ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-372-389

# Обобщённые разбиения Рози и множества ограниченного остатка[1]

А. В. Шутов

**Шутов Антон Владимирович** — кандидат физико-математических наук, доцент, Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН (г. Хабаровск).
*e-mail: a1981@mail.ru*

**Аннотация**

Рози ввел фрактальное множество, связанное со сдвигом двумерного тора на вектор $(\beta^{-1}, \beta^{-2})$, где $\beta$ – действительный корень уравнения $\beta^3 = \beta^2+\beta+1$ и показал, что данный фрактал разбивается на три фрактала, являющихся множествами ограниченного остатка относительно данного сдвига тора. Введенное множество получило название фрактала Рози. В дальнейшем были введены многочисленные обобщения фракталов Рози, нашедшие применения в целом ряде задач теории чисел, теории динамических систем и комбинаторики.

Журавлев ввел бесконечную последовательность разбиений исходного фрактала Рози на фрактальные множества и показал, что они также состоят из множеств ограниченного остатка. В настоящей работе рассматривается задача о построении обобщения таких разбиений для фракталов Рози, связанных с алгебраическими единицами Пизо.

В работе введена бесконечная последовательность разбиений $d-1$-мерных фракталов Рози, связанных с алгебраическими единицами Пизо степени $d$, на фрактальные множества $d$ типов. Каждое следующее разбиение последовательности является подразбиением предыдущего. Доказан ряд свойств, описывающих самоподобие введенных разбиений.

Показано, что введенные разбиения являются так называемыми обобщенными перекладывающимися разбиениями относительно некоторого сдвига тора. В частности, действие данного сдвига на разбиении сводится к перекладыванию $d$ центральных фигур разбиения. В качестве следствия получено, что разбиение Рози произвольного порядка состоит из множеств ограниченного остатка относительно рассматриваемого сдвига тора.

Также доказано, что орбита рассматриваемого сдвига тора обладает свойством самоподобия.

*Ключевые слова:* разбиения Рози, фракталы Рози, числа Пизо, множества ограниченного остатка.

*Библиография:* 34 названия.

**Для цитирования:**
А. В. Шутов. Обобщённые разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 372–389.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00065).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-372-389

## Generalized Rauzy tilings and bounded remainder sets[2]

A. V. Shutov

**Shutov Anton Vladimirovich** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Khabarovsk Division of the Institute for Applied Mathematics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences (Khabarovsk).
*e-mail: a1981@mail.ru*

**Abstract**

Rauzy introduced a fractal set associted with the toric shift by the vector $(\beta^{-1}, \beta^{-2})$, where $\beta$ is the real root of the equation $\beta^3 = \beta^2 + \beta + 1$. He show that this fractal can be partitioned into three fractal sets that are bounded remaider sets with respect to the considered toric shift. Later, the introduced set was named as the Rauzy fractal. Further, many generalizations of Rauzy fractal are discovered. There are many applications of the generalized Rauzy fractals to problems in number theory, dynamical systems and combinatorics.

Zhuravlev propose an infinite sequence of tilings of the original Rauzy fractal and show that these tilings also consist of bounded remainder sets. In this paper we consider the problem of constructing similar tilings for the generalized Rauzy fractals associated with algebraic Pisot units.

We introduce an infinite sequence of tilings of the $d-1$-dimensional Rauzy fractals associated with the algebraic Pisot units of the degree $d$ into fractal sets of $d$ types. Each subsequent tiling is a subdivision of the previous one. Some results describing the self-similarity properties of the introduced tilings are proved.

Also, it is proved that the introduced tilings are so called generalized exchanding tilings with respect to some toric shift. In particular, the action of this shift on the tiling is reduced to exchanging of $d$ central tiles. As a corollary, we obtain that the Rauzy tiling of an arbitrary order consist of bounded remainder sets with respect to the considered toric shift.

In addition, some self-similarity property of the orbit of considered toric shift is established.

*Keywords:* Rauzy tilings, Rauzy fractals, Pisot numbers, bounded remainder sets.

*Bibliography:* 34 titles.

**For citation:**
A. V. Shutov, 2019, "Generalized Rauzy tilings and bounded remainder sets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 372–389.

## 1. Введение

Рози в работе [1] ввел фрактал $\mathcal{T}$, представляющий собой геометрический объект, связанный с комбинаторной подстановкой вида

$$\begin{array}{c} 1 \to 12 \\ 2 \to 13 \\ 3 \to 1 \end{array},$$

[2]The study was carried out at the expense of a grant of the Russian scientific Foundation (project 19-11-00065).

а также с алгебраическим числом $\beta$, являющимся корнем уравнения

$$\beta^3 = \beta^2 + \beta + 1. \tag{1}$$

Позднее конструкция Рози была обобщена на случай более общих подстановок и алгебраических уравнений [2], [3]. В дальнейшем были предложены три основные конструкции фракталов Рози:

1) проектирование дискретной прямой, получаемой при помощи некоторой подстановки [2], [4];

2) рассмотрение фрагментов ступенчатых поверхностей, получаемых при помощи геометрических подстановок [3], [4];

3) использование жадных разложений действительных чисел по степеням $\beta$ [5].

Фракталы Рози оказались тесно связаны с целым рядом задач теории чисел (диофантовы приближения, арифметика $\beta$-разложений, множества ограниченного остатка и т.д.), комбинаторики слов, теории динамических систем и даже физики квазикристаллов. Подробные обзоры результатов, связанных с обобщенными фракталами Рози и соответствующую библиографию можно найти в работах [6], [4], [7], [8].

Ключевую роль в исследованиях, связанных с обобщенными фракталами Рози, играет их разбиение на непересекающиеся фрактальные множества, которое мы будем далее называть разбиением Рози порядка 0. В случае уравнения (1) и исходной конструкции Рози данное разбиение имеет вид

$$\mathcal{T} = \mathcal{R}_0 \sqcup \mathcal{G}_0 \sqcup \mathcal{B}_0. \tag{2}$$

и порождает перекладывание областей $S_{\mathcal{T}}$, которое оказывается изоморфным сдвигу двумерного тора на вектор $(\beta, \beta^2)$. Аналогичные результаты имеют место и для ряда семейств общих фракталов Рози [4].

В случае классического фрактала Рози, отвечающего разбиению (1), В.Г.Журавлев рассмотрел [9] последовательность разбиений $d^n$, обобщающих разбиение (2). Здесь разбиение $d^0$ совпадает с разбиением (2), а $d^n$ представляет собой разбиение $\mathcal{T}$ на фрактальные множества трех типов, являющееся подразбиением разбиения $d^{n-1}$. Разбиения $d^n$ получили название разбиений Рози порядка $n$.

В настоящей работе мы вводим и изучаем разбиения Рози порядка $n$ в более общем случае единиц Пизо, являющихся корнями уравнений

$$\beta^d = a_1\beta^{d-1} + \ldots + a_{d-1}\beta + 1$$

с дополнительным условием на коэффициенты

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{d-1}.$$

Введенные нами разбиения оказывается разбиениями фрактала Рози на множества $d$ типов. Мы доказываем, что эти множества аффинно эквивалентны множествам, образующим разбиение Рози порядка 0. Также мы доказываем, что действие аналога отображения $S_{\mathcal{T}}$ на разбиениях Рози порядка $n$ сводится к перекладыванию $d$ центральных областей. В качестве следствия мы показываем, что разбиения Рози всех порядков состоят из множеств ограниченного остатка относительно некоторого сдвига тора.

Пусть $S_\alpha$ – иррациональный сдвиг тора $\mathbb{T}^d$. Множество $X \subset \mathbb{T}^d$ называется множеством ограниченного остатка, если существует постоянная $C(X)$ такая, что для всех натуральных $N$ выполняется неравенство

$$|\sharp\{k : 0 \leq k < N, S_\alpha^k(0) \in X\} - \frac{|X|}{|\mathbb{T}|^d}N| \leq C(X)$$

Такие множества впервые были введены Гекке [10]. В случае $d = 1$ в работах [11] и [12] было дано полное описание множеств ограниченного остатка, а в работах [13], [14] была полностью решена задача о соответствующей константе $C(X)$. В случае $d > 1$ задача о множествах ограниченного остатка оказывается существенно более сложной. Имеющиеся результаты касаются поиска критериев множеств ограниченного остатка [15]–[19], построения отдельных семейств множеств ограниченного остатка [20]–[22], а также получения оценок на константу $C(X)$ для конкретных множеств ограниченного остатка [23], [24]. В частности, Рози показал [1], что для уравнения (1) разбиение Рози порядка 0 является разбиением на множества ограниченного остатка. В.Г.Журавлевым [9] была доказана аналогичная теорема в случае разбиения Рози порядка $n$, соответствующего уравнению (1). В настоящей работе мы доказываем аналогичный результат для разбиений Рози порядка $n$, соответствующих рассматриваемому нами классу уравнений.

## 2. Фрактал Рози и $\beta$-разложения

В настоящем параграфе мы приводим конструкцию фрактала Рози, развитую Акиямой [5], [25]–[27]. Отметим, что ряд используемых нами утверждений сформулированы здесь в несколько меньшей общности, по сравнению с исходными работами.

Пусть $\beta > 1$ – алгебраическое число Пизо степени $d$. Напомним, что числами Пизо называются вещественные алгебраические целые числа, большие единицы, абсолютная величина всех сопряженных которых строго меньше единицы. С каждым действительным $x$ можно связать его $\beta$-разложение вида [28]

$$x = \sum_{k=k(x)}^{m(x)} \varepsilon_k(x)\beta^k, \tag{3}$$

получаемое по так называемому жадному алгоритму. Здесь $k(x) \geq -\infty$, $m(x) < \infty$. Жадность разложения (3) означает, что для любого $m_1 \leq m(x)$ выполняются неравенства

$$0 \leq x - \sum_{k=m_1}^{m(x)} \varepsilon_k(x)\beta^k < \beta^{m_1}.$$

Пусть $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(r_1)}$ – действительные сопряженные, $\beta^{(r_1+1)}, \overline{\beta^{(r_1+1)}}, \ldots, \beta^{(r_1+r_2)}, \overline{\beta^{(r_1+r_2)}}$ – комплексные сопряженные к $\beta$. Ясно, что $r_1 + 2r_2 = d - 1$. Кроме того, из определения числа Пизо вытекает, что $|\beta| > 1$, $|\beta^{(k)}| < 1$.

Рассмотрим множество $\mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} \subset \mathbb{Q}(\beta)$, определяемое условием

$$\mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} = \{x : k(x) \geq 0\}.$$

Разложение (3) позволяет определить отображение

$$\Phi : \mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} \to \mathbb{R}^{d-1}$$

по правилу

$$\Phi(x) = (x^{(1)}, \ldots, x^{(r_1)}, \mathrm{Re} x^{(r_1+1)}, \mathrm{Im} x^{(r_1+1)}, \ldots, \mathrm{Re} x^{(r_1+r_2)}, \mathrm{Im} x^{(r_1+r_2)}),$$

где

$$x^{(j)} = \sum_{k=k(x)}^{m(x)} \varepsilon_k(x)(\beta^{(j)})^k.$$

Множество
$$\mathcal{T} = \overline{\Phi(\mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0})} \tag{4}$$
будем называть фракталом Рози. Здесь и далее черта сверху обозначает замыкание множества.

Геометрия фракталов Рози тесно связана с арифметикой $\beta$-разложений. В качестве примера приведем следующий результат [5].

Теорема 1. *$\beta$-разложение любого числа $x \in \mathbb{Q}(\beta)$ конечно тогда и только тогда, когда 0 является внутренней точкой фрактала Рози $\mathcal{T}$.*

Геометрические свойства фрактала Рози тесно связаны с разложением Реньи единицы [29] $d(1,\beta)$, определяемым следующим образом. Пусть
$$T_\beta(x) = \{\beta x\},$$
где $\{\cdot\}$ – дробная доля числа. Тогда
$$d(1,\beta) = c_{-1}c_{-2}\ldots,$$
где
$$c_{-k} = [\beta T_\beta^{k-1}(1)]$$
и $[\cdot]$ – целая часть числа. Процесс вычисления коэффициентов $c_{-k}$ прерывается, если $T_\beta^k(1) = 0$. Отметим, что разложение
$$1 - [\beta]\beta^{-1} = \sum_{k \leq -2} c_k \beta^k$$
является жадным. Также отметим, что разложение $d(1,\beta)$ может быть как конечным, так и бесконечным. Справедлива следующая теорема

Теорема 2. *Предположим, что длина слова $d(1,\beta)$ – конечна и последний элемент этого слова равен 1. Тогда $\mathcal{T}$ – линейно связное ограниченное множество и мера границы $\partial\mathcal{T}$ равна 0. Кроме того, для любого $x \in \mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0}$ $\Phi(x)$ – внутренняя точка множества $\mathcal{T}$. Пусть дополнительно длина разложения $d(1,\beta)$ равна $d$. Тогда имееет место решетчатое разбиение простанства $\mathbb{R}^{d-1}$ при помощи копий фрактала Рози $\mathcal{T}$:*
$$\mathbb{R}^{d-1} = \mathcal{T} + \Phi(r_1)\mathbb{Z} + \ldots + \Phi(r_{d-1})\mathbb{Z}.$$
*Здесь $r_k = 1 - T_\beta^k(1)$.*

Для проверки применимости условий теоремы 2 нам понадобится следующий результат [30].

Теорема 3. *Пусть $\beta$ является корнем уравнения*
$$\beta^d = a_1\beta^{d-1} + \ldots + a_{d-1}\beta + a_d.$$
*Тогда $d(1,\beta)$ конечно и имеет длину $d$ тогда и только тогда, когда*
$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{d-1} \geq a_d \geq 1. \tag{5}$$
*В этом случае*
$$d(1,\beta) = a_1 a_2 \ldots a_d.$$

Условие (5) в сочетании с условием
$$a_d = 1 \tag{6}$$
гарантирует выполнимость условий теоремы 2. Отметим, что условие (6) означает, что $\beta$ является обратимым элементом (единицей) кольца $\mathbb{Z}[\beta]$.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что условия (5) и (6) выполнены.

## 3. Разбиение Рози порядка 0

В случае классического фрактала Рози ($d = 3$ и $a_1 = a_2 = 1$) существует каноническое разбиение (2) [1] фрактала Рози $\mathcal{T}$ на три подобных ему фрактала. Разбиение (2) определяет перекладывание $S_{\mathcal{T}}$ областей $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{B}_0$, которое оказывается изоморфным сдвигу тора. При этом подобие множеств $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{G}_0$ и $\mathcal{B}_0$ исходному фракталу Рози $\mathcal{T}$ позволяет проитерировать разбиение (2) классическим методом инфляции-дефляции и получить бесконечную последовательность разбиений [9]. Однако, обобщение этого подхода на произвольные фракталы Рози наталкивается на принципиальные трудности, связанные с тем, что общее множество $\mathcal{T}$ не разбивается на подобные ему множества.

Для преодоления этих трудностей нам потребуется альтернативное определение фрактала Рози, основанное на понятии графа допустимости.

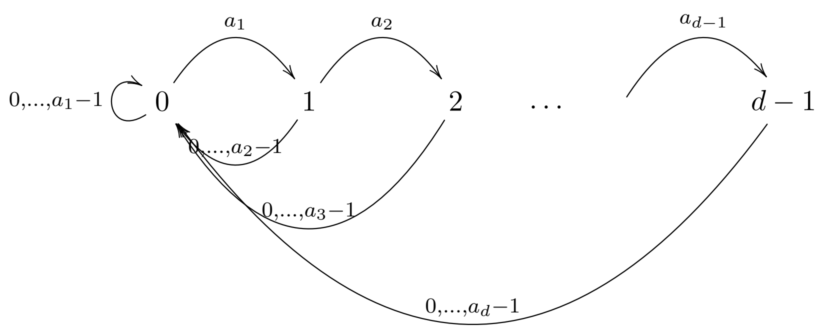
Граф допустимости представляет собой ориентированный граф с кратными ребрами и петлями. В случае рассматриваемого нами класса чисел Пизо данный граф содержит $d$ вершин, помеченных числами $0, 1, \dots, d-1$. Ребра графа имеют следующий вид:

1) $a_1$ ориентированных петель в вершине 0, помеченных числами от 0 до $a_1 - 1$;

2) ориентированные ребра из вершины $i$ в вершину $i+1$, помеченные числами $a_i$;

3) $a_{i+1}$ ориентированных ребер из вершины $i$ в вершину 0, помеченные числами от 0 до $a_{i+1} - 1$.

Обозначим граф допустимости черз $G(\beta)$. Он имеет следующий вид.




Каждому конечному пути $v_0 \xrightarrow{c_0} v_1 \xrightarrow{c_1} \dots \xrightarrow{c_{n-1}} v_n$ в графе $G(\beta)$ можно сопоставить слово $c_0 c_1 \dots c_{n-1}$, составленное из меток ребер пути. В случае $v_0 = 0$ полученные слова будем называть допустимыми.

Определение допустимых слов мотивировано следующим результатом [25].

Теорема 4. *Следующие условия эквивалентны*

*1) разложение* $x = \sum_{k=k(x)}^{m(x)} \varepsilon_k(x)\beta^k$ *является жадным;*

*2) слово* $\varepsilon_{m(x)}\varepsilon_{m(x)-1}\dots\varepsilon_{k(x)}$ *допустимо;*

*3) каждое подслово слова* $\varepsilon_{m(x)}\varepsilon_{m(x)-1}\dots\varepsilon_{k(x)}$ *лексикографически меньше слова* $d(1,\beta)$.

Из доказанной теоремы в частности вытекает, что любое подслово допустимого слова допустимо.

Пусть $Adm$ – множество допустимых слов. Определим отображение $\Phi_{Adm} : Adm \to \mathcal{T}$ равенством

$$\Phi_{Adm}(c_0 c_1 \dots c_{n-1}) = \Phi\Big(\sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1-k}\beta^k\Big).$$

Тогда из теоремы 4 немедленно получаем следующий результат.

Теорема 5. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{T} = \overline{\Phi_{Adm}(Adm)}.$$

Пусть теперь $Adm(j)$ – множество допустимых слов, для которых пути в графе $G(\beta)$ заканчиваются в вершине $j$. Определим множества

$$\mathcal{R}_j = \overline{\Phi_{Adm}(Adm(j))}.$$

Имеет место следующая теорема [25], [31].

Теорема 6. *Каждое множество $\mathcal{R}_j$ представляет собой линейно связное ограниченное множество и мера границы $\partial\mathcal{R}_j$ равна 0. Кроме того, различные множества $\mathcal{R}_j$ не имеют общих внутренних точек.*

Таким образом, мы получили разбиение

$$\mathcal{T} = \mathcal{R}_0 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{R}_{d-1}, \tag{7}$$

называемое разбиением Рози порядка 0.

В силу теоремы 2 фрактал Рози $\mathcal{T}$ является фундаментальной областью решетки

$$L = \sum_{k=1}^{d-1} \Phi(r_k)\mathbb{Z}.$$

Поэтому существует естественная проекция $\pi$ из $\mathcal{T}$ в $d-1$-мерный тор $\mathbb{T}^{d-1} = \mathbb{R}^{d-1}/L$.

Определим отображение $S : \mathbb{T}^{d-1} \to \mathbb{T}^{d-1}$ равенством

$$S(x) = x + \Phi(1) \pmod L.$$

Далее определим перекладывание $S_{\mathcal{T}}$ областей $\mathcal{R}_j$ равенством $S_{\mathcal{T}}(x) = x + \Phi(T_\beta^j(1))$, если $x \in \mathcal{R}_j$.

Также для допустимого слова $a \in Adm$ обозначим через $S_{Adm}(a)$ лексикографически следующее за $a$ слово из $Adm$. $S_{Adm}$ можно рассматривать как отображение $Adm \to Adm$.

Теорема 7. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
Adm \arrow[r, "S_{Adm}"] \arrow[d, "\Phi_{Adm}"] & Adm \arrow[d, "\Phi_{Adm}"] \\
\mathcal{T} \arrow[r, "S_{\mathcal{T}}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{T} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{T}^{d-1} \arrow[r, "S"] & \mathbb{T}^{d-1}
\end{tikzcd}$$

Коммутативность верхней части диаграммы можно найти в работе [31], коммутативность нижней части немедленно следует из определений и теоремы 2.

## 4. Множества ограниченного остатка I: случай разбиений порядка 0

Многомерную задачу о множествах ограниченного остатка удобно сформулировать следующим образом.

Пусть $L^d$ – некоторая $d$-мерная решетка, $\alpha$ – иррациональный относительно решетки $L^d$ вектор, то есть вектор, координаты которого в некотором базисе решетки $L^d$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$ вместе с единицей. Отображение сдвига

$$S_\alpha : x \to x + \alpha \bmod L^d$$

переводит тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/L^d$ в себя. Согласно теореме Вейля о равномерном распределении [32] для произвольной области $X \subset \mathbb{T}^d$ имеет место асимптотическая формула

$$\sharp\{k : 0 \le k < N, S_\alpha^k(0) \in X\} = \frac{|X|}{\det L^d} N + o(N). \tag{8}$$

Множество $X$ будем называть множеством ограниченного остатка, если асимптотику (8) можно улучшить до асимптотики

$$\sharp\{k : 0 \le k < N, S_\alpha^k(0) \in X\} = \frac{|X|}{\det L^d} N + O(1). \tag{9}$$

Впервые такие множества были введены Гекке [10].

Один из подходов к построению множеств ограниченного остатка основан на понятии перекладывающегося разбиения тора.

Пусть множество $T \subset \mathbb{R}^d$ является фундаментальной областью решетки $L^d$. Очевидно, что существует естественное отображение проекции $\pi : T \to \mathbb{T}^d$.

Рассмотрим теперь разбиение

$$\mathbb{T}^d = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}_d \tag{10}$$

$d$-мерного тора на непересекающиеся множества и порожденное им разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_d,$$

где $T_j = \pi^{-1}(\mathbb{T}_j)$.

Разбиение (10) будем называть перекладывающимся, если существуют векторы $v_0, \ldots, v_d$ такие, что отображение $S^* : x \to x + v_j$, если $x \in T_j$, переводит множество $T$ в себя и его действие на множестве $T$ совпадает с действием, индуцированным сдвигом $S_\alpha$, то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{S^*} & T \\ \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^d \end{array} \tag{11}$$

коммутативна.

Замечание 1. *Формально отображение $S^*$ не однозначно определено на границах множеств $T_j$. Точнее, если $x \in T_j \cap T_k$ можно положить как $T(x) = x + v_j$ так и $T(x) = x + v_k$. Однако, из коммутативности диаграммы (11) вытекает, что $v_j - v_k \in L^d$ и $\pi$-образы точек $x + v_j$ и $x + v_k$ на торе $\mathbb{T}^d$ совпадают. Таким образом, коммутативность диаграммы (11) при каком-то одном определении отображения $S^*$ на границах влечет ее коммутативность при любых возможных определениях $S^*$.*

Справедлива следующая теорема [18].

Теорема 8. *Множества $\mathbb{T}_j$, $j = 0, 1, \ldots, d$ являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига $S_\alpha$.*

Объединение теорем 7 и 8 немедленно приводит к следующему результату.

Теорема 9. *Множества $\pi(\mathcal{R}_j)$, $j = 0, 1, \ldots, d-1$ являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига $S$.*

Замечание 2. *Теоерму 9 вероятно можно доказать и иначе, используя методы исходной работы [1], однако соответствующее доказательство никогда не было опубликовано.*

## 5. Разбиения Рози порядка $n$

Пусть $Adm_n$ – множество допустимых слов длины $n$ и $Adm_n(j) = Adm_n \cap Adm(j)$.

Выберем некоторое слово $u \in Adm_{d-1}(j)$. Пусть $\widetilde{A}_n(j)$ – множество слов $w$ длины $n$, для которых слово $uw \in Adm$. Определение множества $\widetilde{A}_n(j)$ не зависит от выбора $u$, так как замена слова $u$ не меняет начальную вершину $j$ пути графа $G(\beta)$, соответствующего слову $w$. Пусть $w \in \widetilde{A}_n(j)$. Для $u \in Adm$ обозначим через $Adm(u)$ множество допустимых слов, заканчивающихся на слово $u$.

Заметим, что любое слово $v$ длины, большей или равной $n+2$ единственным образом представимо в виде $v = xuw$, где $x \in Adm$, $u \in Adm_{d-1}(j)$ и $w \in \widetilde{A}_n(j)$. Имеет место разбиение на непересекающиеся множества

$$Adm \setminus \bigsqcup_{k=0}^{n+1} Adm_k = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} \bigsqcup_{w \in \widetilde{A}_n(j)} Adm(uw). \tag{12}$$

При этом множество $\bigsqcup_{k=0}^{n+1} Adm_k$ очевидно является конечным.

Рассмотрим множества

$$\mathcal{R}_{n,j}(w) = \overline{\Phi_{Adm}\left(\bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} Adm(uw)\right)}.$$

Легко видеть, что при $n = 0$ имеем

$$\mathcal{R}_{0,j}() = \mathcal{R}_j,$$

так как, очевидно, $Adm(j) = \bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} Adm(u)$.

Определим отображения $B_{Adm} : Adm \to Adm$ формулой $B_{Adm}(a) = a0$, где слово $a0$ получено приписыванием нуля справа к слову $a$. Слово $a0$ является допустимым, так как из любой вершины графа $G(\beta)$ выходит дуга, помеченная символом 0.

Определим также отображение $B : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ при помощи коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} & \xrightarrow{\times\beta} & \mathbb{Z}[\beta]_{\geq 0} \\ \big\downarrow \Phi & & \big\downarrow \Phi \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{B} & \mathcal{T} \end{array} \tag{13}$$

где верхняя стрелка обозначает умножение на $\beta$. Легко видеть, что $B$ представляет собой аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^{d-1}$.

Из определений и (13) следует, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Adm & \xrightarrow{B_{Adm}} & Adm \\ \big\downarrow \Phi_{Adm} & & \big\downarrow \Phi_{Adm} \\ \mathcal{T} & \xrightarrow{B} & \mathcal{T} \end{array} \tag{14}$$

также коммутативна.

Далее заметим, что слово $w = 0^n$, состоящее из $n$ нулей принадлежит множествам $\widetilde{A}_n(j)$ при всех $j$. При этом

$$B^n_{Adm} Adm(j) = \bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} B^n_{Adm} Adm(u) = \bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} Adm(u0^n).$$

Отсюда, с учетом коммутативной диаграммы (14) получаем

$$B^n\mathcal{R}_j = \mathcal{R}_{n,j}(0^n).$$

Далее, заметим, что для слова $xuw \in Adm$ с $\Phi_{Adm}(xuw) \in \mathcal{R}_{nj}(w)$ имеем $xu0^n \in Adm$, $\Phi_{Adm}(xu0^n) \in \mathcal{R}_{nj}(0^n)$ и $\Phi_{Adm}(xu0^n) \in \mathcal{R}_{nj}(0^n) - \Phi_{Adm}(xuw) \in \mathcal{R}_{nj}(w) = \Phi_{Adm}(w)$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 10. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{R}_{n,j}(w) = B^n\mathcal{R}_j + \Phi_{Adm}(w).$$

Объединяя полученный результат с (12) и теоремой 6, получаем следующую теорему.

Теорема 11. *Имеет место разбиение*

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \bigsqcup_{w\in\widetilde{A}_n(j)} \mathcal{R}_{n,j}(w) \tag{15}$$

*фрактала Рози $\mathcal{T}$ на множества $\mathcal{R}_{n,j}(w)$, не имеющие общих внутренних точек. Каждое из множеств $\mathcal{R}_{n,j}(w)$ линейно связно и имеет границу нулевой меры.*

Разбиение (15) называется разбиением Рози порядка $n$.

Рассмотрим вопрос о взаимосвязи между разбиениями Рози различных порядков.

Теорема 12. *При $j > 0$ справедливо равенство*

$$\mathcal{R}_{n,j}(w) = \mathcal{R}_{n+1,j-1}(a_jw).$$

*Кроме того,*

$$\mathcal{R}_{n,0}(w) = \bigsqcup_{j'=0}^{d-1} \bigsqcup_{v\in\{0,1,\ldots,d-1\}} \mathcal{R}_{n+1,j'}(vw).$$

Вначале докажем первое из равенств. Из рассмотрения путей в графе $G(\beta)$ вытекает, что любое слово $u \in Adm_{d-1}(j)$ с $j > 0$ представимо в виде $u = u_1a_j$ с $u_1 \in Adm_{d-2}(j-1)$. Отсюда получаем

$$\bigsqcup_{u\in Adm_{d-1}(j)} Adm(uw) = \bigsqcup_{u_1\in Adm_{d-2}(j-1)} Adm(u_1a_jw).$$

Далее заметим, что любое слово из $Adm(u_1a_jw)$ имеет вид $xu_1a_jw$, где слово $x \in Adm$. Предположим, что слово $x$ непусто и представим $x$ в виде $x = x_1y$, где $y$ – последний символ слова $x$. Тогда слово $yu_1$ допустимо. В силу условий (5), $y \neq a_1$. Поэтому можно считать, что $y$ соответствует петле графа $G(\beta)$, расположенной в вершине 0 и, следовательно, $yu_1 \in Adm_{d-1}(j-1)$. Перебирая все допустимые значения $y$, получаем, что с точностью до конечного числа слов выполняется равенсто

$$\bigsqcup_{u_1\in Adm_{d-2}(j-1)} Adm(u_1a_jw) = \bigsqcup_{u'\in Adm_{d-1}(j-1)} Adm(u'a_jw)$$

и, следовательно, равенство

$$\bigsqcup_{u\in Adm_{d-1}(j)} Adm(uw) = \bigsqcup_{u'\in Adm_{d-1}(j-1)} Adm(u'a_jw).$$

Применяя к последнему равенству отображение $\Phi_{Adm}$ и осуществляя замыкания полученных точечных множеств, получаем требуемый результат. При этом мы учитываем, что отличие в конечном множестве точек исчезает при замыкании.

Перейдем теперь к рассмотрению случая $j = 0$. Из рассмотрения путей в графе $G(\beta)$ вытекает, что любое слово $u \in Adm_{d-1}(0)$ представимо в виде $u = u_1 v$, где $u_1 \in Adm_{d-2}(j')$, $0 \le j' \le d-1$ и $v \in \{0, 1, \dots, a_{j'+1} - 1\}$ – последний символ слова $u$. Отсюда получаем

$$\bigsqcup_{u \in Adm_{d-1}(j)} Adm(uw) = \bigsqcup_{j'=0}^{d-1} \bigsqcup_{u_1 \in Adm_{d-2}(j')} \bigsqcup_{v \in \{0,1,\dots,a_{j'+1}-1\}} Adm(u_1 v w).$$

Повторяя предыдущее рассуждение, получаем требуемый результат.

Следствие 1. *Разбиение Рози порядка $n$ является подразбиением разбиения Рози порядка $n-1$.*

## 6. Действие сдвига тора на разбиении

Наша следующая задача состоит в том, чтобы описать действие отображения $S_{\mathcal{T}}$ на разбиении Рози порядка $n$.

Теорема 13. *Пусть $w_{max}(n, j)$ – лексикографически максимальное слово из $\widetilde{A}_n(j)$. Тогда для любого слова $w \in \widetilde{A}_n(j)$, $w \neq w_{max}(n, j)$ найдется слово $w' \in \widetilde{A}_n(j)$, такое, что*

$$S_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}_{n,j}(w)) = \mathcal{R}_{n,j}(w').$$

Заметим, что точки вида $\Phi_{Adm}(xuv)$, где $x \in Adm$ и $u \in Adm_{d-1}(j)$ всюду плотны в $\mathcal{R}_{n,j}(w)$. При этом в силу теоремы 7,

$$S_{\mathcal{T}}(\Phi_{Adm}(xuv)) = \Phi_{Adm}(S_{Adm}(xuw)).$$

Выберем $w' = S_{Adm}(w)$. Тогда из условия $w \neq w_{max}(n, j)$ следует, что $S_{Adm}(xuw) = xuw'$. Отсюда вытекает, что все точки вида $S_{\mathcal{T}}(\Phi_{Adm}(xuv))$ принадлежат множеству $\mathcal{R}_{n,j}(w')$ и всюду плотны в нем. Переходя к замыканиям, получаем требуемый результат.

Рассмотрим теперь случай $w = w_{max}(n, j)$.

Теорема 14. *Справедливо равенство*

$$\bigsqcup_{j=0}^{d-1} S_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}_{n,j}(w_{max}(n, j))) = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \mathcal{R}_{n,j}(0^n).$$

Вначале докажем включение

$$\bigsqcup_{j=0}^{d-1} S_{\mathcal{T}}(\mathcal{R}_{n,j}(w_{max}(n, j))) \subseteq \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \mathcal{R}_{n,j}(0^n). \tag{16}$$

Для этого достаточно доказать, что для любого слова вида $xuw_{max}(n, j)$ с $x \in Adm$ и $u \in Adm_{d-1}(j)$ выполняется включение

$$S_{\mathcal{T}}(\Phi_{Adm}(xuw_{max}(n, j))) \in \mathcal{T}_n,$$

где

$$\mathcal{T}_n = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \mathcal{R}_{n,j}(0^n).$$

При этом множество $\mathcal{T}_n$ может быть записано в виде

$$\mathcal{T}_n = \overline{\Phi_{Adm} Adm(0^n)}.$$

В силу теоремы 7, имеем

$$S_{\mathcal{T}}(\Phi_{Adm}(xuw_{max}(n,j))) = \Phi_{Adm}(S_{Adm}(xuw_{max}(n,j))).$$

Поскольку $S_{Adm}(xuw_{max}(n,j)) \in Adm(0^n)$, получаем требуемое включение. Далее заметим, что отображение $S_{\mathcal{T}}$ взаимно-однозначно (за исключением, возможно, множества меры ноль) и сохраняет меру. Поэтому, сравнивая площади в левой и правой части (16), делаем вывод о невозможности строго включения, что и доказывает теорему 14.

Отметим, что из теоремы 10 вытекает, что множества $\mathcal{T}_n$ обладают свойством самоподобия

$$\mathcal{T}_n = B^n \mathcal{T}. \tag{17}$$

Пусть $X \subset \mathcal{T}$. Отображение

$$d_X S_{\mathcal{T}}(x) = S_{\mathcal{T}}^{n_X(x)}(x),$$
$$n_X(x) = \min\{k : k > 0, S_{\mathcal{T}}^k(x) \in X\}$$

называется отображением первого возвращения для отображения $S_{\mathcal{T}}$ и множества $X$. Пусть

$$d_n = d_{\mathcal{T}_n} S_{\mathcal{T}}.$$

Теорема 15. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{S_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} \\ \big\downarrow B^n & & \big\downarrow B^n \\ \mathcal{T}_n & \xrightarrow{d_n} & \mathcal{T}_n \end{array}$$

*коммутативна*

Достаточно доказать теорему 15 для точек вида $\Phi_{Adm}(x) \in \mathcal{T}$. В силу коммутативной диаграммы 14, имеем

$$B^n(\Phi_{Adm}(x)) = \Phi_{Adm}(x0^n)$$

и, в силу теоремы 7,

$$B^n(S_{\mathcal{T}}(\Phi_{Adm}(x))) = \Phi_{Adm}(S_{Adm}(x)0^n).$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$d_n(\Phi_{Adm}(x0^n)) = \Phi_{Adm}(S_{Adm}(x)0^n).$$

Данное равенство вытекает из определения $d_n$ и того факта, что в множестве $Adm(0^n)$ нет слов расположенных между $x0^n$ и $S_{Adm}(x)0^n$ (относительно лексикографического порядка).

Приведем два очевидных следствия из теоремы 15.

Следствие 2. *Отображение первого возвращения для сдвига тора $S$ и множества $\pi(\mathcal{T}_n)$ топологически сопряжено с $S$.*

Следствие 3. *Пусть $x \in \mathcal{T}_n$ и $Orb(x) = \{S_{\mathcal{T}}^k(x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Пусть также*

$$Orb_n(x) = Orb(x) \cap \mathcal{T}_n.$$

*Тогда*

$$B^n Orb(x) = Orb_n(x).$$

Следствие 3 означает, что орбита сдвига тора $S$ обладает свойством самоподобия.

# 7. Множества ограниченного остатка II: случай разбиений порядка $n$

В [19], [33] и [34] был введен ряд близких условий, при которых разбиение тора состоит из множеств ограниченного остатка. Здесь мы будем использовать вариант из работы [34].

В обозначениях раздела 4 рассмотрим разбиение $d$-мерного тора $\mathbb{T}^d$:

$$\mathbb{T}^d = \bigsqcup_{j=1}^{d+1} \bigsqcup_{i=0}^{\sharp E_j - 1} \mathbb{E}_j(i) \tag{18}$$

на непересекающиеся множества $d+1$ типа. Здесь $\sharp E_j$ – количество множеств типа $\mathbb{E}_j$.

Разбиение (18) порождает разбиение развертки

$$T = \bigsqcup_{j=1}^{d+1} \bigsqcup_{i=0}^{\sharp E_j - 1} E_j(i)$$

в котором $E_j(i) = \pi^{-1}(\mathbb{E}_j(i))$.

Разбиение (18) будем называть обобщенным перекладывающимся разбиением тора относительно сдвига $S_\alpha$, если выполняются три условия.

1) $S^*(E_j(i)) = E_j(i+1)$ для всех допустимых значений $i$, $j$.

2) Справедливо равенство

$$\bigsqcup_{j=1}^{d+1} E_j(0) = \bigsqcup_{j=1}^{d+1} S^*(E_j(\sharp E_j - 1))$$

и существуют векторы $w_j$ такие, что

$$S^*(E_j(\sharp E_j - 1)) - w_j = E_j(0).$$

3) Множество $E = \bigsqcup_{j=1}^{d+1} E_j(0)$ является разверткой некоторого тора.

Отметим, что условия 2) и 3) влекут за собой, что отображение первого возвращения для сдвига тора $S_\alpha$ на множестве $\bigsqcup_{j=1}^{d+1} \mathbb{E}_j(0)$ топологически сопряжено некоторому сдвигу тора.

Из теорем 13–15 и формулы 17 вытекает следующий результат.

Теорема 16. *Разбиение*

$$\mathbb{T}^{d-1} = \bigsqcup_{j=0}^{d-1} \bigsqcup_{w \in \widetilde{A}_n(j)} \pi(\mathcal{R}_{n,j}(w))$$

*является обобщенным перекладывающимся разбиением тора относительно сдвига $S$.*

В [34] был доказан следующий результат.

Теорема 17. *Обобщенное перекладывающееся разбиение тора является его разбиением на множества ограниченого остатка относительно сдвига $S_\alpha$.*

Объединяя теоремы 16 и 17, получаем основной результат работы.

Теорема 18. *Множества $\pi(\mathcal{R}_{n,j}(w))$ являются множествами ограниченного остатка относительно сдвига тора $S$.*

## 8. Заключение

В настоящей работе начато построение обобщенных разбиений Рози произвольных порядков, связанных с алгебраическими единицами Пизо. Введено общее определение таких разбиений и доказан ряд их базовых свойств. В частности, показано, что обобщенные разбиения Рози порождают обобщенные перекладывающиеся разбиения тора и, как следствие, состоят из множеств ограниченного остатка.

Отметим, что изучение классического разбиения Рози [1], [9] было тесно связано с разложениями натуральных чисел по последовательности трибоначчи,определяемой рекуррентным соотношением $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$. В настоящей работе для построения и изучения обобщенных разюиений Рози мы использовали иные методы, основанные на комбинаторике слов. Тем не менее, изучение связи обобщенных разбиений Рози с разложениями натуральных чисел по линейным рекуррентным последовательностям является интересной задачей, которой автор планирует посвятить одну из следующих работ.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France. 1982. Vol. 110. P. 147–178.

2. Arnoux P., Berthe V., Ei H., Ito S. Tilings, Quasicrystals, Discrete Planes, Generalized Substitutions, and Multidimensional Continued Fractions // Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceedings AA (DM-CCG). 2001. P. 059–078.

3. Arnoux P., Ito S. Pisot substitutions and Rauzy fractals // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2001. Vol. 8, № 2. P. 181–207.

4. Pytheas Fogg N. Substitutions in dynamics, aritheoremetics and combinatorics. Springer. 2001.

5. Akiyama S. Self affine tiling and Pisot numeration system // Number Theory and its Applications. Kanemitsu: Kluwer. 1999. P. 7–17.

6. Combinatorics, Automata and Number Theory. Edited by V. Berthe, M. Rigo. Cambridge University Press, 2010.

7. Siegel A., Thuswaldner J. Topological properties of Rauzy fractals. Memoires de la SMF. Vol. 118. 2009.

8. Shutov A. V., Maleev A. V. Generalized Rauzy fractals and quasiperiodic tilings // Classification and Application of Fractals: New Reserch. Nova Publishers. 2012. P. 55–111.

9. Журавлев В. Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2005. Т. 322. С. 83–106.

10. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math. Sem. Hamburg Univ. 1921. Vol. 5. P. 54–76.

11. Kesten H. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. 1966. Vol. 12, № 2. P. 193–212.

12. Oren I. Admissible functions with multiple discontinuities // Israel Journal of Mathematics. 1982. Vol. 42, № 4. P. 353–360.

13. Шутов А. В. Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 7. С. 168–175.

14. Красильщиков В. В., Шутов А. В. Описание и точные значения максимума и минимума остаточного члена проблемы распределения дробных долей // Математические заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 43–52.

15. Ferenczi S. Bounded remainder sets // Acta Arithmetica. 1992. Vol. 61, № 4. P. 319–326.

16. Grepstad S., Lev N. Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation // Geometric and Functional Analysis. 2015. Vol. 25, № 1. P. 87–133.

17. Rauzy G. Ensembles a restes bornes // Seminaire de theorie des nombres de Bordeaux 1983/1984. Vol. 24. Bordo, 1984. P. 1–12.

18. Журавлев В. Г. Многомерная теорема Гекке о распределении дробных частей // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 1. С. 95–130.

19. Кузнецова Д. В., Шутов А. В. Перекладывающиеся разбиения тора, подстановка Рози и множества ограниченного остатка // Математические заметки. 2015. Т. 98, № 6. С. 878–897.

20. Szüsz R. Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats // Acta Math.Acad.Sci.Hungar. 1954. Vol. 5, № 1. P. 35–39.

21. Liardet P. Regularities of distribution // Compositio Math. 1987. Vol. 61, № 3. P. 267–293.

22. Heynes A., Koivusalo H. Constructing bounded remainder sets and cut-and-project sets which are bounded distance to lattices // Israel Journal of Mathematics. 2016. Vol. 212, № 1. P. 189–201.

23. Абросимова А. А. BR-множества // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, № 2. С. 8–22.

24. Журавлев В. Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. Т. 392. С. 95-–145.

25. Akiyama S., Barat G., Berthe V., Siegel A. Boundary of central tiles associated with Pisot beta-numeration and purely periodic expansions // Monatshefte fur Mathematik. 2008. Vol. 155, № 3. P. 377–419.

26. Akiyama S. On the boundary of self-affine tilings generated by Pisot numbers // Journal of Math. Soc. Japan. 2002. Vol. 54, № 2. P. 283–308.

27. Akiyama S. Pisot number system and its dual tiling // Physics and Theoretical Computer Science. IOS Press. 2007. P. 133–154.

28. Parry W. On the $\beta$-expansions of real numbers // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1960. Vol. 11, № 3. P. 401–416.

29. Renyi A. Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 1957. Vol. 8, № 3. P. 477–493.

30. Frougny C., Solomyak B. Finite beta-expansions // Ergod. Th. and Dynam. Sys. 1992. Vol. 12, № 4. P. 713-–723.

31. Berthe V., Siegel A. Tilings associated with beta-numeration and substitution // Integers: Electronic journal of combinatorial number theory. 2005. Vol. 5, № 3. ♯A02.

32. Weyl H. Üeber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins // Math. Ann. 1916. Vol. 7, № 3. P. 313–352.

33. Журавлев В. Г. Индуцированные множества ограниченного остатка // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 5. С. 171–194.

34. Шутов А. В. Подстановки и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 2. С. 499-520.


## REFERENCES


1. Rauzy, G. 1982, “Nombres algébriques et substitutions“, *Bull. Soc. Math. France*, vol. 110, pp. 147–178.

2. Arnoux, P., Berthe, V., Ei, H. & Ito, S. 2001, “Tilings, Quasicrystals, Discrete Planes, Generalized Substitutions, and Multidimensional Continued Fractions“, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceedings AA (DM-CCG)*, pp. 059–078.

3. Arnoux, P.& Ito, S. 2001, “Pisot substitutions and Rauzy fractals“, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, vol. 8, no. 2, pp. 181–207.

4. Pytheas Fogg, N. 2001, *Substitutions in dynamics, aritheoremetics and combinatorics*, Springer.

5. Akiyama, S. 1999, “Self affine tiling and Pisot numeration system“, *Number Theory and its Applications*, Kluwer, Kanemitsu, pp. 7–17.

6. *Combinatorics, Automata and Number Theory* 2010, Edited by V. Berthe & M. Rigo. Cambridge University Press.

7. Siegel, A. & Thuswaldner, J. 2009, “Topological properties of Rauzy fractals“, *Memoires de la SMF*, vol. 118. .

8. Shutov, A. V. & Maleev A. V. 2012, “Generalized Rauzy fractals and quasiperiodic tilings“, *Classification and Application of Fractals: New Reserch*, Nova Publishers, pp. 55–111.

9. Zhuravlev, V. G. 2006, “Rauzy tilings and bounded remainder sets on the torus“, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 137, no 2, pp. 4658–4672. doi:10.1007/s10958-006-0262-z.

10. Hecke, E. 1921, “Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins“, *Math.Sem.Hamburg Univ.*, vol. 5, pp. 54–76. doi: 10.1007/BF02940580.

11. Kesten, H. 1966, “On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1“, *Acta Arithmetica*, vol. 12, no. 2, pp. 193–212.

12. Oren, I. 1982, “Admissible functions with multiple discontinuities“, *Israel Journal of Mathematics*, vol. 42, no. 4, pp. 353–360. doi:10.1007/BF0276141.

13. Shutov, A. B. 2007, “Optimal estimates in the problem of the distribution of fractional parts on bounded remainder sets“, *Vestnik SamGU. Estesstvennonauchnaya setiya*, no. 7, pp. 168–175.

14. Krasil’shchikov, V. V. & Shutov, A. V. 2011,“Description and Exact Maximum and Minimum Values of the Remainder in the Problem of the Distribution of Fractional Parts“, *Math. Notes*, vol. 89, no. 1, pp. 59–67. doi:10.1134/S000143461.

15. Ferenczi, S. 1992, “Bounded remainder sets“, *Acta Arithmetica*, vol. 61, no. 4, pp. 319–326. doi:10.4064/aa-61-4-319-326.

16. Grepstad, S. & Lev, N. 2015, “Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation“, *Geometric and Functional Analysis*, vol. 25, no 1, pp. 87–133. doi:10.1007/s00039-015-0313-z.

17. Rauzy, G. 1984, “Ensembles a restes bornes“, *Seminaire de theorie des nombres de Bordeaux 1983/1984*, vol. 24. Bordo. pp. 1–12.

18. Zhuravlev, V. G. 2013, “Multi-dimensional Hecke theorem on the distribution of fractional parts“, *St. Petersburg Math. J.*, vol. 24, no. 1, pp. 71–97. doi: 10.1090/S1061-0022-2012-01232-X.

19. Kuznetsova, D. V. & Shutov, A. V. 2015, “Exchanged Toric Tilings, Rauzy Substitution, and Bounded Remainder Sets“, *Mathematical Notes*, vol. 98, no. 5–6, pp. 932–948.

doi:10.1134/S0001434615110267.

20. Szüsz, R. 1954, “Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats“, *Acta Math.Acad.Sci.Hungar.*, vol. 5, no. 1, pp. 35–39.

doi:10.1007/BF02020384.

21. Liardet, P. 1987, “Regularities of distribution“, *Compositio Math.*, vol. 61, no. 3, pp. 267–293.

22. Heynes, A. & Koivusalo, H. 2016, “Constructing bounded remainder sets and cut-and-project sets which are bounded distance to lattices‘, *Israel J. Math.*, vol. 212, no. 1, pp. 189–201. doi:10.1007/s11856-016-1283-z.

23. Abrosimova, A. A. 2015, “BR-sets“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, no. 2, pp. 8–22.

doi:10.22405/2226-8383-2015-16-2-8-11.

24. Zhuravlev, V. G. 2012, “Exchanged toric developments and bounded remainder sets“, *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 184, no. 6, pp. 716—745. doi: /10.1007/s10958-012-0894-0.

25. Akiyama, S., Barat, G., Berthe, V. & Siegel, A. 2008, “Boundary of central tiles associated with Pisot beta-numeration and purely periodic expansions“, *Monatshefte fur Mathematik*, vol. 155, no. 3, pp. 377–419. doi:10.1007/s00605-008-0009-7.

26. Akiyama, S. 2002, “On the boundary of self-affine tilings generated by Pisot numbers“, *Journal of Math. Soc. Japan*, vol. 54, no. 2, pp. 283–308. doi:10.2969/jmsj/05420283.

27. Akiyama, S. 2007, “Pisot number system and its dual tiling“, *Physics and Theoretical Computer Science*, IOS Press, pp. 133–154.

28. Parry, W. 1950, “On the $\beta$-expansions of real numbers“, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 11, no. 3, pp. 401–416. doi:10.1007/BF02020954.

29. Renyi, A. 1957, “Representations for real numbers and their ergodic properties“, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*, vol. 8, no.3, pp. 477–493. doi:10.1007/BF02020331.

30. Frougny, C. & Solomyak, B. 1992, “Finite beta-expansions“, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, vol. 12. no. 4, pp. 713-–723. doi:10.1017/S0143385700007057.

31. Berthe, V. & Siegel A. 2005, “Tilings associated with beta-numeration and substitution“, *Integers: Electronic journal of combinatorial number theory*, vol. 5, no. 3, ♯A02.

32. Weyl, H. “Üeber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins“, *Math. Ann.*, vol. 7, no. 3, pp. 313–352. doi:10.1007/BF01475864.

33. Zhuravlev, V. G. 2017, “Induced bounded remainder sets“, *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 28, no. 5, pp. 671-688. doi:10.1090/spmj/1466.

34. Shutov, A. V. 2018, “Substitutions and bounded remainder sets“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 499-520. doi:10.22405/2226-8383-2018-19-2-499-520.

Получено 27.06.2018 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.