ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-405-429

Оценки константы совместных диофантовых приближений

Ю. А. Басалов

Басалов Юрий Александрович — аспирант, кафедра алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственного педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена разработке нового подхода для оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений. История вопроса оценки константы наилучших диофантовых приближений восходит к П. Г. Дирихле. С течением времени подходы, применяемые для решения этой задачи претерпели серьезные изменения. Из алгебры (П. Г. Дирихле, А. Гурвиц, Ф. Фуртвенглер) это задача перешла в область геометрии чисел (Г. Дэвенпорт, Дж. В. С. Касселс). Нельзя не отметить такую интересную составляющую данной проблематики, как тесная взаимосвязь диофантовых приближений с геометрией чисел вообще, и алгебраическими решетками в частности (Дж. В. С. Касселс, А. Д. Брюно). Это дало новые возможности, как для применения уже известных результатов, так и для применения новых подходов в проблеме наилучших диофантовых приближений (А. Д. Брюно, Н. Г. Мощевитин).

В середине двадцатого века Г. Дэвенпортом была найдена фундаментальная связь значение константы наилучших совместных диофантовых приближений и критического определителя звездного тела специального вида. Позднее Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя к оценке его значения с помощью вычисления наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат обладающего определенными свойствами. Этот подход позволил получить оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 2, 3, 4$ (см. работы Дж. В. С. Касселса, Т. Кьюзика, С. Красса).

В данной работе, основываясь на описанном выше подходе, получены оценки $n = 5$ и $n = 6$. Идея построения оценок отличается от работы Т. Кьюзика. С помощью численных экспериментов были получены вначале примерные, а затем и точные значения оценок $V_{n,s}$. Доказательство этих оценок достаточно громоздко и представляет в первую очередь техническую сложность. Другим отличием постоенных оценок является возможность обобщзить их на любую размерность.

В рамках доказательства оценок константы наилучших диофантовых приближений нами был решен ряд многомерных оптимизационных задач. При их решении мы достаточно активно использовали математический пакет `Wolfram Mathematica`. Эти результаты являются промежуточным шагом для аналиттических доказательств оценок $V_{n,s}$ и константы наилучших диофантовых приближений C_n для $n \geq 3$

В процессе численных экспериментов была также получена интересная информация о структуре значений $V_{n,s}$. Эти результаты достаточно хорошо согласуется с результатами полученными в работах С. Красса. Вопрос о структуре значений $V_{n,s}$ для больших размерностей мало исследован и может представлять значительный интерес как с точки геометрии чисел, так и с точки теории диофантовых приближений.

Ключевые слова: наилучшие совместные диофантовы приближения, геометрия чисел, звездные тела, критические определители.

Библиография: 56 названий.

Для цитирования:
Ю. А. Басалов. Оценки константы наилучших диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 405–429.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-405-429

Estimations of the constant of the best simultaneous Diophanite approximations

Yu. A. Basalov

Basalov Yurij Aleksandrovich — Postgraduate Student, Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State Pedagogical University of Leo Tolstoy (Tula).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Abstract

This paper is devoted to the development of a new approach for estimating from below the constant of the best Diophantine approximations. The history of this problem dates back to P. G. Dirichlet. Over time, the approaches used to solve this problem have undergone major changes. From algebra (P. G. Dirichlet, A. Hurwitz, F. Furtwengler) this problem has moved into the field geometry of numbers (H. Davenport, J. W. S. Cassels). One cannot fail to note such an interesting component of this problem as the close relationship of diophantine approximations with geometry of numbers in general, and algebraic lattices in particular (J. W. S. Cassels, A. D. Bruno). This provided new opportunities, both for applying the already known results and for application of new approaches to the problem of the best Diophantine approximations (A. D. Bruno, N. G. Moshchevitin).

In the mid-twentieth century, H. Davenport found a fundamental relationship between the value of the constant of the best joint Diophantine approximations and critical determinant of a stellar body of a special kind. Later, J. W. S. Cassels went from directly calculating the critical determinant to estimating its value by calculating the largest value of $V_{n,s}$ – the volume of the parallelepiped centered at the origin with certain properties. This approach allowed us to obtain estimates of the constant of the best joint Diophantine approximations for $n = 2, 3, 4$ (see the works of J. W. S. Kassels, T. Cusick, S. Krass).

In this paper, based on the approach described above, the estimates $n = 5$ and $n = 6$ are obtained. The idea of constructing estimates differs from the work of T. Cusick. Using numerical experiments, approximate and then exact values of the estimates $V_{n,s}$ were obtained. The proof of these estimates is rather cumbersome and is primarily of technical complexity. Another difference between constant estimates is the ability to generalize them to any dimension.

As part of the proof of estimates of the constant of the best Diophantine approximations, we have solved a number of multidimensional optimization problems. In solving them, we used the mathematical package `Wolfram Mathematica` quite actively. These results are an intermediate step for analytical proofs of the estimates of $V_{n,s}$ and the constant of the best Diophantine approximations C_n for $n \geq 3$.

In the process of numerical experiments, interesting information was also obtained on the structure of the values of $V_{n,s}$. These results are in good agreement with the results obtained in the works of S. Krass. The question of the structure of the values of $V_{n,s}$ for large dimensions has been little studied and can be of considerable interest both from the point of geometry of numbers and from the point of theory of diophantine approximations.

Keywords: best joint Diophantine approximations, geometry of numbers, star bodies, critical determinants.

Bibliography: 56 titles.

For citation:
Yu. A. Basalov, 2019, "Estimations of the constant of the best simultaneous Diophanite approximations" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 405–429.

1. Введение

1.1. Актуальность исследования

Данная работа посвящена вопросам оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений для n действительных чисел. Сейчас в нашей стране исследованиями в области диофантовых приближений занимаются небольшое количество ученых. Судя по значительному количеству современных публикаций в этой области [28, 31, 32, 38, 39, 40, 42] можно предположить, что теория диофантовых приближений относится к числу актуальных направлений исследования, но в нашей стране его дальнейшая судьба не определена в силу малочисленности групп исследователей, занимающихся его развитием.

Задача приближения n действительных чисел является частным случаем задачи приближения n действительных линейных форм

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha_1} \\ \vec{\alpha_2} \\ \ldots \\ \vec{\alpha_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

и тесно связана с приближением одной линейной формы с помощью принципа переноса Хинчина [45]. При этом она имеет свою богатую историю, восходящую к П. Г. Дирихле [9].

Сформулируем задачу наилучших совместных диофантовых приближений n действительных чисел. Пусть

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$$

— произвольный вектор действительных чисел. Нас будут интересовать приближения $\vec{\alpha}$ рациональными дробями

$$\frac{\vec{p}}{q} = \left(\frac{p_1}{q},\ \frac{p_2}{q},\ \ldots,\ \frac{p_n}{q}\right).$$

По теореме Дирихле (1, [45]), существует бесконечно много рациональных векторов $\vec{p}/q$ таких, что

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < q^{-\frac{n+1}{n}}, \qquad i = \overline{1,\ldots,n}.$$

В качестве меры качества приближения мы будем использовать

Определение 1. *Мерой качества совместных приближений Дирихле первого рода вектора $\vec{\alpha}$ рациональным вектором $\vec{p}/q$ называется величина*

$$D(\vec{\alpha}, \vec{p}/q) = \max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n\,. \tag{1}$$

Тогда из теоремы Дирихле (1) следует, что существуют числа C такие, что неравенство

$$\max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n < C \tag{2}$$

имеет бесконечное количество решений в целых числах $q > 0, p_1, \ldots, p_n$.

Определение 2. *Константой наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x})$ для вектора $\vec{x}$ называется точная нижняя грань величины C, для которой существует бесконечное число рациональных векторов $\vec{p}/q$, удовлетворяющих неравенству*

$$D(\vec{x}, \vec{p}/q) < C. \tag{3}$$

То есть, для любой положительной константы $C < C(\vec{x})$ неравенство

$$D(\vec{x}, \vec{p}/q) < C$$

имеет конечное число решений с рациональным вектором $\vec{p}/q$, для $C > C(\vec{x})$ — бесконечное число решений, а для $C(\vec{x})$ вопрос о количестве решений остается открытым.

Из теоремы Дирихле непосредственно следует, что для любого вектора $\vec{x}$ константа наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x}) \leqslant 1$.

Определение 3. *Константой наилучших диофантовых приближений C_n называется точная верхняя грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$ размерности n:*

$$C_n = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^s} C(\vec{x}).$$

То есть, C_n — это наименьшее положительное число, при котором неравенство (2) имеет бесконечное количество решений для всех $C = C_n + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ и любых $\vec{x}$. Нас в дальнейшем будет интересовать вопрос вычисления или оценки значения C_n.

Особый интерес этот вопрос вызывает в связи с тем, что вектора $\vec{x}$ для которых $C(\vec{x}) = C_n$ по сути являются плохоприближаемыми, так как на них величина (1) достигает наибольшего значения. Сразу встает вопрос о структуре этих векторов, о их свойствах, о причинах того, почему они являются плохоприближаемыми. Так же интерес вызывают их экстремальные свойства – например, для $n = 1$, это числа из квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, в частности всем известное золотое сечение.

Выделяют еще один частный случай наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x})$ – наилучшие приближения алгебраических векторов $\vec{x}$.

Определение 4. *Константой наилучших диофантовых приближений C_n^* алгебраических чисел называют точную верхнюю грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$, таким что вместе с 1 они образуют базис чисто вещественного поля алгебраических чисел степени $n+1$.*

Для C_n^* было получено значительное количество оценок [1, 2, 7, 37]. Для нас этот случай имеет особый интерес в силу двух факторов.

Во-первых, методы оценки для алгебраических чисел значительно отличаются своим разнообразием от оценок для произвольных действительных чисел.

Во-вторых, существуют мнения, что $C_n = C_n^*$ [7]. Одним из результатов, который может косвенно подкрепить эту гипотезу является оценка, полученная Дж. Шекерсом (Szekers) [36]

$$C_n^* \leq C_n.$$

Отметим, что неравенство имеет место тогда, когда плохо приближаемый вектор $\vec{x}$ не является алгебраическим. Следующим фактом, которым можно подкрепить эту гипотезу, является случай $n = 1$, где $C_1^* = C_1$. Для $n = 2$ известно, что $C_2^* = 2/7$, а $C_2 \geq 2/7$. Возможно, в будущем эта гипотеза будет либо подтверждена, либо опровергнута.

1.2. Степень разработанности

Исторически, в основе оценок для $n = 1$ лежит теория цепных дробей, и наиболее значимой является оценка А. Гурвица [16], полученная им в 1891 году. Для $n = 2$ в основе известных оценок лежит математический аппарат линейной алгебры (Ф. Фуртвенглер [13, 14]), геометрия чисел (Г. Дэвенпорт, Дж. В. С. Касселс [5, 6, 8]) и результаты многомерных обобщений цепных дробей (В. Адамс, Т. Кьюзик [1, 7]).

Одной из первых общих оценок снизу является результат, полученный в 1929 году Ф. Фуртвенглером [13, 14]. Он построил оценки дискриминантов алгебраических полей, которые приводят к оценке качества приближения n действительных чисел рациональными, что в свою очередь приводит к оценке константы наилучших совместных диофантовых приближений.

Одна из наиболее фундаментальных на данный момент оценок принадлежит Г. Дэвенпорту [8]. Позднее она была доработана Дж. В. С. Касселсом [5]. Г. Дэвенпорт обнаружил связь между значением критического определителя (см. определение 7) звездного тела и оценкой некоторых форм. В частном случае это позволяет вычислив критический определитель $(n+1)$-мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1\le i\le n} |x_i|^n < 1,$$

получить значение константы наилучших совместных диофантовых приближений. Однако, вычисление критических определителей для тел такого вида является сложной задачей. Поэтому Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя, к оценке его значения. Этот подход оказался достаточно плодотворным, позволив получить оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 2, 3, 4$. Оценки такого рода являются достаточно сложной вычислительной задачей, и в каждом отдельном случае решение такой задачи требовало использования новых подходов.

Отметим некоторые известные оценки константы наилучших диофантовых приближений сверху. Первая оценка сверху была получена Г. Минковским [25] в 1896 году с использованием геометрии чисел. Г. Ф. Блихфельдт [4] введя понятие фундаментального параллелепипеда в 1914 году улучшил результат Г. Минковского. Позднее подход Г. Ф. Блихфельдта получил развитие в работах П. Мюллендера, В. Спона, В. Г. Новака [27, 35, 29, 30]. Значительный интерес представляет сравнение подходов при оценке константы наилучших совместных диофантовых приближений сверху и снизу.

1.3. Цели и задачи исследования

Целью данной работы является развитие подходов Г. Дэвенпорта, Дж. В. С. Касселса, Т. Кьюзика, С. Красса с целью получения оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений для $n > 4$. Для этого будет использоваться оценка наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат, находящегося внутри $(n+1)$-мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1\le i\le n} |x_i|^n < 1,$$

.

1.4. Новизна исследования

Задача получения оценок значений критического определителя звездного тела Дэвенпорта сводится к задаче нахождения наибольшего объема параллелепипеда с центром в начале координат находящегося внутри $(n+1)$-мерного звездного тела Дэвенпорта. Эта задача в свою очередь сведена нами к задаче многомерной оптимизации.

1.5. Теоретическая и практическая значимость работы

Получены новые оценки константы наилучших диофантовых приближений, а так же значительная информация о структуре значений $V_{n,s}$. Была предложена новая методика оценки значений $V_{n,s}$: вначале, с помощью численных экспериментов высказывается гипотезу о виде точных значений оценок, затем эти оценки выводятся и доказываются аналитически. Эта методика может быть обобщена и применена к вопросу оценки некоторых критических определителей решеток.

1.6. Методы исследования

В середине двадцатого века Г. Дэвенпортом была найдена фундаментальная связь значение константы наилучших совместных диофантовых приближений и критического определителя звездного тела специального вида. Позднее Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя к оценке его значения с помощью вычисления наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат, обладающего определенными свойствами. Этот подход позволил получить оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 2, 3, 4$ (см. работы Дж. В. С. Касселса [5], Т. Кьюзика [6], С. Красса [20, 21]).

Идея построения оценок отличается от работы Т. Кьюзика [6]. Численные эксперименты в системе компьютерной алгебры `Wolfram Mathematica` позволили высказать гипотезу о виде точных значений оценок $V_{n,s}$, затем эти оценки были выведены и доказаны аналитически. Другим отличием построенных оценок является возможность обобщения их на любую размерность.

1.7. Положения, выносимые на защиту

1. Для объема $V_{5,2}$ наибольшего параллелепипеда звездного тела Дэвенпорта размерности 5 справедлива оценка
$$V_{5,2} \geq \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}},$$
для константы совместных диофантовых приближений C_5 размерности 5 справедлива оценка
$$C_5 \geq \frac{3}{46}\sqrt{\frac{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}{1166}}.$$
2. Для объема V_6 размерности 6 справедлива оценка
$$V_{6,3} \geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11},$$
для константы совместных диофантовых приближений C_6 размерности 6 справедлива оценка
$$C_6 \geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}}.$$

2. Основное содержание работы

2.1. История вопроса

Первые результаты по оценке константы наилучших диофантовых приближений были получены в XIX веке. В первую очередь, это общий результат полученный П. Г. Дирихле в 1842 году [9] для n линейных форм

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_{ij}(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$ *и* Q *– произвольные действительные числа, причем* $Q > 1$*. Тогда найдутся целые числа* $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m$ *и* $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n$ *такие, что* $1 \le max\,(|q_1|,\ |q_2|, \ldots,\ |q_m|) < Q^{\frac{n}{m}}$ *и*

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot q_j - p_i\right| \le \frac{1}{Q}, \qquad (1 \le i \le n). \tag{4}$$

Доказательство. См. [45].□

откуда непосредственно следует, что $C_n \le 1$. Доказательство этой теорем основано на принципе Дирихле [45].

В 1891 году А. Гурвиц [16], используя теорию цепных дробей и теорию квадратичных иррациональностей, доказал следующую теорему.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения*

- *Для любого иррационального числа* α *существует бесконечное множество различных рациональных чисел* p/q*, удовлетворяющих неравенству*
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}.$$
- *Сформулированное выше утверждение становится неверным, если заменить* $\sqrt{5}$ *на любое число* $A > \sqrt{5}$*.*

Доказательство. См. [45].□

Это утверждение приводит к первому и единственному известному точному значению C_n. Это $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. При это равенство достигается, при приближении чисел из квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. В дальнейшем проводилось много исследований по вопросу обобщения цепных дробей на многомерный, в частности двухмерный, случай. Подобные обобщения рассматривали Л. Эйлер [10], К. Г. Я. Якоби [17], А. О. Перрон [34] В современное время также производятся исследования по исследованию алгоритмов обобщения цепных дробей [38, 39, 40]. Однако, никакие из полученных алгоритмов не позволили получить оценки для C_2.

В 1927 Ф. Фуртвенглер использую теорию алгебраических полей и произведя оценку дискриминанта произвольного алгебраического поля [13, 14] получил следующую оценку

Теорема 3. *Пусть* k *положительное число меньшее* $1/\sqrt{|\Delta|}$*, где* Δ *– это наименьший по модулю дискриминант алгебраического поля степени* $n+1$*. Тогда, для любых действительных чисел* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ *неравенства*

$$q\,|q\alpha_i - p_i|^n < k, \qquad i = \overline{1,n}$$

имеют бесконечное количество решений в целых числах $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ q$*.*

Доказательство. См. [13, 14].□

Из этого утверждения непосредственно следует, что $C_n \ge 1/\sqrt{|\Delta|}$.

Например, для $n = 2$ наилучшая оценка достигается при $\Delta = -23$ [46] (дискриминант кубического поля порождаемого уравнением $x^3 - x^2 - 1 = 0$) и соответствующая оценка равна $C_2 \ge 1/\sqrt{23}$. Для $n = 3$ наименьший по модулю дискриминант равен 117 [46] (дискриминант поля порождаемого уравнением $x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0$) и соответствующая оценка равна $C_3 \ge 1/\sqrt{117}$.

Напомним некоторые понятия из геометрии чисел.

Определение 5. *Функция $F(\overline{x})$, где $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ называется лучевой, если*

- *$F(\overline{x})$ неотрицательна, то есть $F(\overline{x}) \geq 0$;*
- *$F(\overline{x})$ непрерывна;*
- *$F(\overline{x})$ однородна, то есть для любого $t \geq 0$, $F(t\overline{x}) = tF(\overline{x})$.*

Определение 6. *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – линейно независимые точки вещественного евклидова пространства. Множество всех точек*

$$x = u_1 a_1 + \ldots + u_n a_n$$

с целыми коэффициентами $u_1, \ldots, u_n$ называется решеткой Λ. Величина

$$d(\Lambda) = |\det(a_1, \ldots, a_n)|$$

называется определителем решетки Λ.

Определение 7. *Пусть $\mathbb{F}$ – точечное тело. Если решетка Λ не имеет в $\mathbb{F}$ отличных от $\mathbb{O}$ точек ($\mathbb{O} \in \mathbb{F}$), то Λ допустима для $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-допустима. Точную нижнюю грань*

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathbb{F}$-допустимых решеток Λ называют критическим определителем множества $\mathbb{F}$. Если $\mathbb{F}$-допустимых решеток нет, то $\mathbb{F}$ является множеством бесконечного типа и $\Delta(\mathbb{F}) = \infty$.

Определение 8. *Под звездным телом понимают множество, обладающее следующими свойствами*

- *существует точка, называемая "началом", которая является внутренней точкой множества;*
- *любой луч, выходящий из "начала", либо не пересекается с границей множества, либо имеет с ней только одну общую точку.*

Г. Дэвенпортом [8] был получен следующий фундаментальный результат. Пусть $\mathbb{F}_n$ это $(n+1)$-мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^n < 1,$$

а $\Delta\mathbb{F}_n$ его критический определитель. Тогда

Теорема 4.

$$C_n \geq \frac{1}{\Delta\mathbb{F}_n}. \tag{5}$$

На практике, вычисление $\Delta\mathbb{F}_n$ оказалось проблематичной. Поэтому Дж. В. С. Касселс [5, 6] перешел от непосредственного вычисления к оценке значения $\Delta\mathbb{F}_n$

Теорема 5. *Пусть*

$$f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^{s} |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n} |x_i| \tag{6}$$

и $2^n V_{n,s}$ объем наибольшего параллелепипеда с центром в начале координат, содержащегося внутри фигуры

$$f_{n,s} \leq 1. \tag{7}$$

Пусть $\Delta_{n,s}$ наименьшее абсолютное значение дискриминанта действительного поля степени $n+1$, которое имеет s пар комплексно-сопряженных алгебраических чисел (то есть $2s \leq n+1$). Тогда

$$D_n \leq \sqrt{\Delta_{n,s}}/V_{n,s}, \tag{8}$$

или же

$$C_n \geq V_{n,s}/\sqrt{\Delta_{n,s}}. \tag{9}$$

Доказательство. [6].□

Значения $\Delta_{n,s}$ известны для обширного количества n (см. [46]). Таким образом, задача оценки константы наилучших диофантовых приближений снизу сводится к оценке снизу $V_{n,s}$. Ранее были получены следующие оценки

$$V_{2,0} = 2, V_{2,1} = 1 \qquad \text{(Дж. В. С. Касселс)}$$

$$V_{3,1} = 2,\ V_{3,0} = \frac{3^{3/2}}{2} \qquad \text{(Т. Кьюзик)}$$

$$V_{4,2} \geq \frac{16}{9},\ V_{4,1} \geq 2,\ V_{4,0} \geq 4 \qquad \text{(С. Красс)}$$

$$V_{5,2} \geq 2.3932\ldots \qquad \text{(С. Красс)}$$

Из этих значений можно получить следующие оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений

$$C_2 \geq \frac{2}{7}, \qquad C_3 \geq \frac{2}{\sqrt{275}}, \qquad C_4 \geq \frac{16}{9\sqrt{1609}}. \tag{10}$$

Заметим, что две последние оценки получаются из теоремы 5 при подстановке $s = [n/2]$. Поэтому мы в дальнейшем сосредоточимся на оценке $V_{n,[n/2]}$, в частности, оценке $V_{5,2}$ и $V_{6,3}$.

2.2. Предварительные оценки наибольших параллелепипедов

Рассмотрим матрицу n-ого порядка

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Пусть $\mathbb{E}$ n-мерный единичный куб, состоящий из точек

$$\vec{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n), \qquad 0 \leq e_i \leq 1, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Матрица A преобразует его в n-мерный параллелепипед

$$\mathbb{A} : \vec{a} = A \cdot \vec{e} \tag{12}$$

Заметим, что таким образом каждому n-мерному параллелепипеду соответствует матрица A. Объем этого параллелепипеда равен $2^n \det A$.

Пусть $\mathbb{F}_{n,s}$ – это n-мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} \leq 1,$$

где $f_{n,s}$ это (6).

Нас интересует, находится ли некоторый параллелепипед $\mathbb{A}$ внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$. Можно предложить следующий метод проверки этого утверждения. Составим оптимизационную задачу

$$\begin{gathered} f_{n,s} \to \max, \\ |b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n| \leq 1, \\ |b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n| \leq 1, \\ \ldots \\ |b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n| \leq 1. \end{gathered} \tag{13}$$

Если решение задачи ≤ 1, то параллелепипед $\mathbb{A}$ лежит полностью внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, в противном случае, часть его находится вне звездного тела.

Таким образом, если параллелепипед $\mathbb{A}$ лежит внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, имеет место оценка

$$V_{n,s} \geq \det A. \tag{14}$$

Нашей целью является построение матрицы A такого вида, чтобы задача (13) имела решение $\max f_{n,s} \leq 1$. Параллелепипеды $\mathbb{A}$ для которых $\det A$ "велико" будем называть *наибольшими*. Соответствующую наибольшему параллелепипеду матрицу мы также будем называть *наибольшей*.

На первом этапе исследования было решено провести вычислительные эксперименты по численному нахождению наибольших значений $V_{n,s}$. В процессе экспериментов производился направленный перебор матриц A с целью найти матрицу с наибольшим $\det A$, удовлетворяющую условию (13).

В результате экспериментов проводимых для размерностей 3 и 4 выяснилось, что существует множество наибольших матриц (а соответственного и параллелепипедов) с одинаковыми $\det A$. Поэтому было произведено исследование с целью получить наибольшую матрицу A с наиболее простой структурой. Оказалось, что можно найти наибольшую матрицу A следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & a_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_k & a_k \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Стоит отметить следующие моменты.

Во-первых, исходя из вида матрицы A, можно описать структуру параллелепипеда $V_{n,s}$ – все его грани прямоугольники (причем часть из них – квадраты), ребра либо параллельны осям координат, либо образуют с ними угол 45°.

Во-вторых, уже для $n = 7$ наибольшая матрица A_7^* может быть получена как комбинация наибольших матриц A_3^* и A_4^* (точные их значения см. ниже)

$$A_3^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ 0 & -\alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

$$A_4^* = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_2 & \sqrt{2}\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

$$A_7^* = \left(\begin{array}{ccccccc} \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}\alpha_3 & \sqrt{2}\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_3 \\ \underbrace{0}_{A_3^*} & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_{A_4^*} & & & & \underbrace{-\alpha_3 \quad \alpha_3}_{A_3^*} & \end{array}\right).$$

Вообще, для $n > 6$ матрицу A_n^* можно получить из A_{n-4}^* и A_4^*. Этот факт схож с результатом, полученным С. Крассом [20]

$$V_{n,s} V_{n',s'} \leq V_{n+n',s+s'}, \tag{16}$$

только вместо знака неравенства стоит равенство.

Перейдем к нахождению точных значений $V_{n,s}$. Для это поступим следующим образом. Определим точки, в которых наибольший параллелепипед $\mathbb{A}_n$ касается звездного тела $\mathbb{F}_{n,[n/2]}$, выпишем в этих точках граничные условия и на их основании получим параметры параллелепипеда.

Например, для $n = 3$ рассмотрим матрицу

$$A_3^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

Построим обратную задачу. Выберем набор точек в которых $f_{3,1}$ должна быть ≤ 1 (Если выбрать в качестве него все точки $\mathbb{A}_3^*$ (набор δ_{max}), то матрица гарантировано будет удовлетворять задаче (13)) При фиксированном наборе δ_0 точек будет максимизировать значение $\det A_3^*$. Если $\det A_3^*$ совпадет с $\det A_3$ наибольшей матрицы для $n = 3$, это будет означать, что можно перейти при проверке задачи (13) от набора δ_{max} к набору δ_0. Сужая набор δ_0 до минимума мы получим граничные точки в которых $f_{3,1} = 1$.

Проводя численные эксперименты, начав с точек со значениями координат $-1, 0, 1$ (на единичном кубе, единичный куб с помощью преобразования (12) приводится к $\mathbb{A}_3^*$), мы пришли к набору, состоящему из единственной точки $(1, 1, 0)$. Эта точка, применяя преобразование (12), превращается в точку (a, b, b), что приводит нас к задаче

$$2ab^2 \to \max,$$
$$\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) b = 1.$$

Решив эту задачу мы получим точное значение

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det A_3^* = 2ab^2 = 2. \tag{17}$$

Полученная матрица дает оценку $V_{3,1} \geq 2$, что совпадает результатом Т. Кьюзика [6].
Для $n = 4$ возьмем матрицу

$$A_4^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

В этом случае достаточно взять две точки $(1,1,1,0)$ и $(1,1,1,1)$. Это приводит нас к задаче

$$\begin{gathered} 2a^2b^2 \to \max, \\ \frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)^2 = 1, \\ \frac{1}{4}a^2\left(a^2+4b^2\right) = 1. \end{gathered}$$

Решив эту задачу получим

$$A_4^* = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{4}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{pmatrix},$$

$$\det A_4^* = 2a^2b^2 = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9} \approx 1.77777... \tag{18}$$

Для $n = 5$ возьмем матрицу

$$A_5^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & -c & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

В этом случае получаются более сложные граничные точки:

$$\left(1, 1, \sqrt{5}-2, -1, 1\right), \quad \left(1, 1, -1, \frac{1}{3}, 1\right), \quad (1, 1, 1, -1, 1).$$

Соответствующая задача имеет вид

$$\begin{gathered} 4ab^2c^2 \to \max, \\ 2a^2b^2c = 1, \\ \frac{8}{27}(a^2+4b^2)c^3 = 1, \\ \left(3-\sqrt{5}\right)b^2\left(a^2+\left(3-\sqrt{5}\right)^2b^2\right)c = 1. \end{gathered}$$

Ее решение

$$a = \sqrt{7-3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{134+30\sqrt{5}}{27}}, \qquad b = a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{8(4\sqrt{5}-9)}}, \qquad c = \frac{1}{2a^2b^2},$$

что дает оценку

$$V_{5,2} \geq \det A_5^* = \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831... \tag{19}$$

Для $n = 6$ матрица имеет вид

$$A_6^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

В этом случае достаточно двух граничных точек: $(1,1,1,1,1,1)$ и $\left(1,1,\sqrt{5}-2,1,1,1\right)$. Соответствующая задача имеет вид

$$4a^2b^4 \to \max,$$
$$\frac{1}{2}a^2b^2\left(a^2+4b^2\right) = 1,$$
$$\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{5}\right)b^2\left(a^2+4b^2\right)\left(a^2+\left(3-\sqrt{5}\right)^2 b^2\right) = 1.$$

Ее решение

$$a = \sqrt[6]{\frac{8\left(30\sqrt{5}-67\right)}{11}}, \qquad b = \sqrt[6]{\frac{56+25\sqrt{5}}{88}}.$$

что дает оценку

$$V_{6,3} \geq \det A_6^* = \frac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458... \tag{20}$$

2.3. Оценки некоторых функций

Введем следующие функции

$$F_0 = \left(\frac{1}{2}+x^2\right)\left(\frac{1}{2}+y^2\right),$$

$$F_1 = (1+x^2)|y|,$$

$$F_2 = (t_1+y^2)(t_2x^2+z^2)|w|, \quad \text{где } t_1 = 10\sqrt{5}-22, \text{ и } t_2 = \frac{26+10\sqrt{5}}{27}$$

$$F_3 = (t+x^2)(t+z^2)(y^2+w^2), \quad \text{где } t = 10\sqrt{5}-22.$$

Для доказательств полученных выше значений $\det A_n^*$ нам потребуются некоторые оценки значений этих функций. Они приведены в виде теорем ниже.

Теорема 6. *[51]*

$$\max F_0(x,y) = \left(\frac{1}{2}+x^2\right)\left(\frac{1}{2}+y^2\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

при условии

$$-2 \leq x+y \leq 2, \quad -2 \leq x-y \leq 2.$$

Теорема 7. *[51]*
$$\max F_1(x,y)=(1+x^2)|y|=2,$$
при условии
$$-2\le x+y\le 2,\quad -2\le x-y\le 2.$$

Теорема 8. *[51]*
$$\max F_2(x,y,z,w)=(t_1+y^2)(t_2x^2+z^2)|w|=\frac{64\left(5\sqrt{5}-9\right)}{27},$$
где $t_1=10\sqrt{5}-22$ *и* $t_2=\frac{26+10\sqrt{5}}{27}$, *при условии*
$$-2\le x+y\le 2,\quad -2\le x-y\le 2.$$
$$-2\le z+w\le 2,\quad -2\le z-w\le 2.$$

Теорема 9. *[51]*
$$\max F_3(x,y,z,w)=(t+x^2)(t+z^2)(y^2+w^2)=64(56-25\sqrt{5}),$$
где $t=10\sqrt{5}-22$, *при условии*
$$-2\le x+y\le 2,\quad -2\le x-y\le 2.$$
$$-2\le z+w\le 2,\quad -2\le z-w\le 2.$$

2.4. Доказательство оценок объема критического параллелепипеда и константы наилучших диофантовых приближений

Будем рассматривать матрицы следующего вида
$$A_*=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \hdotsfor{9}\\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0\\ \hdotsfor{9}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & a_k\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_k & a_k \end{pmatrix}.$$
Тогда
$$A_*^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{a} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \hdotsfor{9}\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2a_1} & \frac{1}{2a_1} & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2a_1} & \frac{1}{2a_1} & \cdots & 0 & 0\\ \hdotsfor{9}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2a_k} & \frac{1}{2a_k}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2a_k} & \frac{1}{2a_k} \end{pmatrix}.$$

Задача (13) принимает вид

$$
\begin{gathered}
f_{n,[n/2]} = \tfrac{1}{2^{[n/2]}} \prod_{i=1}^{[n/2]} |x_i^2 + x_{[n/2]+i}^2| \prod_{i=2[n/2]}^{n} |x_i| \to \max, \\
\left|\frac{x_1}{a}\right| \le 1, \quad \cdots \quad \left|\frac{x_{n-2k}}{a}\right| \le 1, \\
\left|\frac{x_{n-2k+1}}{2a_1} + \frac{x_{n-2k+2}}{2a_1}\right| \le 1, \quad \left|\frac{x_{n-2k+1}}{2a_1} - \frac{x_{n-2k+2}}{2a_1}\right| \le 1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\left|\frac{x_{n-1}}{2a_k} + \frac{x_n}{2a_k}\right| \le 1, \quad \left|\frac{x_{n-1}}{2a_k} - \frac{x_n}{2a_k}\right| \le 1.
\end{gathered}
$$

Сделав замену

$$
\begin{gathered}
x_i = a y_i, \qquad i = \overline{1, n-2k} \\
x_{n-2(k-i)-1} = a_i y_{n-2(k-i)-1}, \quad x_{n-2(k-i)} = a_i y_{n-2(k-i)}, \qquad i = \overline{1, k}
\end{gathered}
$$

задача примет вид

$$
\begin{gathered}
f_{n,[n/2]} = \tfrac{1}{2^{[n/2]}} \prod_{i=1}^{[n/2]} |x_i^2 + x_{[n/2]+i}^2| \prod_{i=2[n/2]}^{n} |x_i| \to \max, \\
|y_1| \le 1, \quad \cdots \quad |y_{n-2k}| \le 1, \\
|y_{n-2k+1} + y_{n-2k+2}| \le 2, \quad |y_{n-2k+1} - y_{n-2k+2}| \le 2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
|y_{n-1} + y_n| \le 2, \quad |y_{n-1} - y_n| \le 2.
\end{gathered}
$$

В этой задаче ограничения не зависят от исходной матрицы A. Это свойство мы будет в дальнейшем использовать.

Разберем подробно доказательство оценки для $V_{3,1}$. Доказательство оценок $V_{4,2}$, $V_{5,2}$, $V_{6,3}$ строится аналогичным образом.

Рассмотрим матрицу

$$
A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

После описанных выше преобразований задача (13) примет вид

$$
\begin{gathered}
f_{3,1} = \tfrac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)|x_3| = \tfrac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right)|y_3| \to \max, \\
|y_1| \le 1, \qquad |y_2 + y_3| \le 2, \qquad |y_2 - y_3| \le 2.
\end{gathered}
$$

Докажем, что $\max f_{3,1} \le 1$.

Отметим, что наибольшее значение достигается, при $|y_1| = 1$. Действительно, пусть существует максимум такой, что $\max f_{3,1} = f_{3,1}(\delta, y_2, y_3)$, где $|\delta| < 1$. Тогда

$$
f_{3,1}(\delta, y_2, y_3) = \frac{1}{2}\left(\delta^2 + y_2^2\right)|y_3| \le \frac{1}{2}\left(1 + y_2^2\right)|y_3| = f_{3,1}(1, y_2, y_3).
$$

Противоречие, т.е. $|y_1| = 1$.

Таким образом, достаточно доказать, что $\max f_{3,1}^* \le 1$, при условии

$$
|y_2 + y_3| \le 2, \qquad |y_2 - y_3| \le 2, \tag{21}
$$

где

$$f_{3,1}^* = \frac{1}{2}\left(1+y_2^2\right)|y_3|.$$

То есть

$$f_{3,1}^* = \frac{1}{2}\left(1+y_2^2\right)|y_3| = \frac{1}{2}F_0(y_2,y_3),$$

где

$$F_0(a,b) = \left(1+a^2\right)|b|.$$

В силу теоремы (6)

$$\max F_0(a,b) = 2$$

при ограничениях (21). Тогда $f_{3,1}^* \le 1$, что и требовалось доказать.

Сформулированные ранее результаты (17), (18), (19), (20), приводят нас к следующей общей оценке.

Теорема 10. *Имеет место оценка*

$$V_{n,[n/2]} \ge T_n \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2[(n-3)/4]}, \qquad n>2,$$

где

$$T_n = \max\begin{cases} 2, & \text{если } n \equiv 3 (mod\, 4),\\ \frac{16}{9} \approx 1.77777..., & \text{если } n \equiv 0 (mod\, 4),\\ \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831..., & \text{если } n \equiv 1 (mod\, 4),\\ \frac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458..., & \text{если } n \equiv 2 (mod\, 4). \end{cases}$$

В случае $n \equiv 0 (\bmod 4)$ оценка совпадает с оценкой Красса (16).

В случае $n \equiv 3 (\bmod 4)$ оценка Красса имеет вид

$$V_{4k-1,2k-1} > (16/9)^{[(4k-1)/4]} = (16/9)^{k-1}.$$

То есть, полученная нами оценка вдвое улучшает оценку Красса.

В случае $n \equiv 1 (\bmod 4)$ оценка Красса имеет вид

$$V_{4k+1,2k} > (16/9)^{[(4k+1)/4]} = (16/9)^{k}.$$

Полученная оценка несколько улучшает оценку Красса, так как

$$\sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831... > 1.77777... \approx \frac{16}{9}.$$

В случае $n \equiv 2 (\bmod 4)$ оценка Красса имеет вид

$$V_{4k+2,2k+2} > (16/9)^{[(4k+2)/4]} = (16/9)^{k}.$$

Полученная оценка несколько улучшает оценку Красса, так как

$$\frac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458... > 1.77777... \approx \frac{16}{9}.$$

Помимо $V_{n,s}$ в оценку (9) входит значение $\Delta_{n,s}$. Известно достаточно много значений $\Delta_{n,s}$ [46], однако вычисление этой величины достаточно трудоемко. Сейчас большую работу в этом направлении проводят Ю. Клюнерс и Г. Малле [18, 46]. Они построили большую базу данных алгебраических полей степени вплоть до 19. Приведем некоторые значения $\Delta_{n,[n/2]}$, которые будут нас интересовать для оценок C_n.

Степень поля $(n+1)$	$\Delta_{n,[n/2]}$
4	-275
5	$1\,609$
6	$28\,037$
7	$-184\,607$
8	$-4\,286\,875$
9	$29\,510\,281$
10	$-209\,352\,647$
11	$-5\,939\,843\,699$

Объединяя приведенные ранее результаты получаем следующие оценки константы наилучших диофантовых приближений

$$\begin{aligned}
C_3 &\geq \frac{2}{5\sqrt{11}} && \approx 0.120605...\\
C_4 &\geq \frac{16}{9\sqrt{1609}} && \approx 0.044320...\\
C_5 &\geq \frac{3}{46}\sqrt{\frac{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}{1166}} && \approx 0.014860...\\
C_6 &\geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}} && \approx 0.004269...\\
C_7 &\geq \frac{32}{4\,275\sqrt{19}} && \approx 0.001717...\\
C_8 &\geq \frac{256}{81\sqrt{29\,510\,281}} && \approx 0.000581...\\
C_9 &\geq \frac{6}{9051}\sqrt{\frac{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}{506}} && \approx 0.000229...\\
C_{10} &\geq \frac{16\left(9+5\sqrt{5}\right)}{99\sqrt{5\,939\,843\,699}} && \approx 0.000042...
\end{aligned}$$

Эти значения улучшает оценки данные в [11].

3. Заключение

Данная работа посвящена разработке нового подхода для оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений.

В первой части работы был дан исторический обзор по проблеме оценки константы наилучших диофантовых приближений. С течением времени подходы, применяемые для решения этой задачи претерпели серьезные изменения. Из алгебры (П. Г. Дирихле [9], А. Гурвиц [16], Ф. Фуртвенглер [13, 14]) это задача перешла в область геометрии чисел (Г. Дэвенпорт [8], Дж. В. С. Касселс [5]).

Стоит отметить такую интересную составляющую данной проблематики, как тесная взаимосвязь диофантовых приближений с геометрией чисел вообще, и алгебраическими решетками в частности (Дж. В. С. Касселс [5], А. Д. Брюно [38, 39, 40]). Это уже дало новые возможности, как для применения уже известных результатов, так и для применения новых подходов в проблеме наилучших диофантовых приближений (А. Д. Брюно[38, 39, 40], Н. Г. Мощевитин [42]). По всей видимости, в будущем взаимосвязь между этими направлениями будет только усиливаться.

Во второй части работы мы развили подходы к оценке константы наилучших диофантовых приближений, заложенного Г. Дэвенпортом [8], Дж. В. С. Касселсом [5], Т. Кьюзиком (см. [6]). Эти подходы основаны на оценке наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат обладающего определенными свойствами (5). Применение новых идей в сочетании с эффективным использованием численных экспериментов, позволило улучшить существующие оценки константы наилучших диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$.

В третьей части нами был решен ряд многомерных оптимизационных задач. При их решении мы достаточно активно использовали математический пакет `Wolfram Mathematica`. Эти результаты являются промежуточным шагом для доказательства в четвертой части данной работы оценок $V_{n,s}$ и константы наилучших диофантовых приближений C_n для $n \geq 3$

Отметим, что для получения более сильных оценок, скорее всего, потребуются принципиально новые подходы. Косвенным признаком этого может быть полученная нами в разделе 2.2 информация о том, что A_n^* можно представить в виде композиции A_{n-4}^* и A_4^*. В качестве возможного подхода по усилению оценок C_n снизу можно предложить непосредственную оценку значения критического определителя звездного тела $\mathbb{F}_n$. Это нетривиальная задача, но необходимо отметить, что в случае оценки сверху были получены достаточно обширные результаты [23, 29, 30, 31, 32, 42].

Другим направление возможных исследований может стать применение предложенного в данной работе подхода для оценки критических определителей. Задача оценки критического определителя ограниченного тела достаточно схожа с задачей оценки $V_{n,s}$. Нам кажется, что сочетание численных и аналитических методов в описанном случае может дать определенные результаты в этом вопросе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adams W. W. Simultaneous Diophantine approximations and cubic irrationals // Pacific journal of mathematics. 1969. Vol. 30. No. 1. P. 1–14.

2. Adams W. W. The best two-dimensional diophanite approximation constant for cubic irrtionals // Pacific journal of mathematics. 1980. Vol. 91. No. 1. P. 29–30.

3. Bernstein L. A 3-Dimensional Periodic Jacobi-Perron Algorithm of Period Length 8 // Journal of Number Theory, 1972, Vol. 4, Issue 1. P. 48–69.

4. Blichfeldt H. A new principle in the geometry of numbers, with some applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1914. Vol. 15. P. 227–235.

5. Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 119–121.

6. Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory. 1980. Vol. 12 (4). P. 543–556

7. Cusick J. W. The two dimensional diophanite approximation constant // Pacific journal of mathematics. 1983. Vol. 105 (1). P. 53–67.

8. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 186–195.

9. Dirichlet L. G. P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1842, P. 93–95.

10. Euler L. De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda // Petersburger Akademie Notiz. Exhib. August 14, 1775 // Commentationes arithmeticae collectae. V. II. St. Petersburg. 1849. P. 99–104.

11. Finch S. R. Mathematical Constants. Cambridge University Press, 2003 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).

12. Fujita H. The minimum discriminant of totally real algebraic fields of degree 9 with cubic subfields // Mathematics of Computation. 1993. Vol. 60, No. 202. P. 801–810.

13. Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. I // Math. Ann. 1927. Vol. 96. P. 169–175.

14. Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. II // Math. Ann. 1928. Vol. 99. P. 71–83.

15. Hunter J. The minimum discriminant of quintic fields // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1957. Vol. 3. P. 57–67.

16. Hurwitz A. Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationaleBriiche // Math. Ann. 1891. Vol. 39. P. 279–284.

17. Jacobi C. G. J. Allgemeine Theorie der Kettenbruchanlichen Algorithmen, in welchenjede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird // J. Reine Angew. Math. 1868. Vol. 69. P. 29–64. // Gesammelte Werke, Bd. IV. Berlin: Reimer. 1891. P. 385–426.

18. Klüners J., Malle, G. A Database for Field Extensions of the Rationals. LMS Journal of Computation and Mathematics. 2001. Vol. 4. P. 182–196.

19. Koksma J., Meulenbeld B. Sur le theoreme de Minkowski, concernant un systeme de formes lineaires reelles. I, II, III, IV // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1942. Vol. 45. P. 256–262, 354–359, 471–478, 578–584.

20. Krass S. Estimates for n-dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$ // J. Number Theory. 1985. Vol. 20(2). P. 172-176.

21. Krass S. The N-dimensional diophantine approximation constants // Australian Mathematical Society. 1985. Vol 32(2). P. 313–316.

22. Lanker M., Petek P., Rugeji M. S. The continued fractions ladder of specific pairs of irrationals // arXiv.org. 2011. Дата обновления: 30.06.2011. URL: https://arxiv.org/abs/1108.0087 (дата обращения: 10.04.2019).

23. Mack J. M. Simultaneous Diophantine approximation // J. Austral. Math. Soc. A. 1977. Vol. 24. P. 266–285.

24. Mayer J. Die absolut-kleinsten Diskriminanten der biquadratischen Zahlkorper // S.-B. Akad. Wiss. Wien Abt. Ila. 1929. Vol. 138. P. 733–742.

25. Minkovski H. Geometrie der Zahlen. Berlin: Teubner, 1896.

26. Mordell L. Lattice points in some n-dimensional non-convex regions. I, II // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1946. Vol. 49. P. 773–781, 782–792.

27. Mullender P. Lattice points in non-convex regions. I // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1948. Vol. 51. P. 874–884.

28. Murru N. On the Hermite problem for cubic irrationaliti // arXiv.org. 2013. Дата обновления: 16.01.2014. URL: https://arxiv.org/abs/1305.3285v3 (дата обращения: 10.04.2019).

29. Nowak W. G. A note on simultaneous Diophantine approximation // Manuscr. Math. 1981. Vol. 36. P. 33–46.

30. Nowak W. G. A remark concerning the s-dimensional simultaneous Diophantine approximation constants // Graz. Math. Ber. 1993. Vol. 318. P. 105–110.

31. Nowak W. G. Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants. // Comm. Math. 2014. Vol. 22, Is. 1, P. 71–76.

32. Nowak W. G. Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem // In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications. Springer/ Switzerland. 2016. P. 181–197.

33. Odlyzko A. M. Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeros of zeta functions : a survey of recent results // Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. 1990. Tome 2. No. 1. P. 119–141.

34. Perron O. Grundlagen fur eine Theorie des Jacobischen Ketten-bruchalgorithmus // Math. Ann. 1907. Vol. 64. P. 1-76.

35. Spohn W.G. Blichfeldt's theorem and simultaneous Diophantine approximation // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. pp. 885–894.

36. Szekers G. The n-dimensional approximation constant // Bull. Austral. Math. Soc. 1984. Vol. 29. P. 119–125.

37. Woods A. C. The asymetric product of three homogenous linear forms // Pacific J. Math. 1981. Vol. 93. P. 237–250.

38. Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // Препринт N45. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша. 2004.

39. Брюно А. Д. Структура наилучших диофантовых приближений // ДАН. 2005. Том 402. No. 4.

40. Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // ДАН. 2005. Том. 402. No. 6.

41. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.

42. Мощевитин. Н. Г. К теореме Блихфельдта-Мюллендера-Спона о совместных приближениях // Тр. МИАН. 2002. Том 239. с. 268–274.

43. Прасолов В. В. Многочлены. – М.: МЦНМО, 2001.

44. Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М.: Физматгиз, 1961.

45. Шмидт В. М. Диофантовы приближения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.

46. A Database for Number Fields // A Database for Number Fields. URL: http://galoisdb.math.upb.de/ (дата обращения: 05.05.2018).

Работы автора по теме диссертации

47. Басалов Ю. А. Геометрическая интерпретация проблемы наилучших диофантовых приближений // V всероссийская научно-практическая конференция ППС, аспирантов, магистрантов, соискателей ТГПУ им. Л. Н. Толстого «Университет XXI века: исследования в рамках научных школ». 2015.

48. Басалов Ю. А. О наилучших приближениях кубических иррациональностей // Всероссийская научно-практическая конференция «Университет XXI века: научное измерение». 2016.

49. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А., Басалова А. Н., Лямин М. И., Родионов А. В. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК» - II // Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2017.

50. Басалов Ю. А. Компьютерное моделирование и неполные частные кубических иррациональностей // IV международная конференция «Многомасштабное моделирование структур, строение вещества, наноматериалы и нанотехнологии». ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2017. С. 97–100.

51. Basalov Yu. A. On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation // arXiv.org. 2019. Дата обновления: 09.04.2019. URL: https://arxiv.org/abs/1804.05385 (дата обращения: 10.04.2019).

52. Басалов Ю. А. Об оценке константы наилучших диофантовых приближений для n $>$ 4 // XV Международная конференция Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения профессора Коробова Николая Михайловича. 2018. С. 245–248.

53. Ю. А. Басалов. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник, Т. 19, Вып. 2, 2018, С. 388-405. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411

54. Басалов Ю. А. О методах оценки снизу константы совместных диофантовых приближений // Материалы Международного молодежного научного форума "ЛОМОНОСОВ-2019"/ Отв. ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. [Электронный ресурс]. М: МАКС Пресс, 2019. – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. – Систем. требования: ПК с процессором 486+; Windows 95; дисковод DVD-ROM; Adobe Acrobat Reader. – 1600 Мб. 11000 экз.

55. Басалов Ю. А. О методах оценок критических определителей // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. Конф., посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 227–228.

56. Басалов Ю. А. Оценка константы наилучших диофантовых приближений для n=5 и n=6 // Чебышевский сборник, Т. 20, Вып. 1, 2019, с. 66–81. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-1-66-81

REFERENCES

1. Adams W. W. 1969, “Simultaneous Diophantine approximations and cubic irrationals“, *Pacific journal of mathematics*, Vol. 30, No. 1, pp. 1–14.

2. Adams W. W. 1980, "The best two-dimensional diophanite approximation constant for cubic irrtionals", *Pacific journal of mathematics*, Vol. 91, No. 1, pp. 29-30.

3. Bernstein L. 1972, "A 3-Dimensional Periodic Jacobi-Perron Algorithm of Period Length 8", *Journal of Number Theory*, Vol. 4, Issue 1. pp. 48–69.

4. Blichfeldt H. 1914, "A new principle in the geometry of numbers, with some applications", *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 15. pp. 227–235.

5. Cassels J. W. S. 1955, "Simultaneous Diophantine approximation", *J. London Math. Soc.*, Vol. 30, pp. 119-121.

6. Cusick T. W. 1980, "Estimates for Diophantine approximation constants", *Journal of Number Theory*, Vol. 12 (4), pp. 543–556.

7. Cusick J. W. 1983, "The two dimensional diophanite approximation constant", *Pacific journal of mathematics*, Vol. 105, No. 1, pp. 53–67.

8. Davenport. H. 1955, "On a theorem of Furtwängler", *J. London Math. Soc.* , Vol. 30, pp. 186-195.

9. Dirichlet L. G. P. 1842, "Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen", *S. B. Preuss. Akad. Wiss.*, pp. 93–95.

10. Euler L. 1775, "De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda" *Petersburger Akademie Notiz. Exhib.*.

11. Finch S. R. 2003, *Mathematical Constants*, Cambridge University Press (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).

12. Fujita H. 1993, "The minimum discriminant of totally real algebraic fields of degree 9 with cubic subfields", *Mathematics of Computation*, Vol. 60, No. 202, pp. 801–810.

13. Furtwängler H. 1927, "Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. I", *Math. Ann.*, Vol. 96, pp. 169-175.

14. Furtwängler H. 1928, "Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. II", *Math. Ann.*, Vol. 99, pp. 71-83.

15. Hunter J. 1891, "The minimum discriminant of quintic fields", *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, Vol. 3, pp. 57-67.

16. Hurwitz A. 1891, "Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Briiche", *Math. Ann.*, Vol. 39, pp. 279-284.

17. Jacobi C. G. J. 1868, "Allgemeine Theorie der Kettenbruchanlichen Algorithmen, in welchenjede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird", *J. Reine Angew. Math.* Vol. 69, pp. 29–64.

18. Klüners J., Malle G. A. 2001, "Database for Field Extensions of the Rationals", *LMS Journal of Computation and Mathematics*, Vol. 4, pp. 182–196.

19. Koksma J., Meulenbeld B. 1942, "Sur le theoreme de Minkowski, concernant un systeme de formes lineaires reelles. I, II, III, IV", *Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci.*, Vol. 45, pp. 256–262, 354–359, 471–478, 578–584.

20. Krass S. 1985, “Estimates for n-dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$“, *J. Number Theory* , Vol. 20, Is. 2, pp. 172-176.

21. Krass S. 1985, “The N-dimensional diophantine approximation constants“, *Australian Mathematical Society* , Vol. 32, Is. 2, pp. 313-316.

22. Lanker M., Petek P., Rugeji M. S. 2011, “The continued fractions ladder of specific pairs of irrationals“, Available at: https://arxiv.org/abs/1108.0087

23. Mack J. M. 1977, “Simultaneous Diophantine approximation“, *J. Austral. Math. Soc. A.*, Vol. 24, pp. 266-285.

24. Mayer J. 1929, “Die absolut-kleinsten Diskriminanten der biquadratischen Zahlkorper“, *S.-B. Akad. Wiss. Wien Abt. Ila.*, Vol. 138, pp. 733–742.

25. Minkovski H. 1896, *Geometrie der Zahlen.* Teubner.

26. Mordell L. 1946, “Lattice points in some n-dimensional non-convex regions. I, II “, *Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci.*, Vol. 49, pp. 773–781, 782–792.

27. Mullender P. 1948, “Lattice points in non-convex regions. I“, *Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci.*, Vol. 51, pp. 874–884.

28. Murru N. 2013, “On the Hermite problem for cubic irrationaliti“, Available at: https://arxiv.org/abs/1305.3285v3

29. Nowak W. G. 1981, “A note on simultaneous Diophantine approximation“, *Manuscr. Math.*, Vol. 36, pp. 33-46.

30. Nowak W. G. 1993, “A remark concerning the s-dimensional simultaneous Diophantine approximation constants“, *Graz. Math. Ber.*, Vol. 318. pp. 105-110.

31. Nowak W. G. 2014, “Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants“, *Comm. Math*, Vol. 22, Is. 1, pp. 71-76.

32. Nowak W. G. 2016, “Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz’s theorem“, *In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications*, Springer, Switzerland, pp. 181-197.

33. Odlyzko A. M. 1990, “Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeros of zeta functions : a survey of recent results“, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, Tome 2, No. 1, pp. 119–141.

34. Perron O. 1907, “Grundlagen fur eine Theorie des Jacobischen Ketten-bruchalgorithmus“, *Math. Ann.*, Vol. 64, pp. 1–76.

35. Spohn W. G. 1968, “Blichfeldt’s theorem and simultaneous Diophantine approximation“, *Amer. J. Math.*, Vol. 90, pp. 885–894.

36. Szekers G. 1984, “The n-dimensional approximation constant“, *Bull. Austral. Math. Soc.*, Vol. 29, pp. 119–125.

37. Woods A. C. 1981, “The asymetric product of three homogenous linear forms“, *Pacific J. Math.*, Vol. 93, pp. 237–250.

38. Bruno A. D. 2004, “Algorithm of the generalized continued fraction“, *Preprint IAM of Keldysh.*

39. Bruno A. D. 2005, “The structure of best Diophantine approximations“, *Proceedings FAS.*

40. Bruno A. D. 2005, “Algorithm of the generalized continued fractions“, *Proceedings FAS.*

41. Cassels J. W. S. 1965, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Mir.

42. Moshchevitin N. G. 2002, “To the Blichfeldt-Mullender-Spohn theorem on simultaneous approximations“, *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, Vol. 239, pp. 268–274.

43. Prasolov V. V. 2001, *Polynomials*, MCNMO.

44. Hinchin A. Ya. 1961, *Continued fractions*, Mir.

45. Schmidt W. M. 1983, *Diophantine Approximation*, Mir.

46. A Database for Number Fields. Available at: http://galoisdb.math.upb.de/

Works of the author on the topic of the thesis

47. Basalov Yu. A. 2015, “Geometric interpretation of the problem of the best Diophantine approximations“, *V All-Russian Scientific and Practical Conference of faculty, graduate students, undergraduates, applicants TSPU of Leo Tolstoy "University of the XXI century: research in the framework of scientific schools".*

48. Basalov Yu. A. 2016, “On the best approximations of cubic irrationality“, *All-Russian Scientific and Practical Conference "University of the XXI Century: Scientific Dimension".*

49. Rebrova I. Yu., Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Balaba I. N., Yesayan A. R., Basalov Yu. A., Basalova A. N., Lyamin M. I., Rodionov A. V. 2017, *The number-theoretic method in approximate analysis and its implementation in POIVS "TMK II*, Publishing house of TSPU of Leo Tolstoy, 2017.

50. Basalov Yu. A. 2017, “Computer modeling and partial quotients of cubic irrationality“, *IV international conference "Multiscale modeling of structures, structure of matter, nanomaterials and nanotechnology"*, pp. 97–100.

51. Basalov Yu. A. 2018, “On the estimation of the constant of the best Diophantine approximations for n $>$ 4 “, *XV International Conference Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern Problems and Applications dedicated to the centenary of the birth of Professor Korobov Nikolai Mikhailovich*, pp. 245–248.

52. Basalov Yu. A. 2018, “On the history of estimates of the constant of the best joint diophantine approximations“, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 19, Issue 2, pp. 388–405. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411

53. Basalov Yu. A. 2019, “On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation“, Avaliable at: https://arxiv.org/abs/1804.05385

54. Basalov Yu. A. 2019, “On methods for lower estimation of the constant of diophantine approximations“, *Materials of the International Youth Scientific Forum "LOMONOSOV-2019".*

55. Basalov Yu. A. 2019, “On methods for estimating critical determinants“, *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history: Materials of the XVI Intern. Conf., Dedicated to the 80th birthday of Professor Michel Deza*, pp. 227–228.

56. Basalov Yu. A. 2019, ‘Estimation of the constant of the best simultaneous Diophanite approximations for n=5 and n=6“, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 20, Issue 1, pp. 66–81. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-1-66-81

Получено 9.09.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.