ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 2 (2013)

УДК 511

О НЕРАВЕНСТВЕ, СВЯЗАННОМ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ В МЕТОДЕ ВЕСОВОГО РЕШЕТА

Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова (г. Воронеж)

Аннотация

В работе получена теорема о неравенстве, связанном с весовой функцией в методе весового решета.

Ключевые слова: метод, решето, веса, число, оценка.

INEQUALITY ASSOCIATED WITH WEIGHT FUNCTION IN THE METHOD OF WEIGHT SIEVE

E. V. Vakhitova, S. R. Vakhitova (Voronezh)

Abstract

In this paper the theorem on inequality connected with weighted function in method sieve weights is obtained.

Key words: method, sieve, weights, number, estimation.

1. Введение

При решении ряда теоретико-числовых задач, в которых применяется метод весового решета, возникает необходимость исследования весовой функции. Будем рассматривать весовую функцию, которая была анонсирована А. А. Бухштабом в работе [1] и позже изучена первым автором в работах [2] и [3]. Отметим, что различные методы весового решета исследованы в монографиях [4] – [6]. В настоящей работе получено неравенство, связанное с весовой функцией с весами Бухштаба. При этом возникает величина $B(\alpha, a, b, c, g')$, которая определена следующим равенством:

$$B(\alpha, a, b, c, g') := \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1} \frac{F(z)dz}{\alpha a - z} + \frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b) \int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}} \frac{F(z)dz}{\alpha a - z} +$$

$$+\int\limits_{\alpha a-c}^{g'} F(z)\frac{z-(\alpha a-c)}{\alpha a-z}dz+\int\limits_{\frac{{g'}^2\alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a}\Bigg(\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a}v} F(z)\frac{dz}{v-z}\Bigg)\frac{dv}{v}+$$

$$+\frac{g'}{2\alpha a}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1} F(g')\frac{(b+1)z-(2\alpha a-b-1)}{z(1+z)}dz+$$

$$+\frac{g'}{\alpha a}\int\limits_{\frac{g'}{\alpha a-g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}} F(g')\frac{(b+1-\alpha a/g')z-(\alpha a-b-1)}{z(1+z)}dz\Bigg\}, \qquad (1)$$

где $\alpha, a, b, c, g' \in \mathbf{R}$, $0<\alpha\leqslant 1$, $1\leqslant b<c<\alpha a$, $1\leqslant g'\leqslant \alpha a-1$, $2c-b-1>0$, $g'+1\leqslant \alpha a\leqslant 2g'+2$, $\alpha a-c\leqslant g'$.

2. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть $B(\alpha,a,b,c,g')$ определено равенством (1). Тогда*

$$B(\alpha,a,b,c,g')=\frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b)\int\limits_{g'}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+$$

$$+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+\int\limits_{\alpha a-c}^{g'}F(z)\frac{z-(\alpha a-c)}{\alpha a-z}dz+$$

$$+\int\limits_{\frac{{g'}^2\alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a}\Bigg(\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\Bigg)\frac{dv}{v}+D_1\Bigg\}, \qquad (2)$$

где

$$D_1:=\frac{g'}{\alpha a}F(g')\Bigg\{-\alpha a\frac{g'-1}{g'}\ln(\alpha a-1)+\frac{b+1}{2}\ln\Big(\alpha a(g'-1)+1\Big)+$$

$$+\Big(\alpha a\frac{g'-1}{g'}-b-1\Big)\ln g'+\Big(b+1-\frac{\alpha a}{g'}\Big)\ln(\alpha a-g')\Bigg\}. \qquad (3)$$

Доказательство. Преобразуем первые два интеграла из равенства (1), отделив общий множитель $1/(2c-b-1)$.

$$J_1+J_2 := \frac{2c-b-1}{2}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+(c-b)\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}=$$

$$=\left((c-b)+\frac{b-1}{2}\right)\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+(c-b)\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}.$$

Для g' и αa выполнено неравенство

$$g'\leqslant\frac{\alpha a(g'-1)+1}{g'},$$

так как при $\alpha a\geqslant 4$ для всех g' из интервала $[1;\ \alpha a-1]$ будет выполнено неравенство $g'^2-\alpha a g'+(\alpha a-1)\leqslant 0$.

Кроме того, при $g'\leqslant\alpha a-1$ выполнено неравенство

$$\alpha a-1\geqslant\frac{\alpha a(g'-1)+1}{g'}.$$

Поэтому для суммы интегралов J_1+J_2 получим следующее равенство:

$$J_1+J_2=(c-b)\int\limits_{g'}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}. \tag{4}$$

Преобразуем пятый интеграл из равенства (1).

$$J_5 := \frac{g'}{2\alpha a}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1}F(g')\frac{(b+1)z-(2\alpha a-b-1)}{z(1+z)}dz=$$

$$=\frac{g'}{2\alpha a}F(g')\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1}\left(\frac{-(2\alpha a-b-1)}{z}+\frac{2\alpha a}{1+z}\right)dz=$$

$$=\frac{g'}{2\alpha a}F(g')\Big\{-(2\alpha a-b-1)\ln z+2\alpha a\ln(1+z)\Big\}\Big|_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1}=$$

$$= \frac{g'}{2\alpha a} F(g') \biggl\{ -(2\alpha a - b - 1) \ln \frac{(\alpha a - 1)(\alpha a - 1)}{\alpha a(g' - 1) + 1} +$$

$$+ 2\alpha a \ln \frac{\alpha a(\alpha a - 1)}{\alpha a g' - \alpha a + 1 + \alpha a - 1} \biggr\},$$

$$J_5 = \frac{g'}{2\alpha a} F(g') \biggl\{ -(2\alpha a - b - 1) \ln \frac{(\alpha a - 1)^2}{\alpha a(g' - 1) + 1} + 2\alpha a \ln \frac{\alpha a - 1}{g'} \biggr\}. \qquad (5)$$

Преобразуем шестой интеграл из равенства (1).

$$J_6 := \frac{g'}{\alpha a} \int\limits_{\frac{g'}{\alpha a - g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a + 1}{\alpha a - 1}} F(g') \frac{(b + 1 - \alpha a/g')z - (\alpha a - b - 1)}{z(1+z)} dz =$$

$$= \frac{g'}{\alpha a} F(g') \int\limits_{\frac{g'}{\alpha a - g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a + 1}{\alpha a - 1}} \left(\frac{-(\alpha a - b - 1)}{z} + \frac{\alpha a - \alpha a/g'}{1+z} \right) dz =$$

$$= \frac{g'}{\alpha a} F(g') \biggl\{ -(\alpha a - b - 1) \ln z + \alpha a \frac{g' - 1}{g'} \ln (1 + z) \biggr\} \bigg|_{\frac{g'}{\alpha a - g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a + 1}{\alpha a - 1}} =$$

$$= \frac{g'}{\alpha a} F(g') \biggl\{ -(\alpha a - b - 1) \ln \frac{(\alpha a(g' - 1) + 1)(\alpha a - g')}{(\alpha a - 1)g'} +$$

$$+ \alpha a \frac{g' - 1}{g'} \ln \frac{(\alpha a g' - \alpha a + 1 + \alpha a - 1)(\alpha a - g')}{(\alpha a - 1)(g' + \alpha a - g')} \biggr\},$$

$$J_6 = \frac{g'}{\alpha a} F(g') \biggl\{ -(\alpha a - b - 1) \ln \frac{(\alpha a(g' - 1) + 1)(\alpha a - g')}{(\alpha a - 1)g'} +$$

$$+ \alpha a \frac{g' - 1}{g'} \ln \frac{(\alpha a - g')g'}{(\alpha a - 1)} \biggr\}. \qquad (6)$$

Тогда для суммы пятого и шестого интегралов из равенства (1) получим, учитывая равенства (5) и (6):

$$J_5 + J_6 = \frac{g'}{\alpha a} F(g') \biggl\{ \frac{-(2\alpha a - b - 1)}{2} \ln \frac{(\alpha a - 1)^2}{\alpha a(g' - 1) + 1} +$$

$$+ \frac{2\alpha a}{2} \ln \frac{(\alpha a - 1)}{g'} - (\alpha a - b - 1) \ln \frac{(\alpha a(g' - 1) + 1)(\alpha a - g')}{(\alpha a - 1)g'} +$$

$$+\alpha a\frac{g'-1}{g'}\ln\frac{(\alpha a-g')g'}{\alpha a-1}\Bigg\} =$$

$$=\frac{g'}{\alpha a}F(g')\Bigg\{\left(\frac{b+1}{2}-\alpha a\right)\Bigg(2\ln(\alpha a-1)-\ln\Big(\alpha a(g'-1)+1\Big)\Bigg)+$$

$$+\alpha a\Big(\ln(\alpha a-1)-\ln g'\Big)+(b+1-\alpha a)\Bigg(\ln\Big(\alpha a(g'-1)+1\Big)+$$

$$+\ln(\alpha a-g')-\ln g'-\ln(\alpha a-1)\Bigg)+$$

$$+\alpha a\frac{g'-1}{g'}\Big(\ln g'+\ln(\alpha a-g')-\ln(\alpha a-1)\Big)\Bigg\} =$$

$$=\frac{g'}{\alpha a}F(g')\Bigg\{b+1-2\alpha a+\alpha a-b-1+\alpha a-\alpha a\frac{g'-1}{g'}\Bigg)\ln(\alpha a-1)+$$

$$+\left(-\frac{b+1}{2}+\alpha a+b+1-\alpha a\right)\ln\Big(\alpha a(g'-1)+1\Big)+$$

$$+\left(-\alpha a-b-1+\alpha a+\alpha a\frac{g'-1}{g'}\right)\ln g'+\left(b+1-\alpha a+\alpha a-\frac{\alpha a}{g'}\right)\ln(\alpha a-g')\Bigg\},$$

$$J_5+J_6=\frac{g'}{\alpha a}F(g')\Bigg\{-\alpha a\frac{g'-1}{g'}\ln(\alpha a-1)+\frac{b+1}{2}\ln\Big(\alpha a(g'-1)+1\Big)+$$

$$+\left(\alpha a\frac{g'-1}{g'}-b-1\right)\ln g'+\left(b+1-\frac{\alpha a}{g'}\right)\ln(\alpha a-g')\Bigg\}. \qquad (7)$$

Таким образом, для всей суммы интегралов из равенства (1) получим, учитывая равенства (4) и (7):

$$B(\alpha,a,b,c,g')=\frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b)\int\limits_{g'}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+$$

$$+\int\limits_{\alpha a-c}^{g'}F(z)\frac{z-(\alpha a-c)}{\alpha a-z}dz+\int\limits_{\frac{{g'}^2\alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a}\left(\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\right)\frac{dv}{v}+$$

$$+\frac{g'}{\alpha a}F(g')\Bigg\{-\alpha a\frac{g'-1}{g'}\ln(\alpha a-1)+\frac{b+1}{2}\ln\Big(\alpha a(g'-1)+1\Big)+$$

$$+\left(\alpha a\frac{g'-1}{g'}-b-1\right)\ln g'+\left(b+1-\frac{\alpha a}{g'}\right)\ln(\alpha a-g')\bigg\}\bigg\}. \tag{8}$$

Определив теперь величину D_1 равенством (3), получим для $B(\alpha,a,b,c,g')$ из (8) равенство (2).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $B(\alpha,a,b,c,g')$ определено равенством (1), $g'=3$. Тогда*

$$B(\alpha,a,b,c,3)=\frac{1}{2c-b-1}\bigg\{(c-b)\int\limits_{3}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+$$

$$+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{2\alpha a+1}{3}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+\int\limits_{\frac{9\alpha a}{2\alpha a+1}}^{\alpha a}\Bigg(\int\limits_{3}^{\frac{2\alpha a+1}{3\alpha a}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\Bigg)\frac{dv}{v}+D_2\bigg\}, \tag{9}$$

где

$$D_2:=\frac{2e^{\gamma}}{\alpha a}\bigg\{c\ln c+(\alpha a-c)\ln(\alpha a-c)-\frac{2\alpha a}{3}\ln(\alpha a-1)+$$

$$+\frac{b+1}{2}\ln(2\alpha a+1)+\left(b+1-c-\frac{\alpha a}{3}\right)\ln(\alpha a-3)+\left(c-b-1-\frac{\alpha a}{3}\right)\ln 3\bigg\}. \tag{10}$$

Доказательство. Так как для $B(\alpha,a,b,c,g')$ выполнено равенство (2) леммы 1, то при значении параметра $g'=3$ получим:

$$B(\alpha,a,b,c,3):=\frac{1}{2c-b-1}\bigg\{(c-b)\int\limits_{3}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{2\alpha a+1}{3}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+$$

$$+\int\limits_{\alpha a-c}^{3}F(z)\frac{z-(\alpha a-c)}{\alpha a-z}dz+\int\limits_{\frac{9\alpha a}{2\alpha a+1}}^{\alpha a}\Bigg(\int\limits_{3}^{\frac{2\alpha a+1}{3\alpha a}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\Bigg)\frac{dv}{v}+$$

$$+\frac{3}{\alpha a}F(3)\bigg\{-\frac{2}{3}\alpha a\ln(\alpha a-1)+\frac{b+1}{2}\ln(2\alpha a+1)+$$

$$+\left(\frac{2}{3}\alpha a-b-1\right)\ln 3+\left(b+1-\frac{\alpha a}{3}\right)\ln(\alpha a-3)\bigg\}\bigg\}.$$

Так как $F(u) = 2e^\gamma/u$ при $u \leqslant 3$, то $F(3) = 2e^\gamma/3$, поэтому можно преобразовать третий интеграл, содержащийся в полученном равенстве для $B(\alpha, a, b, c, g')$.

$$J_3 := \int\limits_{\alpha a - c}^{3} F(z)\frac{z-(\alpha a - c)}{\alpha a - z}dz = \int\limits_{\alpha a - c}^{3} \frac{2e^\gamma}{z}\,\frac{z-(\alpha a - c)}{\alpha a - z}dz =$$

$$= 2e^\gamma \int\limits_{\alpha a - c}^{3} \left(\frac{-1+c/\alpha a}{z} + \frac{c/\alpha a}{\alpha a - z}\right)dz =$$

$$= 2e^\gamma \frac{c}{\alpha a}\left\{\left(1-\frac{\alpha a}{c}\right)\ln z - \ln(\alpha a - z)\right\}\Bigg|_{\alpha a - c}^{3} =$$

$$= 2e^\gamma \frac{c}{\alpha a}\left\{\left(1-\frac{\alpha a}{c}\right)\ln\frac{3}{\alpha a - c} - \ln\frac{\alpha a - 3}{\alpha a - \alpha a + c}\right\},$$

$$J_3 = 2e^\gamma\left\{\left(\frac{c}{\alpha a} - 1\right)\ln\frac{3}{\alpha a - c} - \frac{c}{\alpha a}\ln\frac{\alpha a - 3}{c}\right\}. \tag{11}$$

Следовательно, учитывая равенство (11), получим для $B(\alpha, a, b, c, 3)$:

$$B(\alpha, a, b, c, 3) = \frac{1}{2c-b-1}\left\{(c-b)\int\limits_{3}^{\alpha a - 1}\frac{F(z)dz}{\alpha a - z} + \right.$$

$$\left. + \frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{2\alpha a+1}{3}}^{\alpha a - 1}\frac{F(z)dz}{\alpha a - z} + \int\limits_{\frac{9\alpha a}{2\alpha a+1}}^{\alpha a}\left(\int\limits_{3}^{\frac{2\alpha a+1}{3\alpha a}v} F(z)\frac{dz}{v-z}\right)\frac{dv}{v} + Y\right\}, \tag{12}$$

где

$$Y := \frac{3}{\alpha a}\frac{2e^\gamma}{3}\left\{-\frac{2}{3}\alpha a\ln(\alpha a - 1) + \frac{b+1}{2}\ln(2\alpha a + 1) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2}{3}\alpha a - b - 1\right)\ln 3 + \left(b + 1 - \frac{\alpha a}{3}\right)\ln(\alpha a - 3)\right\} +$$

$$+ 2e^\gamma\left\{\left(\frac{c}{\alpha a} - 1\right)\ln\frac{3}{\alpha a - c} - \frac{c}{\alpha a}\ln\frac{\alpha a - 3}{c}\right\}.$$

Преобразуем теперь сумму Y.

$$Y = \frac{2e^\gamma}{\alpha a}\left\{-\frac{2}{3}\alpha a\ln(\alpha a - 1) + \frac{b+1}{2}\ln(2\alpha a + 1) + \right.$$

$$+\left(\frac{2}{3}\alpha a-b-1\right)\ln 3+\left(b+1-\frac{\alpha a}{3}\right)\ln(\alpha a-3)+$$

$$+(c-\alpha a)\ln 3-(c-\alpha a)\ln(\alpha a-c)-c\ln(\alpha a-3)+c\ln c\Bigg\},$$

$$Y=\frac{2e^{\gamma}}{\alpha a}\Bigg\{c\ln c+(\alpha a-c)\ln(\alpha a-c)-\frac{2\alpha a}{3}\ln(\alpha a-1)+$$

$$+\frac{b+1}{2}\ln(2\alpha a+1)+\left(b+1-\frac{\alpha a}{3}-c\right)\ln(\alpha a-3)+\left(c-\frac{\alpha a}{3}-b-1\right)\ln 3\Bigg\}.$$

Тогда для $B(\alpha,a,b,c,3)$ из равенства (12) получим окончательно следующее равенство:

$$B(\alpha,a,b,c,3)=\frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b)\int\limits_{3}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+$$

$$+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{2\alpha a+1}{3}}^{\alpha a-1}\frac{F(z)dz}{\alpha a-z}+\int\limits_{\frac{9\alpha a}{2\alpha a+1}}^{\alpha a}\left(\int\limits_{3}^{\frac{2\alpha a+1}{3\alpha a}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\right)\frac{dv}{v}+$$

$$+\frac{2e^{\gamma}}{\alpha a}\Bigg\{c\ln c+(\alpha a-c)\ln(\alpha a-c)-\frac{2\alpha a}{3}\ln(\alpha a-1)+\frac{b+1}{2}\ln(2\alpha a+1)+$$

$$+\left(b+1-c-\frac{\alpha a}{3}\right)\ln(\alpha a-3)+\left(c-b-1-\frac{\alpha a}{3}\right)\ln 3\Bigg\}\Bigg\}. \qquad (13)$$

Определив теперь величину D_2 равенством (10), получим для $B(\alpha,a,b,c,g')$ из (13) равенство (9).

Лемма 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть $B(\alpha,a,b,c,g')$ определено равенством (1), $g'=3,\ \alpha a=6$. Тогда*

$$B(\alpha,a,b,c,3)=\frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b)\int\limits_{3}^{5}\frac{F(z)dz}{6-z}+$$

$$+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{13}{3}}^{5}\frac{F(z)dz}{6-z}+\int\limits_{\frac{54}{13}}^{6}\left(\int\limits_{3}^{\frac{13}{18}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\right)\frac{dv}{v}+D_2'\Bigg\}, \qquad (14)$$

где D_2' определено равенством:

$$D_2':=\frac{e^{\gamma}}{3}\Bigg\{c\ln c+(6-c)\ln(6-c)-4\ln 5+\frac{b+1}{2}\ln 13-4\ln 3\Bigg\}. \qquad (15)$$

Доказательство. Применяя лемму 2, из равенства (9) для $B(\alpha, a, b, c, 3)$ при $\alpha a = 6$ получим:

$$B(\alpha, a, b, c, 3) := \frac{1}{2c-b-1}\left\{(c-b)\int\limits_3^5 \frac{F(z)dz}{6-z}+\right.$$

$$\left.+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{13}{3}}^5 \frac{F(z)dz}{6-z}+\int\limits_{\frac{54}{13}}^6 \left(\int\limits_3^{\frac{13}{18}v} F(z)\frac{dz}{v-z}\right)\frac{dv}{v}+Y_1\right\}, \qquad (16)$$

где

$$Y_1 := \frac{e^\gamma}{3}\left\{c\ln c+(6-c)\ln(6-c)-4\ln 5+\frac{b+1}{2}\ln 13+\right.$$

$$\left.+(b+1-c-2)\ln 3+(c-b-1-2)\ln 3\right\}.$$

Преобразуем теперь сумму Y_1.

$$Y_1 = \frac{e^\gamma}{3}\left\{c\ln c+(6-c)\ln(6-c)-4\ln 5+\frac{b+1}{2}\ln 13-4\ln 3\right\} = D_2',$$

где D_2' определено равенством (15).

Тогда для $B(\alpha, a, b, c, 3)$ из равенства (16) получим окончательно следующее равенство:

$$B(\alpha, a, b, c, 3) = \frac{1}{2c-b-1}\times$$

$$\times\left\{(c-b)\int\limits_3^5 \frac{F(z)dz}{6-z}+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{13}{3}}^5 \frac{F(z)dz}{6-z}+\int\limits_{\frac{54}{13}}^6 \left(\int\limits_3^{\frac{13}{18}v} F(z)\frac{dz}{v-z}\right)\frac{dv}{v}+D_2'\right\}.$$

Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Пусть $B(\alpha, a, b, c, g')$ определено равенством (1), $g' = 3$, $\alpha a = 4$. Тогда*

$$B(\alpha, a, b, c, 3) = \frac{1}{2c-b-1}\cdot\frac{e^\gamma}{2}\left\{c\ln c-(4-c)\ln\frac{3}{4-c}\right\}.$$

Доказательство. Применяя лемму 2, из равенства (9) для $B(\alpha, a, b, c, 3)$ при $\alpha a = 4$ получим:

$$B(\alpha, a, b, c, 3) = \frac{1}{2c-b-1}\left\{(c-b)\int\limits_3^3 \frac{F(z)dz}{4-z}+\right.$$

$$+\frac{b-1}{2}\int\limits_{3}^{3}\frac{F(z)dz}{4-z}+\int\limits_{4}^{4}\left(\int\limits_{3}^{\frac{3}{4}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\right)\frac{dv}{v}+D_2\Big\},$$

где

$$D_2=\frac{2e^{\gamma}}{4}\Big(c\ln c+(4-c)\ln(4-c)-\frac{8}{3}\ln 3+$$

$$+\frac{b+1}{2}\ln 9+\left(b+1-c-\frac{4}{3}\right)\ln 1+\left(c-b-1-\frac{4}{3}\right)\ln 3\Big\}=$$

$$=\frac{e^{\gamma}}{2}\left\{c\ln c-(4-c)\ln\frac{3}{4-c}\right\}.$$

Тогда для $B(\alpha,a,b,c,3)$ получим окончательно следующее равенство:

$$B(\alpha,a,b,c,3)=\frac{1}{2c-b-1}\cdot\frac{e^{\gamma}}{2}\left\{c\ln c-(4-c)\ln\frac{3}{4-c}\right\}.$$

Следствие 2 доказано.

Следствие 3. *При* $g'=3,\ \alpha a=4,\ b=1$ *для* $B(\alpha,a,b,c,g')$ *имеет место равенство:*

$$B(\alpha,a,1,c,3)=\frac{e^{\gamma}}{4(c-1)}\left\{c\ln c-(4-c)\ln\frac{3}{4-c}\right\},$$

где γ *– постоянная Эйлера.*

Доказательство. Применим следствие 2 при $b=1$, тогда, учитывая, что $2c-b-1=2c-2$, получим для $B(\alpha,a,1,c,g')$:

$$B(\alpha,a,1,c,g')=\frac{1}{2(c-1)}\,\frac{e^{\gamma}}{2}\left\{c\ln c-(4-c)\ln\frac{3}{4-c}\right\}.$$

Следствие 3 доказано.

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть* $B(\alpha,a,b,c,g')$ *определено равенством (1),* $g'=3,\ \alpha a=6.$ *Тогда имеет место следующее неравенство:*

$$B(\alpha,a,b,c,3)\leqslant\frac{1}{2c-b-1}\frac{e^{\gamma}}{3}\Big\{c\ln c+(6-c)\ln(6-c)+$$

$$+1,9107007\,c-0,1959345\,b-9,7508227\Big\}.$$

Доказательство. Применим равенство (14) из следствия 1 леммы 2:

$$B(\alpha,a,b,c,3)=\frac{1}{2c-b-1}\Bigg\{(c-b)\int\limits_{3}^{5}\frac{F(z)dz}{6-z}+$$

$$+\frac{b-1}{2}\int\limits_{\frac{13}{3}}^{5}\frac{F(z)dz}{6-z}+\int\limits_{\frac{54}{13}}^{6}\Bigg(\int\limits_{3}^{\frac{13}{18}v}F(z)\frac{dz}{v-z}\Bigg)\frac{dv}{v}+D_2'\Bigg\},$$

где D_2' определено равенством:

$$D_2':=\frac{e^{\gamma}}{3}\Bigg\{c\ln c+(6-c)\ln(6-c)-4\ln 5+\frac{b+1}{2}\ln 13-4\ln 3\Bigg\}.$$

Оценим сверху интегралы, входящие в равенство для $B(\alpha,a,b,c,g')$.

$$1)\quad J_1:=\int\limits_{3}^{5}\frac{F(z)dz}{6-z}.\quad \int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{6-z}=-\ln(6-z)|_{z_1}^{z_2}=\ln\frac{6-z_1}{6-z_2}>0,\quad (z_2>z_1).$$

$$2)\quad J_2:=\int\limits_{\frac{13}{3}}^{5}\frac{F(z)dz}{6-z}=\int\limits_{\frac{13}{3}}^{4{,}4}\frac{F(z)dz}{6-z}+\int\limits_{4{,}4}^{5}\frac{F(z)dz}{6-z}=J_2'+J_2'',$$

где

$$J_2':=\int\limits_{\frac{13}{3}}^{4{,}4}\frac{F(z)dz}{6-z},\qquad J_2'':=\int\limits_{4{,}4}^{5}\frac{F(z)dz}{6-z}.$$

$$J_2':=\int\limits_{\frac{13}{3}}^{4{,}4}\frac{F(z)dz}{6-z}\leqslant F\Bigg(\frac{13}{3}\Bigg)\ln\frac{6-13/3}{6-4{,}4}\leqslant F(4,3)\ln\frac{5}{3\cdot 1,6}=F(4,3)\ln\frac{25}{24};$$

$$F(4,3)=1,0112406,\ \ln\frac{25}{24}=0,0408219,\quad J_2'\leqslant 0,041280762\leqslant 0,04128077,$$

$$J_2'\leqslant 0,4128077;$$

Промежуточные вычисления для J_1 и J_2'' удобнее расположить в следующем порядке.

z	$6-z$	$x:=\dfrac{6-z_1}{6-z_2}$	$\ln x$	$F(z)$	$F(z)\cdot\ln x$	$\dfrac{F(z)}{6-z}$
$3,0$	$3,0$	$1,0344827$	$0,0339015$	$1,1873800$	$0,040253963$	$0,39579333$
$3,1$	$2,9$	$1,0357142$	$0,0350913$	$1,1568354$	$0,040594858$	$0,39890875$

3,2	2,8	1,0370370	0,0363676	1,1272215	0,040994340	0,40257910
3,3	2,7	1,0384615	0,0377403	1,1031884	0,041634661	0,40858829
3,4	2,6	1,0400000	0,0392207	1,0836361	0,042500966	0,41678311
3,5	2,5	1,0416666	0,0408219	1,0677025	0,043585644	0,42708100
3,6	2,4	1,0434782	0,0425596	1,0547055	0,044887844	0,43946062
3,7	2,3	1,0454545	0,0444517	1,0441013	0,046412077	0,45395708
3,8	2,2	1,0476190	0,0465200	1,0354531	0,048169278	0,47066050
3,9	2,1	1,0500000	0,0487902	1,0284074	0,050176202	0,48971780
4,0	2,0	1,0526315	0,0512933	1,0226777	0,052456514	0,51133885
4,1	1,9	1,0555555	0,0540673	1,0180290	0,055042079	0,53580473
4,2	1,8	1,0588235	0,0571585	1,0142695	0,057974123	0,56348305
4,3	1,7	1,0625000	0,0606247	1,0112406	0,061306158	0,59484741
4,4	1,6	1,0666666	0,0645385	1,0088113	0,065107168	0,63050706
4,5	1,5	1,0714285	0,0689928	1,0068735	0,069467022	0,67124900
4,6	1,4	1,0769230	0,0741079	1,0053367	0,074503391	0,71809764
4,7	1,3	1,0833333	0,0800427	1,0041261	0,080372964	0,77240469
4,8	1,2	1,0909090	0,0870114	1,0031789	0,087288000	0,83598241
4,9	1,1	1,1000000	0,0953102	1,0024428	0,095543023	0,91131163
5,0	1,0	–	–	1,0018742	–	1,00187420

Суммируя все числа шестого столбца, получим значение интеграла от 3 до 5, то есть J_1 : $J_1 \leqslant 1,1382701$. А для J_2'' находим значение интеграла от 4,4 до 5, то есть находим часть суммы чисел из шестого столбца: $J_2'' \leqslant 0,47228156$. Следовательно,

$$J_2 = J_2' + J_2'' \leqslant 0,04128077 + 0,47228156 \leqslant 0,51356233 \leqslant 0,5135624;$$

$$J_2 \leqslant 0,5135624.$$

Уточним полученные значения, применяя для вычисления интегралов формулу Симпсона:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\Big\{y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}) + 4(y_{1/2} + y_{3/2} + ... + y_{n-1/2})\Big\},$$

где n – четное число,

$$x_{i+1/2} := \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad y_{i+1/2} := f(x_{i+1/2}).$$

$$1) \quad J_1 = \int\limits_3^5 \frac{F(z)\,dz}{6-z}, \quad n = 10, \quad b - a = 2, \quad y_0 + y_{10} = y(3) + y(5) = 1,3976675,$$

(числа берем теперь из седьмого столбца таблицы).

$S_1 := y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} = y(3,2) + y(3,4) + ... + y(4,8) = 4,9888921,$

$2S_1 = 9,9777842,$
$y_{1/2} = y((x_0 + x_1)/2) = y(3,1),$
$y_{3/2} = y_{1+1/2} = y(x_{1+1/2}) = y((x_1 + x_2)/2) = y(3,3),$
$\dots,$
$y_{n-1/2} = y_{(n-1)+1/2} = y(x_{(n-1)+1/2}) = y((x_{n-1} + x_n)/2) = y(4,9),$
$S_2 := y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{n-1/2} = y(3,1) + y(3,3) + \dots + y(4,9) = 5,6638701,$
$4S_2 = 22,6554804,$

$$J_1 = \frac{1}{30}\Big(y_0 + y_n + 2S_1 + 4S_2\Big), \quad J_1 = \frac{1}{30}\,34,0309321 \leqslant 1,1343644,$$

$$J_1 \leqslant 1,1343644.$$

$$2) \quad J_2 := \int\limits_{13/3}^{5} \frac{F(z)\,dz}{6-z} = \int\limits_{13/3}^{4,4} \frac{F(z)\,dz}{6-z} + \int\limits_{4,4}^{5} \frac{F(z)\,dz}{6-z} = J_2' + J_2''.$$

Вычислим J_2'' по формуле Симпсона: $n = 3$, $b - a = 0,6$,

$$J_2'' = \frac{0,6}{6\cdot 3}\Big\{0,63050706 + 1,0018742 + 2\Big(0,71809764 + 0,8359824\Big) +$$
$$+4\Big(0,671249 + 0,77240469 + 0,91131163\Big)\Big\} =$$
$$= \frac{1}{30}\Big(1,63238126 + 2\cdot 1,55408005 + 4\cdot 2,3549652\Big) =$$
$$= \frac{1}{30}\Big(1,63238126 + 3,10816010 + 9,4198608\Big) =$$
$$= \frac{1}{30}\,14,16040316 = 0,472013438, \quad J_2'' \leqslant 0,47201344.$$

Кроме того, ранее было получено значение J_2' : $J_2' \leqslant 0,04128077$,
следовательно, $J_2 \leqslant 0,51329421 \leqslant 0,5132943$.
Таким образом, вначале было получено: $J_1 \leqslant 1,1382701$,
$J_2 \leqslant 0,5135624$, а, применяя формулу Симпсона, получили:
$J_1 \leqslant 1,1343644$, $J_2 \leqslant 0,5132943$.

$$3) \quad J_3 := \int\limits_{\frac{54}{13}}^{6} \Bigg(\int\limits_{3}^{\frac{13}{18}v} F(z)\frac{dz}{v-z}\Bigg)\frac{dv}{v} \leqslant F(3)\int\limits_{\frac{54}{13}}^{6}\Big(-\ln(v-z)\big|_3^{13v/18}\Big)\frac{dv}{v} =$$

$$= F(3)\int\limits_{\frac{54}{13}}^{6}\Big(\ln\frac{v-3}{5v/18}\Big)\frac{dv}{v} = F(3)\Bigg(\int\limits_{\frac{54}{13}}^{4,2}\Big(\ln\frac{v-3}{5v/18}\Big)\frac{dv}{v} + \int\limits_{4,2}^{6}\Big(\ln\frac{v-3}{5v/18}\Big)\frac{dv}{v}\Bigg) =$$

$$= F(3)(J_3' + J_3''),$$

где

$$J_3' := \int\limits_{\frac{54}{13}}^{4,2} \left(\ln \frac{v-3}{5v/18}\right) \frac{dv}{v}, \quad J_3'' := \int\limits_{4,2}^{6} \left(\ln \frac{v-3}{5v/18}\right) \frac{dv}{v}.$$

$$\ln \frac{v-3}{5v/18} = \ln \frac{(v-3)18}{5v} = \ln \left(\frac{18}{5}\left(1 - \frac{3}{v}\right)\right),$$

причем, последний логарифм возрастает. Поэтому получим, что

$$J_3' := \int\limits_{\frac{54}{13}}^{4,2} \ln \frac{(v-3)18}{5v} \frac{dv}{v} \leqslant \ln \frac{(4,2-3)18}{5 \cdot 4,2} \ln \frac{4,2}{54/13} =$$

$$= \ln \frac{1,2 \cdot 18}{5 \cdot 4,2} \ln \frac{4,2 \cdot 13}{54} = \ln \frac{36}{35} \ln \frac{91}{90} = 0,0281709 \cdot 0,0110498 =$$

$$= 0,0003112828 \leqslant 0,00031129, \quad J_3' \leqslant 0,00031129.$$

При вычислении значения интеграла J_3'' получим следующие промежуточные значения:

v	$y := \ln \frac{v_2}{v_1}$	$x := \frac{(v_2-3)18}{5v_2}$	$\ln x$	$y \cdot \ln x$	$\left(\ln \frac{(v-3)18}{5v}\right) \frac{1}{v}$
4,1	0,0240975	1,0285714	0,028171	0,0006788483	–
4,2	0,0235305	1,0883720	0,084683	0,0019926356	0,006707357
4,3	0,0229895	1,1454545	0,135802	0,0031220200	0,019693744
4,4	0,0224729	1,2000000	0,182322	0,0040973040	0,030864090
4,5	0,0219789	1,2521739	0,224881	0,0049426370	0,040516000
4,6	0,0215063	1,3021276	0,264000	0,0056776632	0,048887173
4,7	0,0210534	1,3500000	0,300105	0,0063182306	0,056170212
4,8	0,0206193	1,3959183	0,333553	0,0068776293	0,062521875
4,9	0,0202027	1,4400000	0,364643	0,0073667731	0,068072040
5,0	0,0198027	1,4823529	0,393631	0,0077949566	0,072928600
5,1	0,0194181	1,5230769	0,420733	0,0081698354	0,077182549
5,2	0,0190482	1,5622641	0,446136	0,0084980877	0,080910192
5,3	0,0186922	1,6000000	0,470004	0,0087854087	0,084176603
5,4	0,0183492	1,6363636	0,492477	0,0090365589	0,087037777
5,5	0,0180186	1,6714285	0,513679	0,0092557764	0,089541272
5,6	0,0176996	1,7052631	0,533719	0,0094466128	0,091728392
5,7	0,0173918	1,7379310	0,552695	0,0096123609	0,093634912
5,8	0,0170944	1,7694915	0,570692	0,0097556373	0,095292241

$5,9$	$0,0168071$	$1,8000000$	$0,587787$	$0,0098789948$	$0,096727457$
$6,0$	–	–	–	–	$0,097964500$

Сумма чисел из пятого столбца дает значение интеграла J_3'' :

$$J_3'' \leqslant 0,13130795,$$

$$J_3 = F(3)(J_3' + J_3'') \leqslant F(3) \cdot 0,13161924 \leqslant 1,18738 \cdot 0,13161924 \leqslant$$
$$\leqslant 0,15628205, \quad J_3 \leqslant 0,15628205.$$

Уточним значение интеграла по формуле Симпсона: $n = 9$, $b - a = 1,8$, $y(4,2) + y(6) = 0,10467185$, $S_1 = 0,57017032$, $2S_1 = 1,14034064$, $S_2 = 0,62571476$, $4S_2 = 2,50285904$, (числа берем теперь из шестого столбца таблицы).

$$J_3'' \leqslant \left(0,10467185 + 1,1403406 + 2,5028102\right)\frac{1,8}{6 \cdot 9} =$$

$$= 3,74787153 \cdot \frac{1}{30} = 0,12492905, \quad J_3'' \leqslant 0,12492905,$$

$$J_3 = F(3)(J_3' + J_3'') \leqslant 1,18738 \cdot 0,12524034 \leqslant 0,14870787 \leqslant 0,1487079.$$

Но третий интеграл можно оценить сверху по-другому:

$$J_3 := \int\limits_{\frac{54}{13}}^{6} \left(\int\limits_{3}^{\frac{13v}{18}} \frac{F(z)\,dz}{v - z} \right) \frac{dv}{v} \leqslant \int\limits_{\frac{54}{13}}^{6} \left(C(v) \ln \frac{v - 3}{5v/18} \right) \frac{dv}{v},$$

где $C(v)$ – постоянная, зависящая только от v.

При вычислении значения интеграла J_3 получим теперь следующие промежуточные значения:

z	$v = \dfrac{18z}{13}$	$C(v) = F(z)$	$y = \ln \dfrac{v_2}{v_1}$	$x = \dfrac{(v_2 - 3)18}{5v_2}$	$\ln x$	$\ln x \cdot y \cdot C(v)$
$3,0$	$4,1538461$	$1,1873800$	$0,0327898$	$1,0838708$	$0,080539$	$0,0031357015$
$3,1$	$4,2923076$	$1,1568354$	$0,0317487$	$1,1624999$	$0,150573$	$0,0055302481$
$3,2$	$4,4307692$	$1,1272215$	$0,0307717$	$1,2363635$	$0,212174$	$0,0073595779$
$3,3$	$4,5692307$	$1,1031884$	$0,0298530$	$1,3058823$	$0,266879$	$0,0087892549$
$3,4$	$4,7076923$	$1,0836361$	$0,0289875$	$1,3714285$	$0,315853$	$0,0099215432$
$3,5$	$4,8461538$	$1,0677025$	$0,0281709$	$1,4333332$	$0,360003$	$0,0108282200$
$3,6$	$4,9846153$	$1,0547055$	$0,0273990$	$1,4918918$	$0,400045$	$0,0115604490$
$3,7$	$5,1230769$	$1,0441013$	$0,0266682$	$1,5473683$	$0,436556$	$0,0121555960$
$3,8$	$5,2615384$	$1,0354531$	$0,0259754$	$1,6000000$	$0,470004$	$0,0126413710$
$3,9$	$5,4000000$	$1,0284074$	$0,0253178$	$1,6499999$	$0,500775$	$0,0130386840$
$4,0$	$5,5384615$	$1,0226777$	$0,0246926$	$1,6975609$	$0,529193$	$0,0133634830$

4,1	5,6769230	1,0180290	0,0240975	1,7428570	0,555526	0,0136281370
4,2	5,8153846	1,0142695	0,0235305	1,7860463	0,580005	0,0138424720
4,3	5,9538461	1,0112406	0,0077220	1,8000000	0,587787	0,0045899110
13/3	6,0000000	–	–	–	–	–

Сумма чисел из седьмого столбца таблицы дает значение интеграла J_3 :

$$J_3 \leqslant 0,14038471.$$

Уточним J_3, по-другому: $J_3 = \sum\left(F(z_i)\sum y\ln x\right)$

z	$F(z)$	$\sum y\ln$ или $y\ln$	$F\cdot\sum$ или $F\cdot y\ln$
3,0	1,1873800	0,0019263560	0,0023779854
3,1	1,1568354	0,0031220200	0,0036116632
3,2	1,1272015	0,0040973040	0,0046184872
3,3	1,1031884	0,0106203002	0,0117161910
3,4	1,0836361	0,0063182306	0,0068466627
3,5	1,0677025	0,0068776293	0,0073432619
3,6	1,0547055	0,0151617290	0,0159911580
3,7	1,0441013	0,0081698354	0,0085301357
3,8	1,0354531	0,0172834960	0,0178962490
3,9	1,0284074	0,0090365589	0,0092932640
4,0	1,0226777	0,0092557764	0,0094656761
4,1	1,0180290	0,0190589730	0,0194025870
4,2	1,0142695	0,0097556373	0,0098948453
4,3	1,0112406	0,0098789948	0,0099900406

Сумма чисел из четвертого столбца таблицы дает значение:
$K'' \leqslant 0,13688752$. Кроме того, ранее получено $J_3' \leqslant 0,0001129$,
поэтому $K' := F(3)\cdot J_3' \leqslant 0,00036972$, следовательно,

$$J_3 = K' + K'' \leqslant 0,13725724 \leqslant 0,1372573.$$

Итак, для третьего интеграла получили следующие значения:

$$J_3 \leqslant 0,15628205, \quad J_3 \leqslant 0,1487079, \quad J_3 \leqslant 0,14038471, \quad J_3 \leqslant 0,1373497.$$

Таким образом, будем использовать следующие оценки интегралов:

$$J_1 \leqslant 1,1343644, \quad J_2 \leqslant 0,5132943, \quad J_3 \leqslant 0,1373497.$$

Оценим теперь величину D_2', учитывая, что $\gamma = 0,577215...$

$\ln 13$	$0,5\ln 13$	$\ln 5$	$4\ln 5$	$\ln 3$	$4\ln 3$
2,56495	1,282475	1,60944	6,43776	1,09861	4,39444

$$D_2' := \frac{e^\gamma}{3}\left\{c\ln c + (6-c)\ln(6-c) - 4\ln 5 + \frac{b+1}{2}\ln 13 - 4\ln 3\right\} =$$

$$= \frac{e^\gamma}{3}\left\{c\ln c + (6-c)\ln(6-c) - 6,43776 + (b+1)1,282475 - 4,39444\right\} =$$

$$= \frac{e^\gamma}{3}\left\{c\ln c + (6-c)\ln(6-c) + 1,282475\,b - 9,549725\right\}.$$

$$D_2' = \frac{e^\gamma}{3}\left\{c\ln c + (6-c)\ln(6-c) + 1,282475\,b - 9,549725\right\}.$$

Заменим теперь интегралы в равенстве для $B(\alpha, a, b, c, 3)$, тогда получим следующее неравенство:

$$B(\alpha, a, b, c, 3) \leqslant \frac{1}{2c-b-1}\left\{(c-b)1,1343644 + \frac{b-1}{2}0,5132943 + 0,1372573+\right.$$

$$\left.+\frac{e^\gamma}{3}\left\{c\ln c + (6-c)\ln(6-c) + 1,282475\,b - 9,549725\right\}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2c-b-1}\,\frac{e^\gamma}{3}\left\{3e^{-\gamma}\left\{(c-b)1,1343644 + (b-1)0,25664715 + 0,1372573\right\}+\right.$$

$$\left.+c\ln c + (6-c)\ln(6-c) + 1,282475\,b - 9,549725\right\};$$

$$\gamma = 0,577215\ldots, \quad e^{-\gamma} = 0,56146, \quad 3e^{-\gamma} = 1,68438;$$

$$B(\alpha, a, b, c, 3) \leqslant \frac{1}{2c-b-1}\,\frac{e^\gamma}{3}\left\{(c-b)1,9107007 + 0,2311935+\right.$$

$$\left.+(b-1)0,43229124 + c\ln c + (6-c)\ln(6-c) + 1,282475\,b - 9,549725\right\} =$$

$$= \frac{1}{2c-b-1}\,\frac{e^\gamma}{3}\left\{c\ln c + (6-c)\ln(6-c) + 1,9107007\,c - 0,1959345\,b - 9,7508227\right\}.$$

Таким образом, получим следующее неравенство:

$$B(\alpha, a, b, c, 3) \leqslant \frac{1}{2c-b-1}\,\frac{e^\gamma}{3}\left\{c\ln c + (6-c)\ln(6-c)+\right.$$

$$\left.+1,9107007\,c - 0,1959345\,b - 9,7508227\right\}.$$

Теорема 1 доказана.

4. Заключение

Весовая функция с весами Рихерта является частным случаем весовой функции с весами Бухштаба и получается из нее при $g' = \alpha a - 1$. При этом величина $B(\alpha, a, b, c, g')$ будет иметь следующий вид:

$$B(\alpha, a, b, c, g') = \int\limits_{\alpha a - c}^{\alpha a - 1} \frac{z - (\alpha a - c)}{\alpha a - z} dz.$$

При $\alpha a = 4$, $b = 1$ получим $g' = 3$ и величина $B(\alpha, a, 1, c, 3)$ получена в следствии 3 леммы 2. А так как веса Рихерта имеют ограничение $\alpha a \leqslant 4$, то преимущества весов Бухштаба большие. Таким образом, доказанная теорема 1, связанная с весовой функцией с весами Бухштаба, позволяет получить преимущества в выборе параметров весового решета.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб А. А. Новый тип весового решета // Теория чисел и её приложения: тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 22—24.

2. Вахитова Е. В. О приложении функций Бухштаба // Математические заметки. 1995. Т. 57, № 1. С. 121—125.
= Vakhitova E. V. Application of Bukhstab functions // Mathematical Notes. 1995. Vol. 57, № 1—2. P. 85—87.

3. Вахитова Е. В. Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа // Математические заметки. 1999. Т. 66, № 1. С. 38—49.
= Vakhitova E. V. Selberg's one-dimensional sieve with Bukhstab weights of new type // Mathematical Notes. 1999. Vol. 66, № 1. P. 30—39.

4. Вахитова Е. В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения. М.: Изд-во МПГУ «Прометей», 2002. 268 с.

5. Greaves G. Sieves in Number Theory // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics. Vol. 43. Berlin: Springer-Verlag, 2001. 304 p.

6. Heath-Brown D. R. Lectures on Sieves // Proceedings of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations Held in Bonn. (Germany, Januare—June, 2002.) Bonner Mathematische Schriften. V. 360. Bonn: Univ. Bonn, Mathematisches Institut, 2003. 50 p.

Воронежский государственный университет
e-mail: algebraist@yandex.ru
Поступило 23.05.2013