

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-430-436

Роль математики в развитии механики композиционных материалов¹

И. К. Архипов, В. И. Абрамова, А. Е. Гвоздев, Д. В. Малий

Архипов Игорь Константинович — доктор технических наук, профессор, Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Тульский филиал (г. Тула).

e-mail: iarh@list.ru

Абрамова Влада Игоревна — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: abramova_vi@mail.ru

Гвоздев Александр Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Малий Дмитрий Владимирович — старший преподаватель кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: maliydmitriy@yandex.ru

Аннотация

В работе изложен краткий обзор по истории развития новых разделов математики и их влияние на теоретические исследования механики композиционных материалов. Показан вклад российских и советских математиков и механиков, позволивший создать функциональную основу для изучения механических свойств композитов — новых материалов, получивших широкое применение в технике и народном хозяйстве. Композитные материалы были созданы во второй половине XX века. Они представляют собой многокомпонентные структуры, составленные из различных однородных материалов. Наиболее распространенными являются двухкомпонентные структуры из матрицы и наполнителя. Технологически эти компоненты могут составлять детерминированные или случайные структуры. Изменяя структуру и свойства компонентов, можно получать материалы с заранее заданными макроскопическими свойствами (эффективные свойства), необходимыми для конкретного применения. Появление композитных материалов вызвало бурный рост исследований механических свойств, позволяющих проектировать эти материалы. Эти исследования велись как в теоретическом, так и в практическом плане. Теоретические исследования, сводились в основном, к построению математических моделей механического поведения композитов, как структурно-неоднородных материалов.

Ключевые слова: история развития, новые разделы математики, механика композиционных материалов.

Библиография: 18 названий.

¹Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программы «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271).

Для цитирования:

И. К. Архипов, В. И. Абрамова, А. Е. Гвоздев, Д. В. Малий. Роль математики в развитии механики композиционных материалов // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 430–436.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-430-436

The role of mathematics in the development of composite materials mechanics²

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, A. E. Gvozdev, D. V. Maliy

Arkhipov Igor Konstantinovich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Plekhanov Russian University of Economics (Tula).

e-mail: iarh@list.ru

Abramova Vlada Igorevna — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: abramova_vi@mail.ru

Gvozdev Aleksander Evgenievich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief researcher of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: gvozdev.alexandr2013@yandex.ru

Maliy Dmitry Vladimirovich — Senior Lecturer of the Chair of Technology and Service, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: maliydmityriy@yandex.ru

Abstract

The paper presents a brief overview of the history of new branches of mathematics and their impact on theoretical studies of mechanics of composite materials. The contribution of Russian and Soviet mathematicians and mechanics is shown, which allowed to create a functional basis for the study of mechanical properties of composites — new materials that have been widely used in engineering and the national economy. Composite materials were created in the second half of the twentieth century. They are multicomponent structures composed of various homogeneous materials. The most common are two-component structures of matrix and filler. Technologically, these components can constitute deterministic or random structures. By changing the structure and properties of the components, it is possible to obtain materials with predetermined macroscopic properties (effective properties) necessary for a particular application. The emergence of composite materials has caused a rapid growth of research on mechanical properties, allowing the design of these materials. These studies were conducted in both theoretical and practical terms. Theoretical studies were mainly reduced to the construction of mathematical models of the mechanical behavior of composites as structurally inhomogeneous materials.

Keywords: history of development, new branches of mathematics, composite materials mechanics.

Bibliography: 18 titles.

²The work was carried out within the framework of the Federal Program "Research and development in priority areas of development of the scientific and technological complex of Russia for 2014–2020" (unique identifier of the project RFMEFI57717X0271).

For citation:

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, A. E. Gvozdev, D. V. Maliy, 2019, "The role of mathematics in the development of composite materials mechanics", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 430–436.

1. Введение

Композиционные материалы по своему строению разделяются на две большие группы: 1. Композиты с регулярной (детерминированной) структурой. 2. Композиты со случайной (случайно-неоднородной) структурой. Композиты с детерминированными структурами изучались с помощью традиционных методов механики деформированного твердого тела. Для этого выбирался так называемый представительный объём, характеризующий макроскопические свойства всего композита. Напряжённо-деформированное состояние (НДС) в этом объёме определялось путём решения соответствующей краевой задачи теории упругости или пластичности. Широкое применение нашли также численные методы, в частности, методы конечных элементов. НДС в макроскопическом объёме находилось путём соответствующего осреднения результатов расчёта в представительном объёме.

2. Развитие механики композиционных структурно-неоднородных стохастических материалов

Более сложной является проблема изучения напряжённо-деформированного состояния в композитах со случайными распределениями компонентов. Здесь методы механики деформированного твердого тела могут применяться лишь частично. Задача осложняется фактором случайности распределения компонентов. Математическая модель должна учитывать этот фактор, который приводит к случайности распределения механических свойств в микрообъёмах композита, а также распределению полей напряжений и деформаций вокруг включений или волокон композита.

Для построения математических моделей потребовались фундаментальные результаты новых разделов математики. Такими разделами являются теория случайных процессов и полей, теория восстановления, теория надёжности, математическая статистика, некоторые разделы теории вероятности.

Значительные результаты в этих разделах получены русскими и советскими математиками А. А. Марковым, Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоровым, Е. С. Вентцель, Ю. В. Линником, А. П. Хусу, А. М. Ягломом и другими. Так А. А. Марков 1907 году дал понятие марковского случайного процесса, частным случаем которого было понятие марковской цепи. Обобщение марковских процессов на непрерывное время было сделано А. Н. Колмогоровым. Дифференциальные уравнения А. Н. Колмогорова были успешно применены в теории массового обслуживания. Дальнейшее развитие это направление получило в работах Б. В. Гнеденко. Значительный вклад в теорию вероятностей и математическую статистику был сделан Ю. В. Линником, который доказал предельные теоремы для независимых случайных величин и неоднородных цепей Маркова, а также опубликовал работы по теории метода наименьших квадратов. Наиболее полное изложение теории случайных процессов и полей с практическими приложениями было сделано в работах Е. С. Вентцель. Многие из этих приложений были использованы механиками при построении математических моделей структурно-неоднородных композитов со случайным распределением компонентов. Работы А. П. Хусу по теории функционалов, заданных на случайных процессах и полях, легли в основу построения моделей упругопластического деформирования композитов со случайными свойствами, в частности, на основании этой теории удалось найти концентрацию микропластических зон в композитах различной структуры.

Развитие механики композиционных структурно-неоднородных стохастических материалов с использованием работ русских и советских математиков велось в нескольких важнейших направлениях: 1. Статистические характеристики напряженного и деформированного состояния сред со случайными неоднородностями. 2. Эффективные характеристики упругости, вязко-упругости и пластичности со случайными свойствами компонентов. 3. Прочность и разрушение композиционных материалов.

В монографии В. А. Ломакина [1] применены статистические методы в механике деформируемых твердых тел, основанные на использовании методов теории случайных функций и полей. Большое внимание уделено имеющим принципиальное значение задачам о деформации тел со случайными неоднородностями. В частности рассмотрена плоская задача теории упругости стохастически неоднородных тел. Исследовано влияние структурной неоднородности на механические свойства композитов.

В монографии [2] и многочисленных статьях В. В. Болотина разработаны и исследованы стохастические модели разрушения композитов различной структуры. При этом использована, разработанная автором, статистическая теория накопления повреждений в композиционных материалах и масштабный эффект надежности. В. В. Болотиным и В. Н. Москаленко разработана также оригинальная модель расчета макроскопических постоянных сильно изотропных композиционных материалов [3].

В монографии Т. Д. Шермергора [4] рассмотрены вопросы вычисления эффективных модулей упругости, коэффициентов теплового расширения поликристаллов и композитов, произведен расчет упругих полей в микронеоднородных материалах при их деформировании, распространение упругих волн в таких средах, вязкоупругие свойства композитов. Основной упор сделан на теорию случайных функций и полей.

В статьях Л. П. Хорошуна [5], [6] на основании обобщений моделей теории вероятности разработан оригинальный метод условных моментов, позволяющий учитывать реальное структурное распределение компонентов и его влияние на напряженно-деформированного состояния в микронеоднородных средах и в волокнистых композитах.

В монографии Г. П. Черепанова [7], посвященной механике разрушения композиционных материалов, рассмотрены механизмы и закономерности разрушения различных типов композитов. Разработана, основанная на методах теории функций комплексного переменного, теория инвариантных Г-интегралов, позволяющая создать асимптотическую теорию армирования упругих тел. Проведено оптимальное проектирование некоторых композиционных материалов на основе линейной механики разрушения.

В монографии В. П. Тамужа, В. С. Куксенко [8] рассмотрена микромеханика разрушения полимерных материалов, изложена методика диагностирования и математическое описание дисперсных повреждений, возникающих при нагружении полимерных и композиционных материалов, разработана статистическая модель разрушения и распространения трещин, построена теория разрушения при сложном напряженном состоянии и сложном нагружении. Рассмотрено усталостное нагружение с учетом накопления микродефектов в композитах.

Приведенный перечень работ советских ученых-механиков, использовавших результаты новых разделов математики в механике композитов, далеко не исчерпывает все достижения в этой области. Применение этих результатов в последующие годы привело к значительному технологическому прорыву в производстве и оптимальном проектировании композиционных материалов.

В последнее время в связи с развитием компьютерных технологий расширились возможности исследования структурных распределений компонентов в композитах. Для этого используются методы конечных элементов в сочетании с различными пакетами прикладных программ (в частности АНЗИС). При этом используется генератор случайных чисел совместно с методом Монте-Карло. Полученные реализации структур испытываются с целью определения

напряженно-деформированного состояния в композите. Единственным недостатком этого метода является большой потребный объем памяти компьютера. Заметим, что основой этого метода, как и в других ранее изложенных методах, является теория случайных процессов и полей и математическая статистика.

Данный материал может быть использован для создания ресурсосберегающих технологий обработки конструкционных и инструментальных материалов, слитковых, порошковых и наноструктурных металлических систем [9–18].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломаким В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 138 с.
2. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1971. 255 с.
3. Болотин В. В., Москаленко В. Н. К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композиционных материалов // Изв. АН СССР, МТТ. 1969. № 3. 108 с.
4. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
5. Хорошун Л. П. Уточненные модели деформирования композитов // Механика композитных материалов. 1984. № 5. С. 798–804.
6. Хорошун Л. П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред // Прикладная механика. 1978. Т. 14. № 2. С. 3–17.
7. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 295 с.
8. Тамуж В. П., Куксенко В. С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978. 294 с.
9. Макаров Э. С., Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Сергеев А. Н., Минаев И. В., Бреки А. Д., Малий Д. В. Применение теории пластичности дилатирующих сред к процессам уплотнения порошков металлических систем // Чебышевский сборник. 2017; 18(4):268–284. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-268-284>
10. Макаров Э. С., Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Сапожников С. В., Сергеев А. Н., Колмаков А. Г., Бреки А. Д., Малий Д. В., Добровольский Н. Н. Анализ уравнений теории пластичности порошковых металлических систем // Чебышевский сборник. 2018; 19(1):152–166. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166>
11. Журавлев Г. М., Гвоздев А. Е., Колмаков А. Г., Сергеев А. Н., Малий Д. В. Применение математического метода локальных вариаций для решения задач пластического формоизменения металлических, порошковых и нанокomпозиционных материалов // Чебышевский сборник. 2018; 19(4):43–54. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-4-43-54>
12. Gvozdev A. E., Bogolyubova D. N., Sergeev N. N., Kolmakov A. G., Provotorov D. A., Tikhonova I. V. Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation // Inorganic Materials: Applied Research. 2015. Т. 6. № 1. С. 32–40.
13. Гвоздев А. Е., Журавлев Г. М., Кузовлева О. В. Основы формирования состояния высокой деформационной способности металлических систем: монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2018. 382 с.

14. Beran M. *Statistical Continuum Theories*. Inter. Publ. New York. 1968.
15. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*. 13, № 4, 1968.
16. Kröner E. *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Berlin, Springer-Verlag, 1958.
17. Kröner E. Elastostatik statistisch aufgebauter Körper. *ZAMM*. 55, № 4, 1975.
18. Yeh R. H. T. Variational principles for linear anisotropic composites. *Physics*. 58, 419, 1972

REFERENCES

1. Lomakin, V. A. (1970), Statistical problems in mechanics of deformable bodies [Statisticheskie zadachi mekhaniki tverdyh deformiruemyykh tel], Nauka, Moscow, 138 p.
2. Bolotin, V. V. (1971), Application of methods of probability theory and reliability theory in construction calculations [Primenenie metodov teorii veroyatnostej i teorii nadezhnosti v raschetah sooruzhenij], Stroizdat, Moscow, 255 p.
3. Bolotin, V. V., Moskalenko, V. N. (1969), On the calculation of macroscopic constants of strongly isotropic composite materials [Primenenie metodov teorii veroyatnostej i teorii nadezhnosti v raschetah sooruzhenij], *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, No. 3, 108 p.
4. Shermergor, T. D. (1977), Theory of elasticity of micro-homogeneous media [Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred], Nauka, Moscow, 399 p.
5. Khoroshun, L. P. (1984), Refined models of deformation of composites [Utochnennyye modeli deformirovaniya kompozitov], *Mechanics of composite materials*, No. 5, pp. 798–804.
6. Khoroshun, L. P. (1978), Methods of the theory of random functions in problems of macroscopic properties of micro-homogeneous media [Metody teorii sluchajnykh funktsij v zadachah o makroskopicheskikh svoystvakh mikroneodnorodnykh sred], *Applied mechanics*, vol. 14, No. 2, pp. 3–17.
7. Cherepanov, G. P. (1983), Fracture Mechanics of composite materials [Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov], Nauka, Moscow, 295 p.
8. Tamuzh, V. P., Kuksenko, V. S. (1978), Micromechanics of polymer materials destruction [Mikromekhanika razrusheniya polimernykh materialov], Zinatne, Riga, 294 p.
9. Makarov, E. S., Gvozdev, A. E., Zhuravlev, et al., (2017), Application of the theory of plasticity of dilating media to the processes of compaction of powders of metal systems [Primenenie teorii plastichnosti dilatiruyushchih sred k processam uplotneniya poroshkov metallicheskih sistem], *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, No. 4, pp. 268–284.
10. Makarov, E. S., Gvozdev, A. E., Zhuravlev, et al., (2018), Analysis of the equations of the theory of plasticity of powder metal systems [Analiz uravnenij teorii plastichnosti poroshkovykh metallicheskih sistem], *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, No. 1, pp. 152–166.

11. Zhuravlev, G. M., Gvozdev, A. E., Kolmakov, A. G., et al., (2018), Application of the mathematical method of local variations for solving problems of plastic shaping of metal, powder and nanocomposite materials [Primenenie matematicheskogo metoda lokal'nyh variacij dlya resheniya zadach plasticheskogo formoizmeneniya metallicheskih, poroshkovyh i nano-kompozicionnyh materialov], *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, No. 4, pp. 43–54.
12. Gvozdev, A. E., Bogolyubova, D. N., Sergeev, N. N., et al., (2015), Features of softening processes of aluminum, copper, and their alloys under hot deformation [Osobennosti prottekaniya processov razuprochneniya pri goryachej deformacii alyuminiya, medi i ih splavov], *Inorganic Materials: Applied Research*, vol. 6, No. 1, pp. 32–40.
13. Gvozdev, A. E., Zhuravlev, G. M., Kuzovlev, O. V. (2018), Fundamentals of formation of the state of high deformation ability of metal systems [Osnovy formirovaniya sostoyaniya vysokoj deformacionnoj sposobnosti metallicheskih sistem], *TulGU, Tula*, 382 p.
14. Beran, Mark J. (1968), *Statistical Continuum Theories*, Interscience Publishers Inc., New York, 439 p.
15. Hill, R. (1968), A self-consistent mechanics of composite materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13, No. 4, pp. 213–222.
16. Kröner, E. (1958), *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Springer-Verlag, Berlin, 180 p.
17. Kröner, E. (1975), Elastostatik statistisch aufgebauter Körper. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 55, No. 4, pp. 39–43.
18. Yeh, R. H. T. (1972), Variational principles for linear anisotropic composites. *Physics*, vol. 58, p. 419.

Получено 5.09.2019 г.

Принято в печать 12.11.2019 г.