 [math.GT]`

REFERENCES

1. Besse A. L., “Manifolds all of whose geodesics are closed”, Ergeb. Math. Grenzgeb., **93**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1978, ix+262 c.

2. Bolsinov A. V. and Fomenko, A T., “Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification”, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004, xvi+730 c.

3. Kantonistova E. O. “Topological classification of integrable Hamiltonian systems in a potential field on surfaces of revolution”, *Sb. Math.*, **207**:3 (2016), 358–399.

4. Timonina D. S., “Liouville classification of integrable geodesic flows in a potential field on two-dimensional manifolds of revolution: the torus and the Klein bottle”, *Sb. Math.*, **209**:11 (2018), 1644–1676.

5. Fomenko A. T., “Morse theory of integrable Hamiltonian systems”, *Soviet Math. Dokl.*, **33**:2 (1986), 502–506.

6. Fomenko A. T., “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, *Math. USSR-Izv.*, **29**:3 (1987), 629–658.

7. Fomenko A. T., Zieschang, H., “On the topology of the three-dimensional manifolds arising in Hamiltonian mechanics”, *Soviet Math. Dokl.*, **35**:2 (1987), 520–534.

8. Fomenko A. T., “Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:4 (1988), 286–296.

9. Geiges H., Lange C., “Seifert fibrations of lens spaces”, `arXiv:1608.06844 [math.GT]`

Получено 12.01.2019 г.
Принято в печать 11.03.2020 г.