## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-437-452

# Г. М. Фихтенгольц и преподавание математического анализа в России в первой половине XX века

С. С. Демидов, С. С. Петрова

**Демидов Сергей Сергеевич** — доктор физико-математических наук, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

 $e ext{-}mail: serd@mail.ru$ 

**Петрова Светлана Сергеевна** — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: spetr33@mail.ru

#### Аннотация

В работе обсуждается эволюция курса математического анализа в отечественных университетах в первой половине XX столетия и роль в этом процессе профессора Ленинградского университета Г. М. Фихтенгольца (1888–1959), автора классических сочинений — трёхтомного «Курса дифференциального и интегрального исчисления» (1947–1949) и двухтомного учебника «Основы математического анализа» (1955–1956).

*Ключевые слова:* реформа математического анализа Вейерштрасса, теория вещественного числа, определённые интегралы, зависящие от параметра.

Библиография: 15 названий.

#### Для цитирования:

С. С. Демидов, С. С. Петрова. Г. М. Фихтенгольц и преподавание математического анализа в России в первой половине XX века // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 437–452.

### CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 51(091)

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-437-452

# G. M. Fikhtengol'ts and the teaching of the mathematical analysis in the Russia during the first half of the XXth century

S. S. Demidov, S. S. Petrova

**Demidov Sergey Sergeevich** — doctor of physical and mathematical Sciences, Faculty of Mathematics and Mechanics, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: serd@mail.ru

**Petrova Svetlana Sergeevna** — candidate of physical and mathematical Sciences, senior scientific researcher, Faculty of Mathematics and Mechanics, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: spetr33@mail.ru

#### A bstract

We discuss the evolution of the course of the mathematical analysis in the Russian universities during the first half of the XXth century and the role in this process of the professor of the Leningrad University G. M. Fikhtengol'ts (1888–1959), who was the author of the classical works — of the three-volume treatise «Differential and Integral Calculus» (1947–1949) and of the two-volumes text-book «The Fundamentals of Mathematical Analysis» (1955–1956).

Keywords: Weierstrass' reform of the mathematical analysis, theory of real numbers, integrals depended from parameters.

Bibliography: 15 titles.

#### For citation:

S. S. Demidov, S. S. Petrova, 2019, "G. M. Fikhtengol'ts and the teaching of the mathematical analysis in the Russia during the first half of the XXth century", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 437–452.

### 1. Вступление

Для математического анализа последняя треть XIX-го века прошла под знаком реформы его оснований, осуществлённой К. Вейерштрассом.

Период конца XIX-го – начала XX-го столетий отмечен появлением трактатов Э. Пикара (1891–1893), Э. Гурса (1902–1903), Ш.-Ж. де ла Валле-Пуссена (1903–1906) (мы выделяем здесь руководства, оказавшиеся наиболее популярными в тогдашней России), в которых эта реформа нашла своё зримое выражение.

Началась перестройка курсов дифференциального и интегрального исчисления в университетах Европы. В этом процессе наше отечество не оказалось в первых рядах.

Существует легенда (впрочем, законно претендующая на роль исторического факта), что тогдашний лидер петербургских математиков один из отцов современной теории вероятностей А. А. Марков, относившийся к нововведениям Вейерштрасса более чем прохладно, в своих лекциях по анализу упрямо продолжал излагать теорему Ампера — утверждение о том, что всякая непрерывная функция дифференцируема всюду кроме может быть конечного множества точек области своего определения.

В Москве царствовал Н. В. Бугаев, в лекциях которого по исчислению вейерштрассовский дух также не ночевал. И хотя наиболее чуткие к новым веяниям профессора (вроде петербуржца К. А. Поссе, казанского математика А. В. Васильева или одессита С. О. Шатуновского) начали вводить вейерштрассовские идеи в свои курсы по анализу, процесс перестройки продвигался медленно.

Но прежде чем начать разговор о перестройке курса анализа в Российской высшей школе, совершившейся в 10-х – 30-х годах XX века, позволим себе сделать несколько общих замечаний о русских учебниках по математике XIX-го – начала XX-го века.

# 2. Об учебной литературе по анализу в высшей школе России второй половины XIX-го — начала XX-го века.

В России середины XIX века, когда число высших учебных заведений, где преподавались математические дисциплины, было сравнительно невелико, потребности в учебной литературе полностью покрывались иностранными учебниками (в том, что касается анализа, одним из самых распространённых был курс Ж. Штурма, читанный им в середине века в парижской Политехнической школе), а также сравнительно немногочисленными книгами российских

профессоров, такими как «Дифференциальное исчисление с приложениями к геометрии» профессора Московского университета Н. Е. Зернова (Москва, 1842).

Вторая половина века – время активного роста системы высшего образования. Подготовка учебных руководств и пособий для студентов (число высших учебных заведений росло, увеличивался и преподавательский корпус и число учащихся) мало по малу становилось специальным видом деятельности, на поприще которой появлялись знаковые имена. Так петербургский математик К. А. Поссе (1847–1928) приобрёл всероссийскую известность, как автор известных учебников по дифференциальному и интегральному исчислению. Он, в частности, активно сотрудничал с организованным в 1904 г. в Одессе издательством «Mathesis» — первым отечественным издательством, специализировавшимся на издании книг по естествознанию и математике.

С середины 19 века началась и к концу 20 получила широкое распространение практика литографированных изданий курсов лекций, читаемых известными профессорами. Так с содержанием лекций основного на рубеже XIX–XX веков лектора по математическому анализу в Московском университете Н. В. Бугаева (1837–1903) мы можем ознакомиться только по их литографированным изданиям. Оригинальный математик и мыслитель, Бугаев читал очень специфический курс исчисления, вейерштрассовский дух в котором, как мы уже говорили, не ночевал. «Излишней строгостью» он пренебрегал, предпочитая при изложении широкий мировоззренческий подход, чем чрезвычайно привлекал слушателей склонных к философии. С его курса начал своё знакомство с анализом Н. Н. Лузин (1883–1950). Но только начал, так как в июне 1903 года Бугаев умер, и далее он должен был посещать лекции Л. К. Лахтина (1858–1927) «с его диктованием основ анализа. На его диктанты, — писал Н. Н. Лузин в письме начала 1930-х годов М. Я. Выгодскому [1, с. 135], — я не ходил: зачем, раз можно купить или занять для прочтения его литографированные записки?».

Это письмо позволяет замечательным образом представить ситуацию в преподавании анализа в русских университетах, сложившуюся к началу XX века. «Я вспоминаю себя, — пишет в нём Лузин [1, с. 135], — студентом 2-го курса (т. е. речь идёт о 1902/1903 учебном годе — С. Д.) ... Я начинал своё знакомство с анализом по беспорядочно и жадно читаемому разнообразию книг. Всё зависело от случая: есть или нет такой-то книги в библиотеке, и как она выглядит, солидно или так себе. В голове была каша, хаос, обрывки нитей, срастающихся случайно. ... Главное в том, что я не знал ни Goursat'a, ни Jordan'a, а воспитывался на старинных курсах Анализа: Lacroix и других. Самым новым для меня был 7-томный курс Laurent'a ("Traitй d'Analyse"). В нём автор гордился, что он ученик Cauchy. Теория множеств и теория функций действительного переменного пришли ко мне лишь в момент окончания Университета. Такое старинное воспитание было обусловлено чистою случайностью, так как когда я был в Университете (1901–1908), курс Goursat был уже в полном ходу за границей и у нас в кругах, близких к профессорским; я же его не знал, и читал всё "автодидактом"».

Однако, «в кругах, близких к профессорским», во всяком случае в Москве, были уже обеспокоены складывавшейся ситуацией: оставаясь на таких позициях, Москва могла быстро превратиться в провинцию. Поэтому один из ведущих московских математиков Б. К. Млодзеевский (1858—1923) возглавил работу над переводом учебника Гурса на русский язык. В качестве переводчика выступил А. И. Некрасов (1883—1957) — в ту пору оставленный при университете для подготовки к профессорскому званию, впоследствии знаменитый механик, действительный член АН СССР.

В 1911 году первый том вышел из печати. Выхода второго тома пришлось ждать долго — вмешались события начавшейся в 1914 войны и последовавших революции и войны гражданской. Второй том появился лишь в 1933 году. В том же году вышло второе издание: все три тома.

Издания 1933 года осуществлялись уже государственным издательством — Государствен-

ным издательством технико-теоретической литературы. Выпуск учебной физико-математической литературы становился уже государственной задачей.

Питерцы приступили к подобной работе значительно позднее. Они выбрали для перевода двухтомник Валле-Пуссена. Переводчиками выступили Я. Д. Тамаркин (1888–1945) и Г. М. Фихтенгольц (1888–1959). Возглавил предприятие сам В. А. Стеклов (1864–1926). Шла гражданская война и найти издательство, способное осуществить набор математического текста, оказалось делом сложным. В итоге в 1922 году удалось опубликовать только первый том. Издания второго тома пришлось ждать до 1933 года, когда за него взялось упомянутое Государственное издательство технико-теоретической литературы. К тому времени Стеклова уже давно не было в живых, а Тамаркин благополучно эмигрировал в США. Так что и переводчиком, и составителем примечаний и редактором выступил Фихтенгольц.

Стоит отметить также, что при случившемся в 10-е – 20-е годы отсутствии на российском книжном рынке современной литературы по математическому анализу проблему отчасти решало появление русского перевода учебника А. Дженокки «Дифференциальное исчисление и начала интегрального исчисления» с дополнениями и разъяснениями Дж. Пеано, который переводился дважды — в 1903 неким Н. С. Синеоковым и в 1922 упомянутым Поссе.

Вторая половина 20-х - 30-е годы - время возрождения и активного роста издательской деятельности в секторе научной и учебной литературы. Начавши, как мы уже говорили, с перевода наиболее значимых западных учебников, математики вскоре перешли к написанию собственных руководств, лучше отвечавших особенностям и специфическим нуждам советской школы. Этот процесс приобрёл особый размах в 40-е — 50-е годы и к середине ХХ века русская школа уже обладала замечательной библиотекой собственной учебной математической литературы, в том числе и по математическому анализу. Вся эта деятельность падает на период зарождения и бурного развития Советской математической школы, ставшей во второй половине XX столетия одной из ведущих. Разумеется, для создания и функционирования такого организма требовалась и мощная школа подготовки квалифицированных кадров среднего и высшего уровня. Такая школа стала необходимой не только для нужд советской науки, но и народного хозяйства всей страны, которая вступала в эпоху индустриализации, осуществлявшейся в авральном режиме – надвигалась новая война. Выработка учебных программ такой школы, а также создание учебной литературы стало делом нескольких поколений математиков. В этой работе принимали участие все ведущие математики СССР, в их числе — Н. Н. Лузин, В. И. Смирнов (1887–1974), А. Я. Хинчин (1894–1959), А. Н. Колмогоров (1903– 1987), С. Л. Соболев (1908–1989), И. М. Гельфанд (1913–2009). Математический анализ стал доминантой программы подготовки студентов-математиков. В работе над курсом анализа напряжённо работали ведущие математики Москвы, Ленинграда и других городов Союза. Ядро этой группы составили математики, так или иначе связанные с теорией функций действительного переменного — именно там в ту пору формировалась высокая культура теоретикофункциональных исследований, столь необходимая для разработчиков курсов математического анализа, реализовывавших вейерштрассовские стандарты. Назовём лишь некоторые из наиболее успешных учебников по анализу, созданных в 20-е — 40-е годы. Это и вышедший первым изданием в 1924—1947 годах знаменитый курс высшей математики В. И. Смирнова, центральное место в котором занимал анализ, это и книги Н. Н. Лузина по дифференциаль-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Г. С. Смирнова сообщила нам следующую информацию, которую она извлекла из ИНТЕРНЕТА: Синеоков Николай Степанович родился в 1872 году в Царицыне, где окончил гимназию. Учился на физикоматематическом факультете вначале Киевского, затем Одесского университетов. Преподавал в реальном училище в Симбирске, затем в Царицыне. По сведениям из Российского государственного исторического архива (www.fgurgia.ru) преподавал математику и физику в Царицынской Александровской гимназии (1908), в 1911 стал директором Бежицкой мужской гимназии. В 1919 был случайно арестован в Москве, но затем отпущен. В 1920 вернулся в Царицын, где работал в губстатбюро, затем в школе, наконец профессором Сталинградского медицинского института

ному и интегральному исчислению, это двухтомный курс В. В. Немыцкого, М. И. Слудской и А. Н. Черкасова (первое издание 1940–1941 гг.), это и курс А. Я. Хинчина, первое издание которого увидело свет в 1953 году. Одной из самых ярких в этом ряду стала фигура профессора Ленинградского университета Григория Михайловича Фихтенгольца, на примере многолетней работы которого над созданием университетского курса дифференциального и интегрального исчисления можно видеть как осуществлялось СССР формирование системы математической подготовки студентов — от будущих инженеров до уровня математиков-профессионалов.

## 3. Г. М. Фихтенгольц

Григорий Михайлович родился в Одессе 5 июня 1888 года в семье железнодорожного служащего. В 1905 он с золотой медалью закончил гимназию, а в 1911 году Новороссийский университет в Одессе, где его учителями были И. В. Слешинский (1854–1931), С. О. Шатуновский (1859–1929) и В. А. Циммерман (1866–1939). Немногочисленные сведения об одесском периоде его жизни можно почерпнуть из статей [2–8]. К сожалению, это практически вся доподлинно известная нам информация о его ранних годах. Немногое, что мы можем восстановить по имеющейся в нашем распоряжении вторичной литературе, требует проверки и документального подтверждения. Изучить одесский период научной биографии выдающегося математика и педагога — одна из важных задач, стоящих перед исследователями его творчества<sup>2</sup>.

Судя по всему, его семья (железнодорожные служащие) не была сколь-нибудь состоятельной. По окончании университета он начал трудиться в известном одесском издательстве «Mathesis», совмещая эту деятельность с работой над магистерской диссертацией. Темой его исследований стала теория «простых определённых интегралов, зависящих от параметра». Кто был, выражаясь современным языком, его научным руководителем? Эту роль исполнил С. О. Шатуновский (1859–1929) — замечательный математик, известный своим глубоким интересом к проблемам оснований математики, автор оригинального курса «Введение в анализ» (литогр. издание, Одесса, 1906; печ. издание, Одесса, 1923) — одного из первых в России изложений математического анализа, отвечающих новому уровню строгости [9]. Именно лекции Шатуновского по анализу стали для Фихтенгольца отправной точкой многолетних размышлений над построением собственного курса, завершившихся созданием в 40-е — 50-е годы его классических учебников, речь о которых ещё впереди.

Областью научных интересов Григория Михайловича стала метрическая теория функций действительного переменного, а первый цикл работ, завершившийся магистерской диссертацией (1918), был посвящён, как мы уже говорили, теории интегралов, зависящих от параметра [8]. «Здесь Г. М. Фихтенгольц продолжил и в ряде направлений завершил исследования различных авторов (Осгуд, Витали, Харди, Лебег, Юнг и других), относящиеся к предельному переходу, дифференцированию и интегрированию под знаком интеграла» [5, с. 123]. Говоря о его научной (а также об общественной) деятельности мы ограничимся лишь отдельными замечаниями, необходимыми для раскрытия нашей темы, отсылая интересующегося читателя к специальной литературе. В связи с его первыми научными работами обратим внимание на то важное для биографии нашего героя обстоятельство, что, исследуя чисто математические вопросы, он никогда не упускал из вида их возможную педагогическую составляющую. Так (наблюдение С.С. Вороновского [10, с. 297]) в его первой публикации 1913 года (Математический сборник. 1913. Т. 29. С. 53–66) на с. 53 читаем: «Доказательства основных теорем (речь идёт об утверждениях разрабатываемой им теории интегралов, зависящих от параметров. —

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Вообще развитие математики в Одессе в XIX — первой трети XX вв. остаётся одним из самых малоизученных вопросов. Мы до сих пор слабо представляем себе каким образом Одесса из абсолютной математической провинции эволюционировала в крупный центр математической мысли, сыгравший важную роль в становлении Советской математической школы.

С. Д., С. П.) могут быть даны в столь простом виде, что они, на наш взгляд, заслуживают быть введёнными в курсы интегрального исчисления». (Это намерение было им впоследствии осуществлено в «Курсе дифференциального и интегрального исчисления» – об этом ниже.)

Работая в издательстве «Mathesis», Григорий Михайлович познакомился с профессором Санкт-Петербургских Высших женских (Бестужевских) курсов В. И. Шифф (1860–1919): под её редакцией и с её примечаниями в 1911–1912 годах вышли две части его перевода «Курса аналитической геометрии» О. Дзиобека. Шифф порекомендовала Фихтенгольца своему коллеге по Бестужевским курсам К. А. Поссе (1847-1928) [11, с. 324]. Известный математик (в 1916 избранный почётным членом Петербургской Академии наук) [12] Поссе выступил автором наиболее распространённых тогда в России учебников по дифференциальному и интегральному исчислению. Он и привлёк Фихтенгольца к работе над изданием русского перевода первой части курса Э. Чезаро, выпущенного издательством «Mathesis» в 1913 году: «Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Перевод с немецкого (русский перевод осуществлялся с немецкого перевода Г. Ковалевского. – С. Д., С. П.) с примечаниями и дополнениями профессора К. А. Поссе». В предисловии Поссе читаем [13, с. XI]: «В работе моей, как редактора, деятельную и весьма ценную помощь мне оказывал Г. М. Фихтенгольц. На нём лежал ответственный труд чтения последней ревизионной корректуры; кроме того, я ему обязан многими, и весьма ценными замечаниями, которыми я неоднократно пользовался, и за которые приношу ему мою глубокую благодарность». Так началось их многолетнее сотрудничество<sup>3</sup>.

В 1913 г. Фихтенгольц переехал в Санкт-Петербург, где начал работать в Императорском электротехническом институте имени Александра III, том самом, в котором в те годы работал сам Поссе. Вряд ли стоит сомневаться в том, что переезд Григория Михайловича в столицу был осуществлён при его деятельной поддержке. Вся дальнейшая его творческая жизнь связана с этим городом, в котором он вырос в известного математика и выдающегося педагога. Вот краткие сведения из его послужного списка. В 1918 году он приступил к работе в Петроградском (впоследствии Ленинградском) университете, с начала 1920-х гг. начал преподавать во 2-м педагогическом институте, позднее вошедшем в состав Педагогического института им. А. И. Герцена.

В университете он основал кафедру математического анализа, которой руководил вплоть до 1953 года, когда в ходе пресловутой кампании борьбы с космополитизмом был освобождён от заведования. Лекции Фихтенгольц читал блестяще. О его неторопливой манере, великолепно выполненных чертежах, о продуманной системе использования доски, о выделении на ней рамкой полученных формул, наиболее важные из которых удостаивались рамки с кружочками по углам, о сведениях по истории математики, сообщавшихся по ходу изложения — обо всём этом вспоминали те, кому выпала удача слушать его лекции по анализу. Но главное в этих лекциях была тщательная продуманность всего курса, над совершенствованием которого он работал всю жизнь.

Начало его собственному математическому творчеству положили начатые ещё в Одессе исследования по метрической теории функций. Как мы уже говорили, это были работы об интегралах, зависящих от параметра — цикл трудов, завершившийся в 1918 году его магистерской диссертацией. Дальнейшие его исследования о суперпозиции абсолютно непрерывных функций, о смежных вопросах теории функций действительного и комплексного переменного получили широкий отклик у отечественных (Н. К. Бари, Д. Е. Меньшов и др.) и зарубежных математиков (С. Банах, С. Сакс и др.). В 1924 году он стал одним из приглашённых докладчиков на Международном конгрессе математиков в Торонто. Важно подчеркнуть, что исследования Фихтенгольца ввели в тематику петербуржцев теорию множеств и теорию функций действительного переменного — области до тех пор в северной столице не только не

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>История их сотрудничества — тема, требующая специального исследования.

разрабатывавшиеся, но даже высокомерно третируемые, как, по выражению В. Я. Успенского, «канторовско-лебеговская дребедень». Фихтенгольц стал основателем ленинградской школы теории функций действительного (или, как предпочитали говорить питерцы, вещественного) переменного — Л. В. Канторович, И. П. Натансон и др.

С середины 30-х годов основной областью исследований Фихтенгольца стал функциональный анализ. На протяжении многих лет он вместе с Л. В. Канторовичем вёл в Ленинградском университете семинар по функциональному анализу. Среди его учеников Л. В. Канторович, И. П. Натансон, а также С. Л. Соболев, Д. К. Фаддеев, С. А. Христианович.

Когда в 1934 году в СССР был восстановлен упразднённый революцией институт учёных степеней, Фихтенгольц в 1935 году получил степень доктора физико-математических наук.

Завершая краткую научно-биографическую справку о Фихтенгольце, нельзя не упомянуть о его постоянном интересе к проблемам преподавания математики в средней и высшей школе. Так уже в 1918 году он вошёл в состав Совета экспертов при Наркомпросе РСФСР, приняв активное участие в формировании новой советской школы. В 1935—37 годах (а это был в высшей степени ответственный для советской школы период — время выхода из затянувшегося послереволюционного кризиса и выстраивания новой советской школы, обеспечившей последующий научно-технический подъём страны) он принял на себя обязанности председателя комиссии Наркомпроса по составлению школьных программ по математике. В эти же годы он вёл активную деятельность по радикальной перестройке учебных планов и программ преподавания на физико-математических факультетах педагогических институтов. В 1934 году Фихтенгольц выступил инициатором проведения Первой математической олимпиады для школьников, положившей в стране начало этому замечательному движению.

Жизненный путь Григория Михайловича Фихтенгольца завершился 26 июня 1959 года. Ему только исполнилось в ту пору 71 год. Наверняка у него ещё были немалые планы, которые он надеялся осуществить. Но одно из главных дел своей жизни — полное изложение основ математического анализа, над которым он трудился с юности — он успел закончить.

# 4. Работа Фихтенгольца над созданием курса математического анализа

### 4.1. Довоенный период

Воспитанник С. О. Шатуновского, Фихтенгольц ещё в студенческие годы оказался вовлечённым в дело создания фундаментального логически безупречного курса математического анализа. Интерес к проблемам, возникающим при таком построении укреплялся в ходе его работы в издательстве «Mathesis». Начавшееся в связи с изданием русского перевода учебника Э. Чезаро сотрудничество с Поссе продолжилось в Петербурге, где молодой одессит оказался вовлечённым в преподавание математики и, прежде всего, анализа в высшей технической школе. О том, что проблемы построения курса анализа оставались в зоне его постоянных размышлений, свидетельствует текст его первой статьи, опубликованной в 1913 году в «Математическом сборнике» – об этом мы уже говорили выше. Не будем гадать – как сложилась бы карьера Фихтенгольца, если бы не разразившиеся в 1917 г. революционные события (сильным тормозом могло оказаться его еврейское происхождение, да и то, что в питерской среде он очутился во всех отношениях чужаком), но для таких как он эпоха революции и первые послереволюционные годы оказались вполне успешными. Как мы уже говорили выше, в 20-е — 30-е годы он вырос в заметную фигуру петроградского-ленинградского научного и педагогического сообщества. Его привлекли к работе над русским переводом двухтомника Валле-Пуссена, первый том которого под редакцией В. А. Стеклова увидел свет в «Научном книгоиздательстве» в 1922 году — Валле-Пуссен Ш. Ж. Курс анализа бесконечно малых. Т. 1. Перевод Я. Д. Тамаркина и Г. М. Фихтенгольца под редакцией В. А. Стеклова. Петроград. Однако наступившие лихие годы нарушили все издательские планы. Особенно это касалось трудных в отношении набора математических текстов. Положение начало выправляться в конце 20-х годов. Второй том, переводчиком которого указан только Фихтенгольц (Тамаркин в 1924 году эмигрировал и с 1925 жил и работал в США), удалось издать лишь в 1933: Валле-Пуссен Ш. Ж. Курс анализа бесконечно малых. Т. 2. Перевод Г. М. Фихтенгольца. Ленинград.

Получивший изрядную практику в преподавании математики будущим инженерам, Фихтенгольц написал для них учебник по математическому анализу с включением в него элементов аналитической геометрии. Этот учебник вышел в свет в 1926 г. в серии «Руководства и пособия для техникумов и ВТУЗ'ов»: Фихтенгольц Г. М. Математика для техников. М.-Л.: Государственное научно-техническое издательство<sup>4</sup>. На основании этой книги, существенно её дополнив и переработав (в результате чего её объём увеличился вдвое), в 1931 году он издал первую часть «Математики для инженеров»: Фихтенгольц Г. М. Математика для инженеров. Часть 1. М.-Л.: Государственное научно-техническое издательство. А в 1932 и 1933 годах вышли соответственно 2 и 3 части. Изложение в этих книгах, предназначенных для воспитания будущих инженерно-технических работников (ИТР), лишено строгости университетских учебников. Разумеется, не надо в них искать теорию вещественного числа и строгих доказательств теорем анализа.

Вспомним, однако, о том, что уже в 1918 году Фихтенгольц приступил к работе в университете. Так что параллельно с работой в высшей технической школе он начал выстраивать собственный университетский курс математического анализа. Результатом стал первый том этого курса, появившийся в 1939 году: Фихтенгольц Г. М. Математический анализ. Ч. І. Составлено по записям лекций под редакцией доцента Г. Р. Лоренца. Л.: Изд-во ЛГУ. В предисловии читаем (с. 3): «Настоящая работа представляет обработку тех лекций, которые я на протяжении 20 лет многократно читал математикам первого курса. В основу положены записи моих лекций, сделанные студентами ІІІ курса Н. И. Фельдманом и В. П. Басовым. Большой труд по редактированию текста выполнен доцентом Г. Р. Лоренцом, которому я обязан рядом улучшений в изложении. Всем этим лицам, в особенности Г. Р. Лоренцу, я приношу свою искреннюю благодарность».

Том открывался главой, посвящённой теории вещественных чисел. Её он излагает в форме теории сечений Р. Дедекинда. Затем идут главы о теории пределов, свойствах непрерывных функций, производных и дифференциалах, об основных теоремах дифференциального исчисления, о функциях многих переменных, для которых излагается дифференциальное исчисление, о неявных функциях и о геометрических приложениях исчисления. Главы 10–12 посвящены интегральному исчислению: понятию неопределённого и определённого интеграла, приложениям интегрального исчисления к геометрии и механике. Завершает том глава по теории бесконечных рядов.

Изложение следует официальной программе первого курса дифференциального и интегрального исчисления. Случаи выхода за её пределы (рассмотрение вопроса о независимости функций в восьмой главе, посвящённой неявным функциям) оговариваются специально. Стиль изложения по существу тот же, что и в широко известном курсе, о котором речь пойдёт ниже. Многое (вплоть до обозначений) из курса 1939 года (особенно это касается примеров и их разборов) перейдёт в первый том учебника, вышедшего в 1947 году.

Второй том так и не появился: началась Великая Отечественная война. Очевидно, в годы ей предшествовавшие и в годы самой войны, находясь в эвакуации в Саратове, Фихтенгольц много размышлял над продолжением учебника. Первый том нового издания он решил цели-

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>В стране началось создание государственных издательств, способных качественно издавать научную, в частности, математическую, литературу. К ГНТИ восходит знаменитый ФИЗМАТГИЗ, впоследствии преобразованный в Главную редакцию физико-математической литературы Издательства «Наука».

ком посвятить дифференциальному исчислению, заново переписав для этого соответствующие разделы довоенного издания, существенно увеличив их в объёме. Первый том он выпустил в 1947 году. В 1948 и 1949 вышли второй и третий тома. Но об этом уже смотри далее.

### 4.2. Послевоенный период

Итак первый том, посвящённый дифференциальному исчислению, увидел свет в 1947 году. Его открывает теория вещественных чисел в форме теории сечений Р. Дедекинда, за ней следуют теория пределов и дифференциальное исчисление для функций сначала одной, а затем многих переменных, приёмы исследования функций с помощью производных. Походя читателя знакомят с теорией интерполирования. Следом даются геометрические приложения дифференциального исчисления, которые по существу могут служить введением в дифференциальную геометрию.

Изложение отличает систематичность и строгость, а также ясность и простота. Оно сопровождается подробным разбором многочисленных примеров и решением специально подобранных задач, помогающим понять излагаемый теоретический материал.

Так, например, в п. 293 приводится решение задачи: «Пусть электрическая лампочка может передвигаться (например, на блоке) по вертикальной прямой ОВ. На каком расстоянии от горизонтальной плоскости ОА её следует поместить, чтобы в точке А этой плоскости получить наибольшую освещённость?»

В п. 201 решается задача: «Среди всех вписанных в данный круг треугольников найти тот, площадь которого наибольшая». А в п. 239 ищется огибающая семейства парабол  $y=a^2$   $(x-a)^2$ .

Большое место при этом отводится задачам, решение которых требует проведения значительных аналитических выкладок и доведения решения «до числа». Так как – замечает автор – «точное» или в «конечном виде» решение задач математического анализа возможно лишь в редких (притом, как правило, простейших) случаях – то он старается дать читателю представление о приближённых методах решения и приближённых их решениях. Так, например, в п. 158 он решает задачу нахождения трёх действительных корней уравнения  $2x^3 - x^2 - 7x + 5 = 0$  с точностью до 0,001.

Книга по жанру примыкает скорее к французским traitйs по дифференциальному и интегральному исчислению. Однако, созданная в иной традиции и предназначенная прежде всего для нужд тогдашней советской высшей школы, она по своему характеру во многом от них отличается.

Одной из целей, которые ставил перед собой автор, было дать по возможности полное изложение основных вопросов исчисления в их взаимосвязях с другими разделами математики, а также с различными приложениями. Так в приводимых примерах рассматриваются контактные преобразования (п. 218, 222), метод наименьших квадратов (п. 201), задачи интерполяции (п. 128–130), неравенства Коши, Гёльдера, Минковского, Иенсена (п. 133, 144). При этом излагаемый материал погружался в исторический контекст. Это достигалось делаемыми автором по ходу изложения замечаниями. Например, сформулировав в п. 111 теорему Ролля, автор замечает: «В действительности Ролль высказал это утверждение лишь для многочленов». Или, сформулировав в п. 109 теорему Ферма, он тут же оговаривается: «Это утверждение, разумеется, воспроизводит лишь сущность того приёма, который применял Ферма для разыскания наибольших и наименьших значений функции (Ферма не располагал понятием производной)». Введя в п. 202 понятие якобиана, автор замечает: «Этот определитель называется обычно функциональным определителем Якоби или якобианом системы (1) — по имени немецкого математика Якоби (С. G. J. Jacobi), впервые изучившего его свойства и применения». И тут же добавляет: «В науку якобианы были введены одновременно с Якоби М. В. Остроградским». Подобный исторический крен становился в СССР в 30-е — 40-е годы непременной чертой подачи учебного материала. Впрочем, особую роль исторический контекст развития математических идей приобрёл у Фихтенгольца в том варианте, который писался как учебник по курсу анализа для студентов – о нём речь пойдёт далее.

Второй том, посвящённый интегральному исчислению, открывается изложением теории неопределённого интеграла и параграфами, знакомящими с техникой интегрирования. В отдельном разделе рассматриваются эллиптические интегралы и задачи к ним приводящие. Чтобы не прерывать линию изложения, затрагивающую преимущественно классы интегралов, берущихся в конечном виде, рассмотрение эйлеровых интегралов 1-го и 2-го рода, представляющих Бета-функцию и Гамма-функцию, вынесено в конец тома. Далее издагаются теория определённого интеграла, её приложения к выводу формулы Валлиса, к доказательству трансцендентности числа е и др., а также к геометрии (вычисление длины дуги кривой, площади плоской фигуры и поверхности, объёма тела), механике и физике (нахождение статических моментов, центра тяжести и др.), наконец, методы приближённого вычисления определённых интегралов. В отдельном параграфе даётся набросок введения в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. Затем автор переходит к изложению теории рядов – числовых и функциональных (особо отметим разделы, посвящённые расходящимся рядам, а также обвёртывающим и асимптотическим рядам). После этого идут две главы о несобственных интегралах и интегралах, зависящих от параметра. Последние составляли сюжет его первых исследований, начатых ещё в Одессе и завершённых его диссертацией 1918 г. (о чём мы неоднократно упоминали).

Третий том открывает глава, посвящённая криволинейным интегралам и интегралу Стильтьеса. Следующие главы — «Двойные интегралы», «Площадь поверхности. Поверхностные интегралы», «Тройные и многократные интегралы». Последняя глава включает в себя введение в векторный анализ. Далее излагается теория рядов и интеграла Фурье, а также их приложения к различным вопросам механики и физики — выражение эксцентрической аномалии планеты через её среднюю аномалию (п. 720), теория колебания струны (п. 721), решение задачи распространения тепла в конечном и бесконечном стержне (п. 722–724), задача распространения тепла в круглой пластине (п. 725), применение гармонического анализа к практическим вопросам машиноведения, электротехники и др. (п. 726).

В заключение тома Фихтенгольц, отталкиваясь от идей своего учителя С. О. Шатуновского, предлагает свой подход для выработки общей теории предела, охватывающей все имеющиеся в анализе виды предела.

Курс Фихтенгольца даёт не только развёрнутое и в принципиальных моментах детализированное изложение основных идей дифференциального и интегрального исчисления, но и вводит читателя в обширный круг вопросов и даже теорий, для которых это исчисление служит, с одной стороны, основанием для разработки его важнейших концепций, с другой, широким полем самых разнообразных приложений. При этом курс строится таким образом, что эти отступления могут служить теоретическим введением в соответствующий вопрос или даже в теорию, например, в область дифференциальных уравнений, обыкновенных и с частными производными. Например, параграф, в котором сообщается о расходящихся рядах, является превосходным введением в теорию расходящихся рядов.

Вот уже более половины столетия трёхтомник, выдержавший многочисленные переиздания, занимает почётное место на книжных полках математиков — к нему прибегают, чтобы в тонкостях понять те или иные разделы анализа или просто освежить их в памяти, а зачастую и войти в тот или иной вопрос, до поры остававшийся на периферии их интересов.

Для первого знакомства с анализом курс не предназначен — для этого он слишком перегружен материалом и разнообразными подробностями. Для этой цели Фихтенгольц подготовил специальный учебник, ориентированный на университетскую программу — двухтомные «Основы математического анализа».

### 5. Основы математического анализа

«"Основы математического анализа" задуманы, как нам сообщает автор в предисловии, как учебник анализа для первого и второго курса математических отделений университетов; в соответствии с этим и книга делится на два тома. При составлении её был широко использован мой трёхтомный «Курс дифференциального и интегрального исчисления», но содержащийся в нём материал подвергся сокращению и переработке в целях приближения книги к официальной программе по математическому анализу …». Главную свою задачу он видел «в систематическом и — по возможности — строгом изложении основ математического анализа».

В соответствии с этим автор начинал первый том с теории действительного числа, хотя и предупреждал, что сам он, по соображениям педагогическим, обычно отодвигал это изложение (равно как и изложение некоторых других сложных для начинающих тем) на более позднее время. Далее он переходил к понятию функции и к сведениям о важнейших их классах — об элементарных функциях, обратных тригонометрических, о суперпозиции функций. Затем следует изложение теории пределов, вопросов о непрерывности и разрывах функции, о свойствах непрерывных функций, дифференцировании функций одной переменной, об основных теоремах дифференциального исчисления (теоремы Ферма и Ролля, формула Тейлора и др.) и исследовании функций с помощью производных. Далее он переходит к изложению соответствующих вопросов для функций многих переменных. Следом автор даёт понятие неопределённого интеграла и знакомит с техникой интегрирования. С целью разрушения «вредной иллюзии, воспитываемой решением одних лишь простых задач, будто результаты аналитических выкладок непременно должны быть "элементарными", автор коротко знакомит читателя с эллиптическими интегралами и даже приводит встречающиеся на практике задачи, приводящие к таким интегралам. Далее следует раздел, посвящённый понятию определённого интеграла. Большое внимание уделено приближённому вычислению интегралов, геометрическим и механическим приложениям интегрального исчисления, а также некоторым геометрическим приложениям дифференциального исчисления (касательные к кривым и касательные плоскости, кривизна плоской кривой).

Второй том открывает теория рядов — числовых и функциональных. Далее следуют несобственные интегралы, интегралы, зависящие от параметра, главы, посвящённые неявным функциям и функциональным определителям, криволинейным интегралам, двойным интегралам, вычислению площади поверхности и поверхностным интегралам, тройным и многократным интегралам, теории поля, наконец рядам и интегралам Фурье.

Учебник не предлагает упражнений, выполнение которых должно помочь читателю проверить уровень освоения им пройденного материала (предполагается, что для этой цели в русской учебной литературе имеются специальные сборники задач), но сопровождается многочисленными детально разобранными примерами, позволяющими помочь ему в уяснении теоретического материала и подготовить его «к сознательной работе над упражнениями». Для того, чтобы привить читателю мысль о широких связях математического анализа с другими математическими дисциплинами и с многообразными потребностями практики, разбираются многочисленные примеры применения анализа в геометрии, механике, физике и технике.

Что следует подчеркнуть особо, это погружение излагаемого материала в исторический контекст. Изложение постоянно сопровождается замечаниями исторического характера. Так появление в тексте каждого нового имени (например, И. Ньютона, М. Ролля или Г. Ф. Лопиталя) сопровождается краткой исторической справкой, ряд параграфов посвящён истории понятий, методов и теорий — понятия функции (п. 21), понятия предела функции (п. 26), вопроса о перестановке двух предельных операций (п. 313), о замене переменных в двойном (п. 359) и тройном интеграле (п. 387), истории тригонометрических рядов (п. 419–425). Глава 14 (п. 217–233) представляет собой очерк возникновения основных идей математического анализа, а заключает второй том «Очерк дальнейшего развития математического анализа»,

в котором буквально пунктиром намечаются основные пути истории теории дифференциальных уравнений — обыкновенных и с частными производными (с. 436–437), вариационного исчисления (с. 438–440), теории функций комплексного переменного (с. 441–443), теории интегральных уравнений (с. 444–446), теории функций действительного переменного (с. 447–449), функционального анализа (с. 450–455).

## 6. История математики в учебниках Фихтенгольца

Исторические справки и даже целые исторический разделы, сопровождающие у Фихтенгольца изложение математического анализа, чрезвычайно информативны. Они свидетельствуют о превосходном знании автором современной историко-математической литературы. В то же самое время они отражают общую для всей советской учебной литературы тенденцию рассматривать предлагаемый учащемуся материал в широком историческом контексте. Это отличает и педагогические установки В. И. Смирнова, П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова, Б. В. Гнеденко — мы назвали лишь несколько имён известных математиков, внесших крупный вклад в изучение её истории. Полноценное познание математической теории, с доминировавшей в советской традиции точки зрения, невозможно без представления о её истории. Студент должен иметь представление о том какой зачастую сложный и противоречивый путь прошла мысль, прежде чем излагаемая теория приняла современный вид, о том, что математика, как всё на свете, живёт в истории. Что вчера она была совсем не той, что сегодня, и завтра она может принять совершенно иное обличье. Творческий математик должен стараться видеть место того, чем он сегодня занимается, в потоке истории, то есть сознательно переживать настоящее. Готовя 5-е издание своего классического учебника «Курс дифференциальных уравнений» (1950), В. В. Степанов (1889–1950) посчитал необходимым включить в него исторический очерк, для чего обратился к А. П. Юшкевичу, который исполнил его просьбу: все последующие издания книги выходили уже с этим очерком. Краткий исторический очерк, исправлявшийся и дополнявшийся в каждом издании пока был жив автор, сопровождает каждое издание «Курса теории вероятностей» (1-е издание 1950, 8-е — 2005) Б. В. Гнеденко (1912–1995).

В этой традиции писал свои учебники и  $\Phi$ ихтенгольц, обнаруживший несомненное дарование историка<sup>5</sup>.

# 7. Учебники Г. М. Фихтенгольца в советской образовательной традиции

Начиная с 30-х годов, создание корпуса учебной литературы по математике (от школьных учебников до университетских курсов по различным математическим дисциплинам), учитывающей и своеобразие математической подготовки в стране и цели развития её научнотехнического потенциала, стало одной из насущных проблем, стоявших перед математическим сообществом. Формировавшаяся в 30-е годы Советская математическая школа требовала для своего успешного функционирования привлечения всё новых и новых молодых исследователей, которым было необходимо дать соответствующее образование. Для этого были необходимы обширные, продуманные, согласованные в своих главных частях образовательные программы, оснащённые хорошей, отвечающей современному уровню учебной литературой. Именно такую литературу начали создавать в 30-50-е годы советские математики. Одной из

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Свидетельством этому может служить и его историко-математическая статья: О преобразовании переменных в кратных интегралах // Историко-математические исследования. 1952. Вып. 5. С. 241–268. В ней даётся мастерский сравнительный анализ работ по этому вопросу Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, К. Якоби и Э. Каталана и в их контексте выявляется вклад в эту тематику М. В. Остроградского.

вершин этого процесса и стали учебники по анализу Г. М. Фихтенгольца — рассмотренные нами трехтомный трактат по дифференциальному и интегральному исчислению и двухтомный учебник по основаниям математического анализа<sup>6</sup>.

Учебники Фихтенгольца стали ориентирами, которые задавал планку уровню преподавания математического анализа в советской высшей школе. Конечно, использовались и другие руководства, лекторы в различных университетах читали свои оригинальные курсы, однако указанные книги служили образцами и для их авторов и студентов. В качестве примера сошлёмся на студенческий опыт одного из авторов настоящей заметки, в прошлом студента, а ныне преподавателя механико-математического факультета Московского университета. Читал ему анализ великолепный мастер профессор Н. В. Ефимов (1910–1982). Это был двухгодичный выверенный во всех деталях курс, который его автор читал уже многие десятилетия. Тем не менее в качестве учебника, к которому следовало обращаться студентам в случае возникавших вопросов, он рекомендовал книги Фихтенгольца. Так что книги Фихтенгольца стали настольными для автора, как и для многих его современников. В пору студенчества он пользовался ими в тех случаях, когда не понимал чего-нибудь в лекциях Ефимова, позднее при подготовке собственных лекций или когда хотел расширить свои познания в вопросах, опускаемых обыкновенно при чтении лекций студентам.

Конечно, стандарты изложения математического анализа со времён Фихтенгольца сильно изменились. Сегодня в русской высшей школе в ходу другие учебники: в качестве примера назовём двухтомник В. А. Зорича (1981–1984; 6-е издание 2012б), курс В. А. Ильина, В. А. Садовничего и Бл. Х. Сендова (3-е издание, 2006 г.), лекции Г. И. Архипова, В. А. Садовничего и В. Н. Чубарикова (1999) — этот список можно продолжать и продолжать 7. Однако, курсы Фихтенгольца, на которых было воспитано несколько поколений советских учёных, а также учёных восточной Европы и Китая<sup>8</sup>, остаются в ходу и по сию пору — не зря же их с таким упорство продолжают переиздавать современные коммерческие издательства.

#### 8. Заключение

Трёхтомный «Курс дифференциального и интегрального исчисления» и написанные на его основе двухтомные «Основы математического анализа» Г. М. Фихтенгольца вобрали в себя многолетний опыт преподавания исчисления в российской высшей школе, воплощённый в курсах К. А. Поссе, С. О. Шатуновского, В. А. Стеклова, В. И. Смирнова. Эти книги стали одним из наиболее ярких достижений Советской математической школы. Их автор, сам будучи замечательным математиком, дал образцовое изложение математического анализа,

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>К подобным сочинениям были необходимы сборники задач. В советской литературе их было создано немало. Лучшим среди них стал «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», составленный профессором Московского университета Б. П. Демидовичем (1906–1977). Первое его издание увидело свет в 1952 г. С той поры он многократно дополнялся и переиздавался (19-е издание выло в 2017 году), в том числе в переводах на разные языки (включая китайский).

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Тем более, что наша выборка сделана исключительно с точки зрения московского наблюдателя. К тому же мы вовсе выпустили из вида учебную литературу по анализу, подготовленную для студентов не чисто математических специальностей, например, для будущих физиков, для которых была создана обширная библиотека руководств, включавшая замечательные учебники С. М. Никольского, Л. Д. Кудрявцева и др.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Трёхтомный «Курс дифференциального и интегрального исчисления» и написанные на их основе двухтомные «Основы математического анализа» Фихтенгольца выдержали многочисленые переиздания, одно перечисление которых составляет для нас трудно решаемую проблему. Из обыкновенного поиска в Интернете удалось установить, что ещё в 2003 году в издательстве Физматлит вышло 8-е издание «Курса», а последнее издание в издательстве Лань помечено 2019 годом. В 2019 году в издательстве Лань вышло 11-е издание «Основ математического анализа». Эти книги были переведены на основные европейские и китайский языки. Английский перевод «The Fundamentals of Mathematical Analysis», впервые изданный в 1965 году Pergamon Press в серии International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics (vol. 72/73), выдержал несколько переизданий.

сложившегося к 40-м годам XX столетия, своего рода «Начала», ставшие вратами в великое сооружение математической мысли XVII–XX столетий. Он предложил такое его изложение, которое в развёрнутой версии может служить настольной книгой работающего математика, а в сокращённой — учебным руководством для студента, ещё только приступающего к его изучению. Предисловие к первому тому «Основ...» Фихтенгольц завершил так: «Эта книга подытоживает мой многолетий опыт преподавания математического анализа в Ленинградском университете. Да будет она полезна советской молодёжи!» Эти слова, адресованные современникам, обращены и к нам — все мы, читая его книги, приобщаемся к кругу учеников и коллег выдающегося математика и великого педагога Григория Михайловича Фихтенгольца. 9

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Два письма Н. Н. Лузина М. Я. Выгодскому (публикация и примечания В. А. Волкова и С. С. Демидова) // Историко-математические исследов. 2-я серия, 1997. Вып. 2(37). С. 133–152.
- 2. Смирнов В. И., Канторович Л. В., Натансон И. П. Григорий Михайлович Фихтенгольц (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи матем. наук, 1948. Т. 3. Вып. 5. С. 179–181.
- 3. Смирнов В. И., Канторович Л. В., Натансон И. П. Григорий Михайлович Фихтенгольц (к шестидесятилетию со дня рождения) // Вестник ЛГУ. 1948. № 6. С. 133–135.
- 4. Канторович Л. В., Натансон И. П. Григорий Михайлович Фихтенгольц (к семидесятилетию со дня рождения) // Вестник ЛГУ. 1958. № 7. С. 5–13.
- 5. Канторович Л. В., Натансон И. П. Григорий Михайлович Фихтенгольц (некролог) // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14. № 5. С. 123–128.
- Александров А. Д., Акилов Г. П. и др. Григорий Михайлович Фихтенгольц (некролог) // Вестник ЛГУ. 1959. Вып. 4. № 19. С. 158–159.
- 7. Виноградов С. А., Владимиров Д. А. и др. Григорий Михайлович Фихтенгольц (к столетию со дня рождения) // Вестник ЛГУ. 1988. Вып. 3. № 15. С. 3–6.
- 8. Богачёв В. И. О работах Г. М. Фихтенгольца по теории интеграла // Историкоматематические исследов. Сер. 2. 2005. Вып. 9 (44). С. 252–264.
- 9. Чеботарёв Н. Г. Самуил Осипович Шатуновский // Успехи матем. наук. 1940. Вып. VII. С. 316–321.
- 10. Вороновский С. С. К научной биографии Г. М. Фихтенгольца // Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова. Годичная научная конференция. 2010. М.: Янус-К, 2011. С. 297–299.
- 11. Вороновский С. С. Эволюция курса математического анализа К. А. Поссе // Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова. Годичная научная конференция. 2011. М.: Янус-К, 2011. С. 322–324.
- 12. Сергеев А. А. К. А. Константин Александрович Поссе (1847–1928). М.: Наука, 1997.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Завершая очерк, хотим заметить, что в обширный круг учеников Г. М. Фихтенгольца попал и талантливый прозаик И. Грекова. Под таким псевдонимом выступила известный математик Е. С. Вентцель (1907–2002), оставившая нам замечательные воспоминания о Ленинградском университете 20-ых годов и своём профессоре Г. М. Фихтенгольце [15], к которым мы с удовольствием отсылаем наших читателей, желающих соприкоснуться с личностью этого удивительного человека и погрузиться в окружавшую его атмосферу.

- 13. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых с многочисленными примерами для упражнения. Часть 1. Перевод с немецкого с примечаниями и дополнениями профессора К. А. Поссе. Одесса: Mathesis, 1913.
- 14. Ермолаева Н. С. Новые материалы к биографии Н. Н. Лузина // Историко-матем. исследования. 1989. Вып. 31. С. 191–203.
- 15. Грекова И. Ленинградский университет в 20-х годах (эссе) / Е. С. Вентцель И. Грекова. К 100-летию со дня рождения. Составители Р. П. Вентцель, Г. И. Эпштейн. М.: Юность, 2007. С. 18–37.

#### REFERENCES

- 1. Volkov V.A., Demidov S.S. 1997, "Two letters of N. N. Luzin to M. Ya. Vygodsky", Istoriko-matematicheskie issledovaniya, 2-series, vol. 2(37), pp. 133-152.
- 2. Smirnov V. I., Kantorovich L. V., Natanson I. P. 1948, "Grigory Mikhailovich Fichtenholz (to the sixtieth anniversary of the birth)", Russian mathematical surveys, Vol. 3, issue. 5, pp. 179-181.
- 3. Smirnov V. I., Kantorovich L. V., Natanson I. P. 1948, "Grigory Mikhailovich Fichtenholz (to the sixtieth anniversary of his birth)". Vestnik LSU, no. 6, pp. 133-135.
- 4. Kantorovich L. V., Natanson I. P. 1958, "Grigory Mikhailovich Fichtenholz (to the seventieth anniversary from birthday)". Vestnik LSU, no. 7, pp. 5-13.
- 5. Kantorovich L. V., Natanson I. P. 1959, "Grigory Mikhailovich Fichtenholz (obituary)", Russian mathematical surveys, vol. 14, no. 5, pp. 123-128.
- Alexandrov A.D., Akilov G. P. 1959, "Grigory Mikhailovich Fichtenholz (obituary)", Vestnik LSU, issue. 4, no. 19, pp. 158-159.
- 7. Vinogradov S. A., Vladimirov D. A. 1988, "Grigory Mikhailovich Fichtenholz (to the centenary of birth)", Vestnik LSU, issue. 3, no. 15, pp. 3-6.
- 8. Bogachev V. I. 2005, "About the works of G. M. Fichtenholz on the theory of the integral", Istoriko-matematicheskie issledovaniya, ser. 2, vol. 9 (44), pp. 252-264.
- 9. Chebotarev N. G. 1940, "Samuil Osipovich Shatunovskii", Russian mathematical surveys, issue.VII, pp. 316-321.
- 10. Voronovsky S. S. 2011, "To the scientific biography of G. M. Fichtenholz". Annual Conference of the Institute of Natural History and Technology. S.I. Vavilova 2010, Janus-K, Moscow, pp. 297-299.
- 11. Voronovsky S. S. 2011, "Evolution of the course of mathematical analysis K. A. Posse". Annual Conference of the Institute of Natural History and Technology. S.I. Vavilova 2010, Janus-K, Moscow, pp. 322-324.
- 12. Sergeyev A. A. 1997, "Konstantin Alexandrovich Posse (1847-1928)", Nauka, Moscow.
- 13. Cesaro E. 1913, "Elementary tutorial of algebraic analysis and calculus of infinitesimal with numerous examples for exercise", part I, Translation from German with notes and additions by Professor K. A. Posse, Mathesis, Odessa.

- 14. Ermolaeva N. S. 1989, "New materials to the biography of N. N. Luzin", Istoriko-matematicheskie issledovaniya, issue. 31, pp. 191-203.
- 15. Grekova I., Wentzel R. P., Epstein H. I. 2007, "Leningrad University in the 20s (essay)", E. S. Wentzel I. Grekova. To the centenary of birth, Yunost, Moscow, pp. 18-37.

Получено 3.10.2019 г.

Принято в печать 12.11.2019 г.