

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 14 Выпуск 2 (2013)

УДК 511.32

СФЕРИЧЕСКИЕ СУММЫ В ПРОБЛЕМЕ ШАРА

Л. Г. Архипова (г. Москва)

Аннотация

Находится аналитическое представление для выражения остатка асимптотической формулы для числа целых точек в шаре через сферическую тригонометрическую сумму, то есть тройную сумму по целым точкам, лежащим на сфере переменного радиуса. Вывод основан на троекратном применении одномерной формулы суммирования Пуассона с остаточным членом. Оценка остатка проводится в явном виде.

Ключевые слова: проблема шара, сферические суммы тригонометрические суммы.

SPHERICAL SUMS IN THE SPHERE PROBLEM

L. G. Arkhipova (Moscow)

Abstract

Here is given an analytical expression for the error term of the asymptotic formula for the number of lattice points in the sphere using a spherical trigonometric sum, that is triple sum over lattice points lying on the sphere of variable radius. Conclusion based on a threefold application of the one-dimensional Poisson summation formula with the error term. The estimation of the error term is held in an explicit form.

Keywords: Sphere problem, spherical sums, exponential sums

1. Введение

Проблемой шара называют задачу об оценке остатка в асимптотической формуле для числа целых точек трехмерной решетки внутри сферы радиуса a с центром в начале координат.

В начале прошлого века академик И. М. Виноградов представил этот остаток в виде кратной тригонометрической суммы. Он также дал оценку этой суммы и по существу получил с ее помощью первый нетривиальный результат в проблеме шара. В течение почти пятидесяти лет он последовательно его улучшал. Самая сильная оценка остатка была получена И. М. Виноградовым в 1963

году. Этот результат оставался наилучшим на протяжении более тридцати лет. Лишь в 1995 году в работе [1] и в 1997 году в работе [2] были получены новые продвижения в проблеме шара.

Одним из новых элементов, использованных в схеме доказательства основных теорем этих работ, являлось введение "сферических" тригонометрических сумм, то есть таких сумм, в которых суммирование ведется по точкам решетки, лежащим на сфере переменного радиуса. При этом обоснование возможности сведения оценки остатка к таким суммам не проводилось.

Целью настоящей статьи является представление остатка асимптотической формулы в проблеме шара конечной сферической тригонометрической суммой с погрешностью, соответствующей требуемой оценке остатка асимптотики. Схема доказательства основной теоремы данной статьи состоит в кратном использовании формулы суммирования Пуассона с остаточным членом (см. [3] стр. 442).

Следуя И. М. Виноградову обозначим через $T(a)$ количество точек целочисленной решетки, лежащих в шаре радиуса a . Имеет место равенство (см. [4], стр. 29, теорема 2)

$$T(a) = \frac{4}{3}\pi a^3 + O(R), \quad R = a^{\frac{4}{3}} \ln^6 a.$$

Дальнейшие продвижения в проблеме шара направлены на уменьшение порядка параметра R , то есть получение оценок вида

$$R \ll a^{\frac{4}{3}-\delta},$$

где $\delta > 0$ некоторая постоянная.

Основной результат данной работы, представляющий выражение остатка через сферическую тригонометрическую сумму, сформулирован в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть δ – некоторая положительная постоянная с условием $\delta \leq \frac{1}{3}$, $B = 5a^{\frac{4}{3}+2\delta} \ln a$ и $B_0 = 10\sqrt{B \ln a}$. Тогда

$$T(a) = \sum_{\substack{l,m,n \\ l^2+m^2+n^2 \leq B_0}} e^{-\frac{\pi^2}{B}(l^2+m^2+n^2)} K(l, m, n) + O\left(a^{\frac{4}{3}-\delta+\epsilon}\right),$$

где при $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$ выполняется равенство

$$K(l, m, n) = a \frac{\cos\left(2\pi a \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\right)}{\pi(l^2 + m^2 + n^2)} + \frac{\sin\left(2\pi a \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\right)}{2\pi^2(l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

и $K(0, 0, 0) = \frac{4}{3}\pi a^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Обозначим через $T(a, h)$ количество целых точек с координатами x, y, z , удовлетворяющими неравенствам

$$(a - h)^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq (a + h)^2.$$

Здесь предполагается, что h принимает любое значение из промежутка $0 \leq h \leq a$.

Далее нам потребуется оценка вида

$$T(a, h) \ll a^\epsilon (ha^2 + a).$$

Это является простым следствием утверждения о том, что порядок количества решений диофантова уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = b$ не превосходит значения $b^{\frac{1}{2}+\epsilon}$, где положительное ϵ сколь угодно мало.

Рассмотрим функцию $f = f_a = f_a(x, y, z)$, определяемую как индикаторную функцию шара Q радиуса a с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^3$. Это значит, что

$$f_a(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{при } x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \\ 0, & \text{при } x^2 + y^2 + z^2 > a^2. \end{cases}$$

Далее рассмотрим функцию $\phi = \phi(x, y, z)$ вида

$$\phi = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-B(x^2+y^2+z^2)},$$

где B — некоторое положительное число.

Обозначим через $g = g(x, y, z)$ свёртку функций f и ϕ , то есть

$$g = g(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \alpha, y - \beta, z - \gamma) \phi(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma.$$

Поскольку функция $\phi = \phi(x, y, z)$ является бесконечно дифференцируемой, то этим же свойством обладает и функция $g = g(x, y, z)$. Кроме того, преобразование Фурье функции $g = g(x, y, z)$ будет произведением преобразований Фурье функций f и ϕ .

Оценим разность между функциями f и g .

Для краткости введем обозначения $\bar{x} = (x, y, z)$, $\overline{x - \alpha} = (x - \alpha, y - \beta, z - \gamma)$, $\bar{\alpha} = (\alpha, \beta, \gamma)$, $d\bar{\alpha} = (d\alpha, d\beta, d\gamma)$.

ЛЕММА 1. Пусть ρ — расстояние от произвольной точки M трехмерного пространства до границы шара Q . Тогда $|f - g| \leq 2$, когда точка M лежит на границе шара Q , и $|f - g| \leq \int_{|\bar{\alpha}| \geq \rho} \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha}$, когда M не принадлежит границе шара Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда точка $M = M(x, y, z)$ лежит внутри шара Q . В этом случае расстояние ρ от точки M до границы шара положительно и $a = |\bar{x}| + \rho$.

Согласно определению для функций f и ϕ всегда выполняются неравенства $0 \leq f \leq 1$, $\phi > 0$. Тогда для функции g получим

$$0 \leq g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\overline{x - \alpha}) \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} = 1.$$

Поэтому для разности $p = f - g$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} p = f - g &= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\overline{x - \alpha}) \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} = 1 - \int_{|\bar{\alpha}| < \rho} f(\overline{x - \alpha}) \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} - \\ &- \int_{|\bar{\alpha}| \geq \rho} f(\overline{x - \alpha}) \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} = 1 - \int_{|\bar{\alpha}| < \rho} \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} - \int_{|\bar{\alpha}| \geq \rho} f(\overline{x - \alpha}) \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} = \\ &= \int_{|\bar{\alpha}| \geq \rho} \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} - \int_{|\bar{\alpha}| \geq \rho} f(\overline{x - \alpha}) \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} = \int_{|\bar{\alpha}| \geq \rho} (1 - f(\overline{x - \alpha})) \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} \leq \\ &\leq \int_{|\bar{\alpha}| \geq \rho} \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha}. \end{aligned}$$

Здесь мы пользовались тем, что из условия $|\bar{\alpha}| < \rho$ следует, что $|\overline{x - \alpha}| \leq |\bar{x}| + |\bar{\alpha}| < |\bar{x}| + \rho = a$, и $f(\overline{x - \alpha}) = 1$.

В случае, когда точка M лежит вне шара Q и расстояние от точки M до его границы также равно ρ , имеем $|\bar{x}| = a + \rho$ и справедливы следующие соотношения $f = 0$, $g > 0$,

$$0 < -p = g - f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\overline{x - \alpha}) \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} = \int_{|\bar{\alpha}| \geq \rho} f(\overline{x - \alpha}) \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} \leq \int_{|\bar{\alpha}| \geq \rho} \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha},$$

так как при $|\bar{\alpha}| < \rho$, имеем $|\overline{x - \alpha}| \geq |\bar{x}| - |\bar{\alpha}| > |\bar{x}| - \rho = a$ и $f(\overline{x - \alpha}) = 0$.

Если же точка M лежит на границе шара Q , то $|p| = |f - g| \leq |f| + |g| \leq 2$.

□

Займемся оценкой интеграла $I = \int_{|\bar{\alpha}| \geq \rho} \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha}$.

ЛЕММА 2. Для интеграла $I = \int_{|\bar{\alpha}| \geq \rho} \phi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha}$ имеет место неравенство $I < 2\sqrt{B}\rho e^{-B\rho^2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к сферическим координатам, получим

$$\begin{aligned}
 I = I(\rho) &= \iiint_{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \geq \rho^2} \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-B(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = \\
 &= \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{\rho}^{+\infty} e^{-Br^2} r^2 \cos \psi dr = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_{\rho}^{+\infty} e^{-Br^2} r^2 dr = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{B\rho^2}^{+\infty} e^{-y} \sqrt{y} dy,
 \end{aligned}$$

где $y = Br^2$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда $B\rho^2 \geq 1$. Тогда получим

$$\begin{aligned}
 0 < \frac{\sqrt{\pi}}{2} I &= - \int_{B\rho^2}^{+\infty} \sqrt{y} de^{-y} = -e^{-y} \sqrt{y} \Big|_{B\rho^2}^{+\infty} + \int_{B\rho^2}^{+\infty} e^{-y} d\sqrt{y} = e^{-B\rho^2} \sqrt{B\rho} + \\
 &+ \int_{B\rho^2}^{+\infty} e^{-y} d\sqrt{y} = e^{-B\rho^2} \sqrt{B\rho} + \frac{1}{2} \int_{B\rho^2}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy \leq e^{-B\rho^2} \sqrt{B\rho} + \frac{1}{2} \int_{B\rho^2}^{+\infty} e^{-y} dy = \\
 &= e^{-B\rho^2} \sqrt{B\rho} - \frac{1}{2} e^{-y} \Big|_{B\rho^2}^{+\infty} = e^{-B\rho^2} \sqrt{B\rho} + \frac{1}{2} e^{-B\rho^2} = e^{-B\rho^2} \left(\sqrt{B\rho} + \frac{1}{2} \right) \leq \\
 &\leq \frac{3}{2} e^{-B\rho^2} \sqrt{B\rho}.
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$0 < I \leq \frac{3}{\sqrt{\pi}} \sqrt{B\rho} e^{-B\rho^2} < 2\sqrt{B\rho} e^{-B\rho^2}. \quad \square$$

Обозначим через $T_0(a)$ сумму вида

$$T_0(a) = \sum_{-2a \leq x, y, z \leq 2a} g(x, y, z).$$

Оценим погрешность R_0 , возникающую при замене величины $T(a)$ на $T_0(a)$.

ЛЕММА 3. Величина R_0 оценивается следующим образом

$$R_0 \ll_{\epsilon} a^{2+2\epsilon} \beta + a^{1+2\epsilon} + a^{3+2\epsilon} \frac{1}{\beta \sqrt{B}} e^{-\beta^2 B} + a^{2+2\epsilon} \sqrt{B} e^{-\beta^2 B},$$

где β - некоторое число из интервала $(0; a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} R_0 &= |T_0(a) - T(a)| \leq \sum_{-2a \leq x, y, z \leq 2a} |f(x, y, z) - g(x, y, z)| \leq \\ &\leq \sum_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 12a^2} |f(x, y, z) - g(x, y, z)| = \sum_{n \leq 12a^2} \sum_{x^2 + y^2 + z^2 = n} |f(x, y, z) - g(x, y, z)|. \end{aligned}$$

Далее зафиксируем некоторое значение β из интервала $(0; a)$, и разобьем последнюю сумму на три части $\sum_1, \sum_2, \sum_3$, полагая

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \sum_{n \leq (a-\beta)^2} \sum_{x^2 + y^2 + z^2 = n} |f(x, y, z) - g(x, y, z)|, \\ \sum_2 &= \sum_{(a-\beta)^2 \leq n \leq (a+\beta)^2} \sum_{x^2 + y^2 + z^2 = n} |f(x, y, z) - g(x, y, z)|, \\ \sum_3 &= \sum_{(a+\beta)^2 \leq n \leq 12a^2} \sum_{x^2 + y^2 + z^2 = n} |f(x, y, z) - g(x, y, z)|. \end{aligned}$$

Для разности $|p| = |f - g|$ воспользуемся полученными ранее (утв. 1) оценками, а также оценкой количества решений $r_3(n)$ диофантова уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = n$ при фиксированном n , которая имеет вид

$$r_3(n) \ll_{\epsilon} n^{\frac{1}{2} + \epsilon},$$

где $\epsilon > 0$ сколь угодно мало. Тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_1 &\ll \sum_{n \leq (a-\beta)^2} r_3(n) I(a - \sqrt{n}) \ll_{\epsilon} \sum_{n \leq (a-\beta)^2} n^{\frac{1}{2} + \epsilon} (a - \sqrt{n}) \sqrt{B} e^{-B(a-\sqrt{n})^2} \leq \\ &\leq a^{2+2\epsilon} \sqrt{B} \sum_{n \leq (a-\beta)^2} e^{-B(a-\sqrt{n})^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что функция $e^{-B(a-\sqrt{x})^2}$ на промежутке $1; (a-\beta)^2$ строго возрастает. Следовательно

$$\sum_{n \leq (a-\beta)^2} e^{-B(a-\sqrt{n})^2} \leq \int_1^{(a-\beta)^2} e^{-B(a-\sqrt{x})^2} dx + e^{-B\beta^2}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \int_1^{(a-\beta)^2} e^{-B(a-\sqrt{x})^2} dx &= 2 \int_1^{a-\beta} e^{-B(a-t)^2} t dt \leq 2a \int_1^{a-\beta} e^{-B(a-t)^2} dt = \\ &= 2a \int_{\beta}^{a-1} e^{-Bt_1^2} dt_1 \leq 2a \int_{\beta}^{+\infty} e^{-Bt_1^2} dt_1 = \frac{2a}{\sqrt{B}} \int_{\sqrt{B}\beta}^{+\infty} e^{-y^2} dy \end{aligned}$$

Наложим условие на значение β с помощью неравенства $\beta\sqrt{B} \geq 1$. Тогда получим

$$\int_{\beta\sqrt{B}}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{\beta\sqrt{B}}^{+\infty} e^{-y^2} \frac{2y}{2y} dy \leq \frac{1}{2\beta\sqrt{B}} \int_{\beta\sqrt{B}}^{+\infty} e^{-y^2} dy^2 = \frac{1}{2\beta\sqrt{B}} e^{-\beta^2 B}.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\sum_1 \ll_{\epsilon} a^{2+2\epsilon} \sqrt{B} e^{-\beta^2 B} \left(\frac{2a}{\sqrt{B}} \frac{1}{2\beta\sqrt{B}} + 1 \right) = a^{2+2\epsilon} e^{-\beta^2 B} \left(\frac{a}{\beta\sqrt{B}} + \sqrt{B} \right).$$

Перейдем к оценке величины $\sum_2$. Учитывая, что $|f - g| = |p| \leq 2$, получим

$$\begin{aligned} \sum_2 &= \sum_{(a-\beta)^2 \leq n \leq (a+\beta)^2} \sum_{x^2+y^2+z^2=n} |f(x, y, z) - g(x, y, z)| \leq \\ &\leq 2 \sum_{(a-\beta)^2 \leq n \leq (a+\beta)^2} r_3(n) \ll_{\epsilon} a^{1+2\epsilon} \sum_{(a-\beta)^2 \leq n \leq (a+\beta)^2} 1 \leq a^{1+2\epsilon} (4a\beta + 1). \end{aligned}$$

Теперь оценим сумму $\sum_3$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_3 &= \sum_{(a+\beta)^2 \leq n \leq 12a^2} \sum_{x^2+y^2+z^2=n} |f(x, y, z) - g(x, y, z)| \ll \\ &\ll \sum_{(a+\beta)^2 \leq n \leq 12a^2} r_3(n) I(\sqrt{n} - a) \ll_{\epsilon} a^{1+2\epsilon} \sqrt{B} \sum_{(a+\beta)^2 \leq n \leq 12a^2} (\sqrt{n} - a) e^{-B(\sqrt{n}-a)^2} \leq \\ &\leq a^{2+2\epsilon} \sqrt{B} \sum_{(a+\beta)^2 \leq n \leq 12a^2} e^{-B(\sqrt{n}-a)^2}. \end{aligned}$$

Ввиду того, что функция $e^{-B(\sqrt{x}-a)^2}$ монотонно убывает при $x \geq (a+\beta)^2$, имеет место оценка

$$\begin{aligned} \sum_{(a+\beta)^2 \leq n \leq 12a^2} e^{-B(\sqrt{n}-a)^2} &\leq e^{-\beta^2 B} + \int_{(a+\beta)^2}^{12a^2} e^{-B(\sqrt{x}-a)^2} dx = e^{-\beta^2 B} + \\ &+ 2 \int_{a+\beta}^{2\sqrt{3}a} e^{-B(t-a)^2} t dt \leq e^{-\beta^2 B} + 8a \int_{a+\beta}^{2\sqrt{3}a} e^{-B(t-a)^2} dt = e^{-\beta^2 B} + \\ &+ 8a \int_{\beta}^{(2\sqrt{3}-1)a} e^{-Bs^2} ds \leq e^{-\beta^2 B} + 8a \int_{\beta}^{+\infty} e^{-Bs^2} ds = e^{-\beta^2 B} + \frac{8a}{\sqrt{B}} \int_{\beta\sqrt{B}}^{+\infty} e^{-y^2} dy \leq \\ &\leq e^{-\beta^2 B} + \frac{8a}{\sqrt{B}} \frac{1}{2\beta\sqrt{B}} e^{-\beta^2 B}, \end{aligned}$$

так как ранее была получена оценка вида

$$\int_{\beta\sqrt{B}}^{+\infty} e^{-y^2} dy \leq \frac{1}{2\beta\sqrt{B}} e^{-\beta^2 B}.$$

Таким образом приходим к неравенству

$$\sum_3 \ll_{\epsilon} a^{2+2\epsilon} e^{-\beta^2 B} \left(\frac{a}{\beta\sqrt{B}} + \sqrt{B} \right).$$

Собирая вместе полученные оценки для сумм $\sum_1, \sum_2, \sum_3$, будем иметь

$$R_0 \leq \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 \ll_{\epsilon} a^{2+2\epsilon} \beta + a^{1+2\epsilon} + a^{3+2\epsilon} \frac{1}{\beta\sqrt{B}} e^{-\beta^2 B} + a^{2+2\epsilon} \sqrt{B} e^{-\beta^2 B}.$$

□

Зафиксируем некоторое положительное число $\delta \leq \frac{1}{3}$ и положим $\beta = a^{-\frac{2}{3}-\delta}$. Тогда $a^{2+\epsilon} \beta = a^{\frac{4}{3}-\delta+\epsilon}$. Положим также $\sqrt{B} = \frac{1}{\beta} \sqrt{5 \ln a}$, то есть $B = 5a^{\frac{4}{3}+2\delta} \ln a$. Тогда $\beta^2 B = 5 \ln a$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} a^{3+2\epsilon} \frac{1}{\beta\sqrt{B}} e^{-\beta^2 B} &= a^{3+2\epsilon} \frac{1}{\sqrt{5 \ln a}} a^{-5} \ll 1, \\ a^{2+2\epsilon} \sqrt{B} e^{-\beta^2 B} &= a^{2+2\epsilon} a^{\frac{2}{3}+\delta} \sqrt{5 \ln a} a^{-5} \ll 1. \end{aligned}$$

Тем самым нами доказано, что имеет место равенство

$$T(a) = T_0(a) + O\left(a^{\frac{4}{3}-\delta+\epsilon}\right).$$

Далее мы будем заниматься выводом асимптотической формулы для величины $T_0(a)$.

Преобразуем величину $T_0(a)$ с помощью формулы суммирования Пуассона, формулировка которой содержится в следующей лемме (подробнее см. [3], стр. 442).

ЛЕММА 4. Пусть $a \leq b$ - полуцелые числа, то есть числа вида $z + \frac{1}{2}$, где z - целое число. Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, непрерывную на $X = [a; b]$, $|f'(x)| \leq M$. Тогда при любом натуральном $N > 3$ справедлива формула

$$S = \sum_{a < n < b} f(n) = \sum_{n=-N}^N \int_a^b f(x) \cos 2\pi n x dx + R_N = \sum_{n=-N}^N \int_a^b f(x) e^{-2\pi i n x} dx + R_N,$$

$$\text{где } |R_N| \leq \frac{8M(b-a) \ln N}{N}.$$

В частности, при $N \rightarrow \infty$

$$S = \sum_{a < n < b} f(n) = \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \int_a^b f(x) \cos 2\pi n x dx.$$

здесь символ $\sum'_{n=-\infty}^{\infty}$ означает, что сумма ряда берется в смысле главного значения по Коши.

Обозначим через $T_{01}(a)$ следующую тройную сумму

$$T_{01}(a) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N^2}^{N^2} \sum_{l=-N^4}^{N^4} \int_{-2a}^{2a} dz \int_{-2a}^{2a} dy \int_{-2a}^{2a} g(x, y, z) e^{-2\pi i(lx+my+nz)} dx$$

ЛЕММА 5. Полагая $M_1 = \sup_{-2a \leq x, y, z \leq 2a} \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right|$, $M_2 = \sup_{-2a \leq x, y, z \leq 2a} \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right|$, $M_3 = \sup_{-2a \leq x, y, z \leq 2a} \left| \frac{\partial g}{\partial z} \right|$, будем иметь

$$T_0(a) = T_{01}(a) + R_{01},$$

где $R_{01} \ll a^3(M_1 + M_2 + M_3) \frac{\ln N}{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 4 к сумме $T_0(a)$ последовательно по каждой переменной суммирования. Получим

$$\begin{aligned} T_0(a) &= \sum_{-2a \leq x, y, z \leq 2a} g(x, y, z) = \sum_{-2a \leq x, y, \leq 2a} \sum_{-2a \leq z \leq 2a} g(x, y, z) = \\ &= \sum_{-2a \leq x, y, \leq 2a} \left(\sum_{n=-N}^N \int_{-2a}^{2a} g(x, y, z) e^{-2\pi i n z} dz + R_{N,3} \right) = \\ &= \sum_{n=-N}^N \int_{-2a}^{2a} \sum_{-2a \leq x, y, \leq 2a} g(x, y, z) e^{-2\pi i n z} dz + R_3. \end{aligned}$$

Здесь величина R_3 удовлетворяет неравенству

$$|R_3| \leq \sum_{-2a \leq x, y, \leq 2a} \frac{8M_3 4a \ln N}{N} \leq 2^9 a^3 M_3 \frac{\ln N}{N}.$$

К сумме, стоящей под знаком интеграла в правой части, снова применим лемму 4. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{-2a \leq x, y, \leq 2a} g(x, y, z) e^{-2\pi i n z} &= \sum_{-2a \leq x \leq 2a} \sum_{-2a \leq y \leq 2a} g(x, y, z) e^{-2\pi i n z} = \\ &= \sum_{-2a \leq x \leq 2a} \left(\sum_{m=-N^2}^{N^2} \int_{-2a}^{2a} g(x, y, z) e^{-2\pi i n z} e^{-2\pi i m y} dy + R_{N,2} \right) \end{aligned}$$

Здесь величина R_2 оценивается следующим образом

$$|R_{N,2}| \leq \frac{8M_2 4a \ln N^2}{N^2}.$$

Отсюда для величины $T_0(a)$ вытекает соотношение

$$\begin{aligned} T_0(a) &= \sum_{n=-N}^N \int_{-2a}^{2a} \sum_{-2a \leq x \leq 2a} \left(\sum_{m=-N^2}^{N^2} \int_{-2a}^{2a} g(x, y, z) e^{-2\pi i(nz+my)} dy + R_{N,2} \right) dz + R_3 = \\ &= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N^2}^{N^2} \int_{-2a}^{2a} dz \int_{-2a}^{2a} \sum_{-2a \leq x \leq 2a} g(x, y, z) e^{-2\pi i(nz+my)} dy + R_2 + R_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |R_2| &\leq \left| \sum_{n=-N}^N \int_{-2a}^{2a} \left(\sum_{-2a \leq x \leq 2a} R_{N,2} \right) dz \right| \leq \sum_{n=-N}^N 4a 4a \frac{8M_2 4a \ln N^2}{N^2} \leq \\ &\leq \frac{2N 2^9 M_2 a^3 2 \ln N}{N^2} = 2^{11} a^3 M_2 \frac{\ln N}{N}. \end{aligned}$$

И, наконец, к оставшейся сумме по x под знаком интеграла снова применим лемму 4. Проводя рассуждения аналогичные выполненным ранее, получим

$$\begin{aligned} T_0(a) &= \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N^2}^{N^2} \sum_{l=-N^4}^{N^4} \int_{-2a}^{2a} dz \int_{-2a}^{2a} dy \int_{-2a}^{2a} g(x, y, z) e^{-2\pi i(nz+my+lx)} dx + R_{01} = \\ &= T_{01}(a) + R_{01}, \end{aligned}$$

где $R_{01} = R_1 + R_2 + R_3$ и для R_1 выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq \left| \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N^2}^{N^2} \int_{-2a}^{2a} dz \int_{-2a}^{2a} R_{N,1} dy \right| \leq \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N^2}^{N^2} 4a 4a \frac{8M_1 4a \ln N^4}{N^4} \leq \\ &\leq 2N 2N^2 2^9 a^3 M_1 \frac{4 \ln N^4}{N^4} = 2^{13} a^3 M_1 \frac{\ln N}{N}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$R_{01} \ll a^3 (M_1 + M_2 + M_3) \frac{\ln N}{N}. \quad \square$$

Далее займемся изучением суммы $T_{01}(a)$. При каждом фиксированном значении набора (l, m, n) в сумме $T_{01}(a)$ преобразуем выражение соответствующего

тройного интеграла. Имеем

$$\begin{aligned}
J(l, m, n) &= \int_{-2a}^{2a} \int_{-2a}^{2a} \int_{-2a}^{2a} g(x, y, z) e^{-2\pi i(lx+my+nz)} dx dy dz = \\
&= \int_{-2a}^{2a} dz \int_{-2a}^{2a} dy \int_{-2a}^{2a} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma) \phi(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma \times \\
&\quad \times e^{-2\pi i(lx+my+nz)} = \int_{-2a}^{2a} dz \int_{-2a}^{2a} dy \int_{-2a}^{2a} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta, \gamma) \times \\
&\quad \times \phi(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma) d\alpha d\beta d\gamma e^{-2\pi i(lx+my+nz)} = \\
&= \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-2a}^{2a} \int_{-2a}^{2a} \int_{-2a}^{2a} dx dy dz \iiint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leq a^2} e^{-B((x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2)} e^{-2\pi i(lx+my+nz)} d\alpha d\beta d\gamma \\
&= \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \iiint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leq a^2} d\alpha d\beta d\gamma \int_{-2a-\gamma}^{2a-\gamma} dt \int_{-2a-\beta}^{2a-\beta} dv \int_{-2a-\alpha}^{2a-\alpha} du e^{-B(u^2+v^2+t^2)} \times \\
&\quad \times e^{-2\pi i(l(u+\alpha)+m(v+\beta)+n(t+\gamma))} = \\
&= \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \iiint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leq a^2} e^{-2\pi i(l\alpha+m\beta+n\gamma)} d\alpha d\beta d\gamma \times \\
&\quad \times \int_{-2a-\gamma}^{2a-\gamma} \int_{-2a-\beta}^{2a-\beta} \int_{-2a-\alpha}^{2a-\alpha} e^{-B(u^2+v^2+t^2)-2\pi i(lu+mv+nt)} du dv dt.
\end{aligned}$$

Следовательно величина $T_{01}(a)$ может быть записана в виде

$$T_{01}(a) = \sum_{l,m,n} J(l, m, n) = \iiint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leq a^2} S_1(\alpha) S_2(\beta) S_3(\gamma) d\alpha d\beta d\gamma,$$

где

$$S_1(\alpha) = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=-N^4}^{N^4} e^{-2\pi i l \alpha} \int_{-2a-\alpha}^{2a-\alpha} e^{-Bu^2-2\pi i l u} du$$

$$S_2(\beta) = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-N^2}^{N^2} e^{-2\pi i m \beta} \int_{-2a-\beta}^{2a-\beta} e^{-Bv^2-2\pi i m v} dv$$

$$S_2(\gamma) = \left(\frac{B}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-N}^N e^{-2\pi i n \gamma} \int_{-2a-\gamma}^{2a-\gamma} e^{-Bt^2-2\pi i n t} dt.$$

Рассмотрим интеграл $I = \int_{-2a-\alpha}^{2a-\alpha} e^{-Bu^2-2\pi i l u} du$.

$$I = \int_{-2a-\alpha}^{2a-\alpha} e^{-Bu^2-2\pi i l u} du = \int_{-2a-\alpha}^{2a-\alpha} e^{-B(u+\frac{\pi i l}{B})^2 - \frac{\pi^2 l^2}{B}} du =$$

$$= e^{-\frac{\pi^2 l^2}{B}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-B(u+\frac{\pi i l}{B})^2} du - \int_{-\infty}^{-2a-\alpha} e^{-B(u+\frac{\pi i l}{B})^2} du - \int_{2a-\alpha}^{\infty} e^{-B(u+\frac{\pi i l}{B})^2} du \right),$$

но $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-B(u+\frac{\pi i l}{B})^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Bu^2} du = \left(\frac{\pi}{B}\right)^{\frac{1}{2}}$. Далее ввиду абсолютной сходимости, можно интегрировать по частям.

$$\int_{-\infty}^{-2a-\alpha} e^{-B(u+\frac{\pi i l}{B})^2} du = -\frac{1}{2B} \int_{-\infty}^{-2a-\alpha} \frac{de^{-B(u+\frac{\pi i l}{B})^2}}{u + \frac{\pi i l}{B}} = -\frac{e^{-B(-2a-\alpha+\frac{\pi i l}{B})^2}}{2B(-2a-\alpha+\frac{\pi i l}{B})} -$$

$$-\frac{1}{2B} \int_{-\infty}^{-2a-\alpha} e^{-B(u+\frac{\pi i l}{B})^2} \frac{1}{(u + \frac{\pi i l}{B})^2} du.$$

Оценим модуль интеграла в правой части последнего равенства. Получим

$$\left| \int_{-\infty}^{-2a-\alpha} \frac{e^{-B(u+\frac{\pi i l}{B})^2}}{(u + \frac{\pi i l}{B})^2} du \right| \leq \int_{-\infty}^{-2a-\alpha} \left| \frac{e^{-B(u+\frac{\pi i l}{B})^2}}{(u + \frac{\pi i l}{B})^2} \right| du = \int_{-\infty}^{-2a-\alpha} \frac{e^{-Bu^2+\frac{\pi^2 l^2}{B}}}{|u + \frac{\pi i l}{B}|^2} du \leq$$

$$\leq e^{\frac{\pi^2 l^2}{B}} \frac{1}{a^2 + \frac{\pi^2 l^2}{B^2}} \frac{e^{-B(2a+\alpha)^2}}{2aB} \leq e^{\frac{\pi^2 l^2}{B}} \frac{e^{-a^2 B}}{2aB(a^2 + \frac{\pi^2 l^2}{B^2})}.$$

Аналогично для интеграла $G(l) = \int_{2a-\alpha}^{\infty} e^{-B(u+\frac{\pi i l}{B})^2} du$ имеем

$$\int_{2a-\alpha}^{\infty} e^{-B(u+\frac{\pi i l}{B})^2} du = \frac{e^{-B(2a-\alpha+\frac{\pi i l}{B})^2}}{2B(2a-\alpha+\frac{\pi i l}{B})} + O\left(e^{\frac{\pi^2 l^2}{B}} \frac{e^{-a^2 B}}{aB(a^2 + \frac{\pi^2 l^2}{B^2})}\right).$$

Оценим сверху модуль суммы F , где

$$F = B^{\frac{1}{2}} \sum_{l=-N^4}^{N^4} e^{-\frac{\pi^2 l^2}{B}} G(l) e^{-2\pi i l \alpha}.$$

ЛЕММА 6. *Имеет место неравенство $|F| \ll B^{\frac{1}{2}} e^{-a^2 B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собирая вместе члены со значением $l = l_1$ и $l = -l_1$, где $1 \leq l_1 \leq N^4$, получим

$$\begin{aligned} |F| \leq & \frac{e^{-B(2a-\alpha)^2}}{2B^{\frac{1}{2}}(2a-\alpha)} + \frac{1}{2B^{\frac{1}{2}}} \left| \sum_{l_1=1}^{N^4} \left(\frac{e^{-B(2a-\alpha)^2-4\pi i l_1 a}}{2a-\alpha+\frac{\pi i l_1}{B}} + \frac{e^{-B(2a-\alpha)^2+4\pi i l_1 a}}{2a-\alpha-\frac{\pi i l_1}{B}} \right) \right| + \\ & + O\left(\frac{e^{-a^2 B}}{a^3 B}\right) + \sum_{l_1=1}^{N^4} O\left(\frac{e^{-a^2 B}}{a B^{\frac{1}{2}}(a^2 + \frac{\pi^2 l_1^2}{B^2})}\right). \end{aligned}$$

Порядок последней суммы не превосходит порядка интеграла

$$\frac{e^{-a^2 B}}{a} \int_1^{\infty} \frac{dx}{a^2 B^2 + \pi^2 x^2} = \frac{e^{-a^2 B}}{a} \frac{1}{a B \pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi x}{a B} \Big|_1^{\infty} \ll \frac{B^{\frac{1}{2}}}{a^2} e^{-a^2 B}$$

Займемся оценкой первой суммы в выражении для $|F|$. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-B(2a-\alpha)^2}}{2a-\alpha+\frac{\pi i l_1}{B}} (\cos 4\pi l_1 a - i \sin 4\pi l_1 a) + \frac{e^{-B(2a-\alpha)^2}}{2a-\alpha-\frac{\pi i l_1}{B}} (\cos 4\pi l_1 a + i \sin 4\pi l_1 a) = \\ & = e^{-B(2a-\alpha)^2} \cos 4\pi l_1 a \frac{2(2a-\alpha)}{(2a-\alpha)^2 + \frac{\pi^2 l_1^2}{B^2}} - e^{-B(2a-\alpha)^2} \sin 4\pi l_1 a \frac{\frac{2\pi l_1}{B}}{(2a-\alpha)^2 + \frac{\pi^2 l_1^2}{B^2}}. \end{aligned}$$

Далее оценим суммы

$$\sum_1 = \sum_{l=-N^4}^{N^4} \cos 4\pi l_1 a \frac{2(2a-\alpha)}{(2a-\alpha)^2 + \frac{\pi^2 l_1^2}{B^2}}$$

и

$$\sum_2 = \sum_{l=-N^4}^{N^4} \frac{\sin 4\pi l_1 a}{l_1} \frac{l_1^2}{(2a-\alpha)^2 + \frac{\pi^2 l_1^2}{B^2}}.$$

Имеем

$$|\sum_1| \ll a \int_1^{\infty} \frac{dx}{(2a-\alpha)^2 + \frac{\pi^2 x^2}{B^2}} = \frac{a B}{\pi(2a-\alpha)} \operatorname{arctg} \frac{\pi x}{B(2a-\alpha)} \Big|_1^{\infty} \ll B.$$

Для оценки величины $|\sum_2|$ заметим сначала, что выражение $\frac{l_1^2}{(2a-\alpha)^2 + \frac{\pi^2 l_1^2}{B^2}} = \frac{1}{\frac{(2a-\alpha)^2}{l_1^2} + \frac{\pi^2}{B^2}}$ возрастает с ростом l_1 и при этом не превосходит величины $\frac{\pi^2}{B^2}$. Кроме того известно, что частичные суммы ряда $\sum \frac{\sin l_1 x}{l_1}$ равномерно ограничены на вещественной оси. Тогда, применяя преобразование Абеля, получим

$$|\sum_2| \ll B^2.$$

Используя полученные неравенства, приходим к следующей оценке для величины $|F|$

$$|F| \ll \frac{e^{-B(2a-\alpha)^2}}{B^{\frac{1}{2}}(2a-\alpha)} + B^{\frac{1}{2}}e^{-B(2a-\alpha)^2} + \left(\frac{B^{\frac{1}{2}}}{a^2} + \frac{1}{a^3 B} \right) e^{-a^2 B} \ll B^{\frac{1}{2}}e^{-a^2 B}. \quad \square$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $H = B^{\frac{1}{2}}e^{-a^2 B}$, Тогда величина $T_{01}(a)$ может быть записана в виде

$$T_{01}(a) = \sum_{l,m,n} J(l,m,n) = \iiint_{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leq a^2} S_1(\alpha) S_2(\beta) S_3(\gamma) d\alpha d\beta d\gamma.$$

При этом имеют место равенства

$$\begin{aligned} S_1(\alpha) &= Q_1(\alpha) + O(H), & \text{где} \quad Q_1(\alpha) &= \sum_{l=-N^4}^{N^4} e^{-2\pi i l \alpha - \frac{\pi^2 l^2}{B}}, \\ S_2(\beta) &= Q_2(\beta) + O(H), & \text{где} \quad Q_2(\beta) &= \sum_{m=-N^2}^{N^2} e^{-2\pi i m \beta - \frac{\pi^2 m^2}{B}}, \\ S_3(\gamma) &= Q_3(\gamma) + O(H), & \text{где} \quad Q_3(\gamma) &= \sum_{n=-N}^N e^{-2\pi i n \gamma - \frac{\pi^2 n^2}{B}}. \end{aligned}$$

Известно, что при любом вещественном x для линейной тригонометрической суммы выполняется оценка

$$\left| \sum_{k=-K}^K e^{-2\pi i k x} \right| \ll \frac{1}{\frac{1}{K} + \|x\|},$$

где $\|x\|$ обозначает расстояние от x до ближайшего к нему целого числа.

Отсюда с помощью преобразования Абеля вытекают оценки

$$\begin{aligned} |Q_1(\alpha)| &\ll \frac{1}{\frac{1}{N^4} + \|\alpha\|}, & \int_x^{x+1} |Q_1(\alpha)| d\alpha &\ll \ln N, \\ |Q_2(\beta)| &\ll \frac{1}{\frac{1}{N^2} + \|\beta\|}, & \int_x^{x+1} |Q_2(\beta)| d\beta &\ll \ln N, \\ |Q_3(\gamma)| &\ll \frac{1}{\frac{1}{N} + \|\gamma\|}, & \int_x^{x+1} |Q_3(\gamma)| d\gamma &\ll \ln N, \end{aligned}$$

где $N \rightarrow +\infty$, а x - любое вещественное число.

Следовательно выполняется неравенство

$$\begin{aligned} T_{01} - \iiint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leq a^2} Q_1(\alpha)Q_2(\beta)Q_3(\gamma)d\alpha d\beta d\gamma &\ll \\ &\ll \iiint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leq a^2} H(|Q_1||Q_2| + |Q_1||Q_3| + |Q_2||Q_3|)d\alpha d\beta d\gamma + \\ &+ \iiint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leq a^2} H^2(|Q_1| + |Q_2| + |Q_3|)d\alpha d\beta d\gamma + \iiint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leq a^2} H^3 d\alpha d\beta d\gamma \ll \\ &\ll Ha^3 \ln^2 N + H^2 a^3 \ln N + H^3 a^3 \ll Ha^3 \ln N = B^{\frac{1}{2}} a^3 e^{-a^2 B} \ln N. \end{aligned}$$

Вычислим значение интеграла в левой части неравенства для величины $T_{01}(a)$. Имеем

$$\iiint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leq a^2} Q_1(\alpha)Q_2(\beta)Q_3(\gamma)d\alpha d\beta d\gamma = \sum_{l=-N^4}^{N^4} \sum_{m=-N^2}^{N^2} \sum_{n=-N}^N e^{-\frac{\pi^2}{B}(l^2+m^2+n^2)} K,$$

где

$$K = K(l, m, n) = \iiint_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leq a^2} e^{-2\pi i(l\alpha+m\beta+n\gamma)} d\alpha d\beta d\gamma.$$

Найдем значение величины $K = K(l, m, n)$.

ЛЕММА 7. При $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$ выполняется равенство

$$K(l, m, n) = a \frac{\cos\left(2\pi a \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\right)}{\pi(l^2 + m^2 + n^2)} + \frac{\sin\left(2\pi a \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\right)}{2\pi^2(l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $K(0, 0, 0) = \frac{4}{3}\pi a^3$. В случае $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$ выполним в интеграле $K(l, m, n)$ ортогональную замену переменных, полагая

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}} (l\alpha + m\beta + n\gamma) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} (n\beta + m\gamma) \\ z &= \frac{1}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}\sqrt{(m^2 + n^2)}} (-\alpha(m^2 + n^2) + lm\beta + nl\gamma) \end{aligned}$$

Якобиан этого преобразования равен 1. В результате замены получим равенство

$$K(l, m, n) = \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2} e^{-2\pi i \sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)} x} dx dy dz.$$

Переходя к повторным интегралам, и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} K(l, m, n) &= \frac{a}{\pi(l^2 + m^2 + n^2)} \frac{e^{2\pi i a \sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}} + e^{-2\pi i a \sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}}}{2} + \\ &\quad \frac{1}{2\pi^2(l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{2\pi i a \sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}} - e^{-2\pi i a \sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}}}{2i} = \\ &= a \frac{\cos\left(2\pi a \sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}\right)}{\pi(l^2 + m^2 + n^2)} + \frac{\sin\left(2\pi a \sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}\right)}{2\pi^2(l^2 + m^2 + n^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad \square \end{aligned}$$

Обратимся вновь к величине $T_0(a)$. Учитывая леммы 5 и 7, приходим к равенству

$$\begin{aligned} T_0 &= \sum_{l=-N^4}^{N^4} \sum_{m=-N^2}^{N^2} \sum_{n=-N}^N e^{-\frac{\pi^2}{B}(l^2 + m^2 + n^2)} K(l, m, n) + \\ &+ O\left(B^{\frac{1}{2}} a^3 e^{-a^2 B} \ln N\right) + O\left(a^3 (M_1 + M_2 + M_3) \frac{\ln N}{N}\right). \end{aligned}$$

Следует заметить, остаток $R_{01}(a) = a^3(M_1 + M_2 + M_3) \frac{\ln N}{N}$ становится сколь угодно малым, если N растет, и a фиксировано. Второй остаток есть $o(1)$. Поэтому при достаточно большом N получим

$$T_0 = \sum_{l=-N^4}^{N^4} \sum_{m=-N^2}^{N^2} \sum_{n=-N}^N e^{-\frac{\pi^2}{B}(l^2 + m^2 + n^2)} K(l, m, n) + o(1).$$

Последнее выражение допускает дальнейшее уточнение. Поскольку каждое слагаемое тройной суммы по модулю не превосходит $a e^{-\frac{\pi^2}{B}(l^2 + m^2 + n^2)}$, то рассуждая так же как и выше можно с допустимой погрешностью ограничить

промежутки суммирования по переменным l, m, n требованием $l^2 + m^2 + n^2 \leq 10\sqrt{B \ln a} = B_0$. В результате окончательно приходим к равенству

$$T(a) = \sum_{l^2+m^2+n^2 \leq B_0} e^{-\frac{\pi^2}{B}(l^2+m^2+n^2)} K(l, m, n) + O\left(a^{\frac{4}{3}-\delta+\epsilon}\right).$$

Это есть искомое выражение величины $T(a)$ через тригонометрическую сумму. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chamizo F., Iwaniec H. On the Sphere Problem // Rev. Mat. Iberoamericana. 1995. Vol. 11, № 2. P. 417—429.
2. Heath-Brown D. R. Lattice points in the sphere // Number theory in progress. Pr. Int. conference. (Zacopane, Poland, 30.06—09.07, 1997.) Vol. 2: Elem. And anal. numb. Theory. Berlin: de Gruyter, 1999. P. 883—892.
3. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2004.
4. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. М.: Наука, 1976.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Поступило 1.03.2013