ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 511.223 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-361-371

Кольмановские операторы нормы и следа для многочленных формальных групп[1]

П. Н. Питаль, В. М. Поляков

Питаль Петр Николаевич — ассистент кафедры высшей алгебры и теории чисел, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: pital.petya@yandex.ru
Поляков Владимир Михайлович — студент на кафедре высшей алгебры и теории чисел, математико-механический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: vovtai71@yandex.ru

Аннотация

В статье исследуются аналоги для случая многочленной формальной группы операторов введенных Кольманом для формальных группа Любина–Тэйта и мультипликативной формальной группы. Даны явные конструкции операторов нормы и следа для рядов Лорана, проверены их основные свойства. Также изучены собственные и корневые значения этих операторов и построен гомоморфизм связывающий аддитивную структуру и структуру формального модуля на множестве формальных степенных рядов.

Ключевые слова: Локальные поля, Кольмановские операторы, формальные группы

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:
П. Н. Питаль, В. М. Поляков. Кольмановские операторы нормы и следа для многочленных формальных групп // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 361–371.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 511.223 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-361-371

Coleman norm and trace operators for polynomial formal groups[2]

P. N. Pital, V. M. Polyakov

Pital Petr Nikolaevich — assistant of the Department of higher algebra and number theory, St. Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: pital.petya@yandex.ru
Polyakov Vladimir Mikhailovich — student at the Department of higher algebra and number theory, faculty of mathematics and mechanics, St. Petersburg State University (St. Petersburg).
e-mail: vovtai71@yandex.ru

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 16-11-10200.
[2]Research is supported by the Russian Science Foundation grant 16-11-10200.

Abstract

In this paper are investigated a polynomial formal group analogues of the operators introduced by Coleman for the Lubin Tate formal group and the multiplicative formal group. Explicit constructions of the norm and trace operators for Laurent series are given, their main propirtes are checked. The eigenvalues and root values of these operators are also studied, and a homomorphism is constructed that connects the additive structure and the structure of the formal module on the set of formal power series.

Keywords: Local fields, Coleman operators, formal group

Bibliography: 9 titles.

For citation:
P. N. Pital, V. M. Polyakov, 2019, "Coleman norm and trace operators for polynomial formal groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 361–371.

1. Введение

Зафиксируем простое число p и положим $K = \mathbb{Q}_p$. Пусть H его произвольное неразветвлённое полное расширение. Обозначим $\mathcal{O}_K$ кольцо целых поля K и возьмём в качестве униформизующей p. Также зафиксируем какое-нибудь его алгебраическое замыкание Ω.

Через $\mathfrak{F}(X,Y) = X +_F Y = X + Y + aXY$ будем обозначать многочленный формальный групповой закон с параметром $a \in \mathcal{O}_H^\times$. Как известно ([1], [2], [3]), кольцо $\mathbb{Z}_p$ вкладывается в кольцо эндоморфизмов формальной группы $\mathfrak{F}$ следующим образом:

$$\forall b \in \mathbb{Z}_p \ \ [b](T) \equiv bT \bmod T^2$$

Более того для многочленной формальной группы известен (например см. [4]) явный вид:

$$[b](T) = \frac{1}{a}((1+aT)^b - 1)$$

Ядро эндоморфизма умножения на p^n, $\mathrm{Ker}[p^{n+1}](T)$ обозначим $\mathfrak{F}_n$. Хорошо известно ([5]), что $\mathfrak{F}_n$ имеет естественным образом определенную структуру $\mathcal{O}_K$-модуля.

Определим башню расширений полей $H_n = H(\mathfrak{F}_n)$, $n = 0, 1, ...$ с соответствующими им кольцами целых $\mathcal{O}_n$. Пусть $\mathfrak{F}_\infty = \bigcup_{n\geq 0} \mathfrak{F}_n$, $H_\infty = \bigcup_{n\geq 0} H_n$ и $\mathfrak{F}'_\infty = \mathfrak{F}_n \setminus \{0\}$. Обозначим за $v = (v_n)$ порождающую $\varprojlim \mathfrak{F}_n$ как $\mathcal{O}_K-$модуля. Через $T_{m,n}$ и $N_{m,n}$ будем обозначать обычные след и норму из H_m в H_n. Также обозначим $I = \mathcal{O}_H[[T]]$ и $\mathcal{M} = \mathcal{O}_H((T))^\times$.

В статье [6] доказана следующая лемма

Лемма 1. *Пусть $\{a\}_{i=1}^\infty$ последовательность различных элементов единичного шара B', такая что $\prod_{i=1}^\infty a_i = 0$, и пусть $\{g_n\}_{i=1}^\infty$ последовательность элементов $\mathcal{O}[[T]]$. Тогда, если $\lim_{n\to\infty} g_n(a_i) = 0$ для всех $i \geq 1$, то $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ в $\Omega((T))_1$.*

И из этой леммы непосредственно следует, так называемый, принцип единственности:

Предложение 1. *Если $f, g \in \mathcal{O}_H((T))$ и $f(u) = g(u)$ для всех $u \in \mathfrak{F}'_\infty$, то $f = g$.*

Доказательство. Это верно, поскольку $\prod_{u\in\mathfrak{F}'_\infty} u = 0$. □

Далее будем обозначать $f_{p^n} = f \circ [p^n]$ и ${}_uf = f(T +_F u)$ для $u \in \mathfrak{F}_\infty$, $f \in \mathcal{O}_H((T))$.

Замечание 1. *Следующие факты о многочленных формальных группах считаются известными, (см. например[4], [7]) :*

i $[p^n](T) = \frac{1}{a}((1+aT)^{p^n}-1) = C^1_{p^n}T + C^2_{p^n}aT^2 + ... + a^{p^n-1}T^{p^n}$

ii $u_n \in \mathfrak{F}_n$, *тогда* $u_n = \frac{\zeta_{n+1}-1}{a} \in \mathfrak{p}_n$

iii Логарифм формальной группы $\log(T) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a^iT^i}{ai} = \frac{1}{a}Log(1-aT)$

2. Основная часть

2.1. Оператор следа

В этом разделе мы определим Кольмановский оператор следа для нашего группового закона и проверим, что построенная конструкция будет обладать аналогичными свойствами, что и классический оператор Кольмана, введённый в [6].

Лемма 2. *Пусть* $f \in \mathcal{O}_H[[T]]$ *и* ${}_uf = f$ *для всех* $u \in \mathfrak{F}_0$. *Тогда найдется единственный* $g \in \mathcal{O}_H[[T]]$, *такой что* $g_p = f$.

Доказательство. Доказательство леммы полностью аналогично доказательству леммы 3 из [6] если в качестве униформизующей π выбрать нашу p. □

Определим оператор следа как отображение $\mathscr{S} : H((T)) \to H((T))$, удовлетворяющее тождеству $(\mathscr{S}(f))_p = \sum\limits_{u\in\mathfrak{F}_0} {}_uf$.

Замечание 2. *Доказательство следующей теоремы тоже не отличается от доказательства в классическом случае* $(a = 1)$, *но для порядка мы приведём его здесь*

Теорема 1. *Оператор следа существует и единственен.*

Доказательство. Единственность следует из того, что $[p]$ является обратимым рядом в $H[[T]]$.[]
Докажем существование: 1 шаг. $f \in \mathcal{O}_H[[T]]$. Положим $\mathfrak{S}(f) = \sum\limits_{u\in\mathfrak{F}_0} {}_uf$. Тогда ясно, что ${}_u\mathfrak{S}(f) = \mathfrak{S}(f)$. Воспользовавшись предыдущей леммой, получаем $g \in \mathcal{O}_H[[T]]$, такой что $g_p = \mathfrak{S}(f)$. Это и есть искомый $\mathscr{S}(f)$.
2 шаг. $f \in H[[T]]$. По построению видно, что $\mathscr{S}$ $\mathcal{O}_H-$линеен. Следовательно мы можем расширить его H-линейно на $H \otimes \mathcal{O}_H[[T]]$, которое плотно в $H[[T]]$ и поэтому $\mathscr{S}$ H-линейно расширяется так же и на $H[[T]]$.
3 шаг. $f \in H((T))$. Пусть n наименьшее, такое что $T^nf \in H[[T]]$. Тогда, очевидно, нужно положить $\mathscr{S}(f) = T^{-n}\mathscr{S}([p]^nf)$. □

Из доказательства ясно, что оператор $\mathscr{S}$ H-линеен и оставляет инвариантными $H((T))$, $\mathcal{O}_H[[T]]$, $\mathcal{O}_H((T))$. Также необходимо отметить следующее важное свойство построенного оператора, которое связывает обычный оператор следа с новым:

$$\mathscr{S}(f)(v_n) = T_{n+1,n}(f(v_{n+1}))$$

для $f \in H((T))$.
n-кратное применение оператора к $f \in I$ и композиция его с $[p^n]$ дает нам:

$$\mathscr{S}^n(f)_{p^n} = \sum_{u\in\mathfrak{F}_{n-1}} {}_uf$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathcal{O}_H((T))$, *тогда*

$$\mathscr{S}^n(f) \equiv 0 \bmod p^n\mathcal{O}_H((T))$$

Доказательство. Будем доказывать по индукции, докажем базу $n = 1$, индукционный переход очевиден.
1 шаг. $f \in \mathcal{O}_H[[T]]$. В этом случае легко видеть, что

$$\mathscr{S}(f)_p(T) = \mathscr{S}(f)(\frac{1}{a}((1+aT)^p - 1)) \equiv \mathscr{S}(f)(a^{p-1}T^p) \bmod pI$$

поскольку аргумент это многочлен, все коэффициенты которого, за исключением последнего, делятся на p. Далее заметим, что

$${}_u f(T) = f(T +_F u) \equiv f(T) \bmod \mathfrak{p}_0 I$$

где $\mathfrak{p}_0$ это максимальный идеал в $\mathcal{O}_0$ $(u \in \mathfrak{p}_0)$. Из этих сравнений можем заключить, что

$$\mathscr{S}(f)(a^{p-1}T^p) \equiv pf(T) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}_0 I$$

Следовательно $\mathscr{S}(f)(T) \equiv 0 \bmod pI$, поскольку a - обратимый элемент кольца, и коэффициенты ряда в левой части равенства лежат в $\mathcal{O}_H$.
2 шаг. $f \in \mathcal{O}_H((T))$. Как и в теореме выше найдем такое n, что $T^n f \in \mathcal{O}_H[[T]]$. Тогда

$$T^n \mathscr{S}(f) = \mathscr{S}([p]^n f) \equiv 0 \bmod pI$$

поделив на T^n получаем

$$\mathscr{S}(f) \equiv 0 \bmod p\mathcal{O}_H((T)).$$

□

2.2. Оператор нормы

Будем обозначать автоморфизм Фробениуса H_∞ над K как φ. Зададим действие φ на рядах $f \in H((T))$ покоэффициентно. Тогда очевидно, что $\mathscr{S}(\varphi f) = \varphi \mathscr{S}(f)$.

Теперь по аналогии с оператором следа введем оператор нормы. Будем называть оператором нормы отображение $\mathscr{N} : \mathcal{O}_H((T)) \to \mathcal{O}_H((T))$, удовлетворяющее тождеству

$$\mathscr{N}(f)_p = \prod_{u \in \mathfrak{F}_0} {}_u f$$

Теорема 3. *Оператор нормы $\mathscr{N}$ существует и единственен.*

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству того-же факта для оператора следа. □ Отметим важные свойства оператора нормы. Из определения можем видеть, что отображение $\mathscr{N}$ мультипликативно: $\mathscr{N}(fg) = \mathscr{N}(f)\mathscr{N}(g)$. $\mathscr{N}$ оставляет инвариантным $\mathscr{M} = \mathcal{O}_H((T))^\times$, а также I. Оператор нормы связан с обычной нормой следующим тождеством: $\mathscr{N}(f)(v_n) = N_{n+1,n}(f(v_{n+1}))$ для $f \in \mathcal{O}_H((T))$. Для дальнейших рассуждений важно будет отметить, что порядки полюса (или корня) в точке 0 у рядов $f \in \mathcal{O}_H((T))$ и $\mathscr{N}(f)$ совпадают, и что действие φ коммутирует с $\mathscr{N}$: $\mathscr{N}(\varphi f) = \varphi \mathscr{N}(f)$.
Теперь мы докажем техническую лемму, которая будет нам полезна в дальнейшем.

Лемма 3. *Пусть $f \in I$ и предположим, что $f_p \in p^n I$, тогда $f \in p^n I$*

Доказательство. Докажем по индукции. База $n = 0$ очевидна.
Индукционный переход: пусть утверждение верно для $n-1$. Положим $g = \frac{1}{p^{n-1}} f$. Тогда по предположению индукции, так как $f_p \in p^n I \subset p^{n-1} I$, то $f \in p^{n-1} I$, следовательно $g \in I$.

Заметим также, что $[p](T) \equiv a^{p-1}T^p \bmod pI$ и следовательно $g(a^{p-1}T^p) \equiv g_p(T) \equiv 0 \bmod pI$. То есть $g \in pI$, а следовательно $f \in p^n I$

$\square$

В следующей теореме будет важно какой мы выбрали параметр a нашей формальной группы. Обозначим группу всех единиц кольца целых $U = \mathcal{O}_H^\times$ и группу n-ых главных единиц $U_n = 1 + p^n\mathcal{O}_H$.

Теорема 4. *i Пусть $f \in 1 + p^i I$, где $i \geq 1$, и параметр формальной группы $a \in U$, тогда*

$$\mathscr{N}(f) \equiv 1 \bmod p^{i+1} I$$

ii Пусть $g \in \mathscr{M}$ и параметр формальной группы $a \in U$, тогда

$$\frac{\mathscr{N}(g)(a^{p-1}T)}{\varphi g(T)} \equiv 1 \bmod pI$$

iii Пусть $g \in \mathscr{M}$ и параметр формальной группы $a \in U_1$, тогда

$$\frac{\mathscr{N}^i(g)}{\varphi \mathscr{N}^{i-1}(g)} \equiv 1 \bmod p^i I$$

Доказательство.

i Заметим, что
$$_u f = f(T +_F u) = f(T + u + aTu) \equiv f(T) \bmod p^i \mathfrak{p}_0 I$$
для $u \in \mathfrak{F}_0$, и следовательно $\prod_{u \in \mathfrak{F}_0} {_u f} \equiv f^p \equiv 1 \bmod p^{i+1} I$, поскольку $f \in 1 + p^i I$. Тогда имеем
$$\mathscr{N}(f)_p = \prod_{u \in \mathfrak{F}_0} {_u f} \equiv 1 \bmod p^{i+1} I$$
И остается воспользоваться леммой 3.

ii Сначала докажем для $f \in I \cap \mathscr{M}$. Для начала заметим, что
$$\mathscr{N}(f)_p(T) \equiv \mathscr{N}(f)(a^{p-1}T^p) \bmod pI$$
а также $_u f \equiv f \bmod pI$, поэтому
$$\mathscr{N}(f)(a^{p-1}T^p) \equiv \mathscr{N}(f)(T)_p \equiv f(T)^p \equiv \varphi f(T^p) \bmod pI$$
теперь поделим на φf, сделаем замену переменной и получим
$$\frac{\mathscr{N}(f)(a^{p-1}T)}{\varphi f(T)} \equiv 1 \bmod pI$$
Теперь несложно доказать это для любого $f \in \mathscr{M}$, поскольку либо f, либо f^{-1} лежат в I, а также $\mathscr{N}(f)$ имеет в нуле тот же порядок полюса, что и f, поэтому дробь будет всегда элементом I.

iii Тут мы предполагаем, что параметр многочленной формальной группы a лежит в группе первых главных единиц. То есть $a = 1 + p\epsilon$, где $\epsilon \in \mathcal{O}_H$. Тогда
$$\mathscr{N}(f)(a^{p-1}T^p) \equiv \mathscr{N}(f)((1 + p\epsilon)^{p-1}T^p) \equiv \mathscr{N}(f)(T^p)$$

Дальше как и в пункте (ii) поделим на φf и проведём те же рассуждения. В итоге получим:

$$\frac{\mathscr{N}(f)}{\varphi f} \equiv 1 \bmod pI$$

Теперь применим $i-1$ раз тождество из пункта (i), воспользуемся мультипликативностью $\mathscr{N}$ и тем самым получим требуемое утверждение.

□

2.3. Собственные числа и функции операторов $\mathscr{N}$ и $\mathscr{S}$

Интересно заняться задачей поиска собственных значений и функций только что построенных нами операторов, а также операторов $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ и $\varphi^{-1}\mathscr{S}$.
Будем считать что наши операторы действуют из I в I, если не оговорено противное. Для начала введём некоторые обозначения. $\mathscr{M}^{\varphi}_{\mathscr{N}}$ и $\mathscr{M}^{\varphi}_{\mathscr{S}}$ будем обозначать собственные функции операторов $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ и $\varphi^{-1}\mathscr{S}$ соответственно.
Сначала будем работать с операторами $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ и $\varphi^{-1}\mathscr{S}$ и покажем как можно строить для них собственные функции. Начнем с оператора $\varphi^{-1}\mathscr{N}$.
Обозначим $c = a^{1-p}$ и возьмем $f \in \mathscr{M}$ и воспользуемся вторым пунктом теоремы 4:

$$\varphi^{-1}\mathscr{N}(f)(T) = f(cT)(1 + pk_1)$$

для некоторого $k_1 \in I$
Далее применим оператор $\mathscr{N}$ и φ^{-1} к обеим частям равенства и воспользуемся первым и вторым утверждениями теоремы 4:

$$\varphi^{-2}\mathscr{N}^2(f)(T) = f(c^2T)(1 + pk_1')(1 + p^2k_2)$$

для некоторых $k_1', k_2 \in I$
Продолжим этот процесс и перейдем к пределу, тогда бесконечное произведение в правой части сойдется, а также существует $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = s$, потому что c- единица.
Обозначим этот предел

$$\mathscr{N}_\infty(f) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{-n}\mathscr{N}^n(f)$$

Ясно что построеноое отображение является мультипликативным:

$$\mathscr{N}_\infty(fg) = \mathscr{N}_\infty(f)\mathscr{N}_\infty(g)$$

Как видно из построения $\mathscr{N}_\infty(f)$ обладает следующими замечательными свойствами, во первых:

$$\mathscr{N}(\mathscr{N}_\infty(f)) = \varphi\mathscr{N}_\infty(f)$$

и во вторых

$$\frac{\mathscr{N}_\infty(f)}{f(sT)} \equiv 1 \bmod pI$$

Тем самым мы получили

Предложение 2. *$\mathscr{N}_\infty(f) \in \mathscr{M}^{\varphi}_{\mathscr{N}}$, то есть $\mathscr{N}_\infty(f)$ является собственной функцией оператора $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ с собственным числом 1.*

Множества собственных функций с собственным числом 1 для операторов $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ и $\varphi^{-1}\mathscr{S}$ тесным образом связаны, а именно:

Предложение 3. *$\mathscr{M}^{1\varphi}_{\mathscr{S}} = Log(\mathscr{M}^{1\varphi}_{\mathscr{N}})$, где Log - это обычный логарифмический ряд (не логарифм формальной группы), и ряды берутся из $H((T))$*

Доказательство. Для начала заметим, что оператор нормы и следа связаны следующим соотношением:

$$Log(\mathscr{N}(f)) = \mathscr{S}(Log(f))$$

Докажем включение в одну сторону:
Пусть

$$\mathscr{N}(f) = \varphi f$$

Подействуем логарифмом и получим:

$$\mathscr{S}(Log(f)) = Log(\mathscr{N}(f)) = Log(\varphi f) = \varphi Log(f)$$

Для доказательство включения в другую сторону достаточно подействавать Log^{-1} на соответствующее тождество для оператора $\mathscr{S}$ $\square$ Более того легко увидеть, что Log устанавливает гомоморфизм между этими множествами.
Теперь выясним какие собственные числа и корневые значения могут быть у операторов $\mathscr{S}$ и $\varphi^{-1}\mathscr{N}$. И будем рассматривать их только из H, но если нас заинтересуют с.ч. и корневые значения из H_∞, то утверждение и доказательство следующей теоремы практически не поменяются, только $\mathcal{O}_H$ заменится на $\mathcal{O}_{H_\infty}$ и в доказательствах последних двух пункотв придется более аккуратно оценивать нормирования.

Теорема 5. *i Собственные числа оператора $\mathscr{S} : \mathcal{O}_H((T)) \to \mathcal{O}_H((T))$ лежат в $p\mathcal{O}_H$.*

ii Пусть $a \in U_1$, тогда собственные числа оператора $\varphi^{-1}\mathscr{N} : I \to I$ лежат в $1 + p\mathcal{O}_H$.

iii n-ые корневые значения оператора $\mathscr{S} : \mathcal{O}_H((T)) \to \mathcal{O}_H((T))$ лежат в $p\mathcal{O}_H$

iv Пусть $a \in U_1$, тогда n-ые корневые значения оператора $\varphi^{-1}\mathscr{N} : I \to I$ лежат в $1+p\mathcal{O}_H$

Доказательство.

i Пусть

$$\mathscr{S}(f) = bf$$

где $b \in H$, тогда применим к этому равенству n раз оператор $\mathscr{S}$ и воспользуемся теоремой 2:

$$b^n f = \mathscr{S}^n(f) \equiv 0 \bmod p^n\mathcal{O}_H((T))$$

Тогда если $b \notin p\mathcal{O}_H$, то левая часть равенства с ростом n убывает медленнее чем правая, чего не может быть, поэтому $b \in p\mathcal{O}_H$

ii Пусть

$$\mathscr{N}(f) = b\varphi f$$

где $b \in \mathcal{O}_H$, тогда по пункту (iii) теоремы 4 при $i = 1$ имеем:

$$b\varphi f = \mathscr{N}(f) = \varphi f(1 + pk)$$

где $k \in I$. Следовательно $1 + pk = b$, то есть k является константой, причем из $\mathcal{O}_H$ что и доказывает наше утверждение.

iii Пусть b является корневым значением нашего оператора, тогда для некоторой

$$f \in \mathcal{O}_H((T))$$

можем записать

$$(\mathscr{S} - b\mathcal{I})^n f = 0$$

где $\mathcal{I}$ тождественный оператор. Тогда распишем это равенство по биному Ньютона:

$$\mathscr{S}^n - nb\mathscr{S}^{n-1}f + ... \pm nb^{n-1}\mathscr{S}f \mp b^n f = 0$$

Тогда все слагаемые кроме последнего лежат в $p\mathcal{O}_H((T))$. Как и в предыдущих пунктах по линейности наших операторов не умаляя общности можем считать что $f \notin p\mathcal{O}_H((T))$. Поэтому $b^n \in p\mathcal{O}_H$ а из этого уже следует, что и $b \in p\mathcal{O}_H$.

iv Аналогично как в предыдущем пункте запишем всё то же самое для оператора $\varphi^{-1}\mathscr{N}$:

$$(\varphi^{-1}\mathscr{N} - b\mathcal{I})^n f = 0$$

Снова распишем это через бином Ньютона

$$\varphi^{-n}\mathscr{N}^n f - nb\varphi^{n-1}\mathscr{N}^{n-1}f + ... \pm nb^{n-1}\varphi^{-1}\mathscr{N}f \mp b^n f = 0$$

Заметим, что $\varphi^{-m}\mathscr{N}^m = f \cdot (1 + pk_m)$, где $k_m \in I$. Это следует из пунктов 3 и 1 теоремы 4. Поэтому можем написать

$$(1 + pk_1)f - nb(1 + pk_2)f + ... \pm nb^{n-1}(1 + pk_{n-1})f \mp b^n f = 0$$

Теперь сократим на f и рассмотрим значения по модулю pI:

$$C_n^0 - C_n^1 b + C_n^2 b^2 + ... \pm C_n^n b^n \equiv 0 \bmod pI$$

$$(1 - b)^n \equiv 0 \bmod pI$$

а из этого уже следует, что $b \in 1 + p\mathcal{O}_H$.

□

2.4. Гомоморфизм Θ

Далее будем считать что параметр нашей формальной группы $a \in U_1$. Обозначим $\mathfrak{M}$ максимальный идеал I, порожденный $p\mathcal{O}_H[[T]]$ и $T\mathcal{O}_H[[T]]$. Зададим на нём операцию сложения при помощи формального группового закона: $a +_F b$, для $a, b \in \mathfrak{M}$ и будем обозначать множество $\mathfrak{M}$ с этой структурой как $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$. Наша цель построить гомоморфизм из $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ в I хорошо согласованный с их структурами.

Лемма 4. *Пусть $i \geq 1$, $g, h \in I$, h удовлетворяет условию*

$$h(T) \equiv T^p \bmod p\mathcal{O}_H$$

i тогда

$$[p^i] \circ g \equiv [p^{i-1}] \circ \varphi g \circ h \bmod p^i\mathcal{O}_H$$

ii Если параметр формальной группы $a \in U$, то в этом случае

$$[p^i] \circ g \equiv [p^{i-1}] \circ a^{p-1}\varphi g \circ h \bmod p^i\mathcal{O}_H$$

Доказательство. Сначала докажем пункт (ii), из него простыми рассуждениями получим пункт (i).
Будем доказывать по индукции. База $i = 1$
Несложная цепочка сравнений дает требуемое утверждение:

$$[p] \circ g \equiv a^{p-1} g^p \equiv a^{p-1} \varphi g(T^p) \equiv a^{p-1} \varphi g \circ h \bmod p\mathcal{O}_H$$

Индукционный переход $i \to i + 1$.
Обозначим

$$A = [p^{i-1}] \circ a^{p-1} \varphi g \circ h$$

Запишем $[p]$ в виде $[p](T) = T^p a^{p-1} + pk_2(\mathrm{T})$
Напишем индукционное предположение:

$$[p^i] \circ g = [p^{i-1}] \circ (a^{p-1} \varphi g) \circ h + p^i k_1$$

И снова напишем цепочку очевидных сравнений из которой всё будет следовать:

$$[p^{i+1}] \circ g = [p] \circ ([p^i] \circ g) = (A + p^i k_1)^p a^{p-1} + pk_2(A + p^i k_1) \equiv$$
$$\equiv A^p a^{p-1} + pk_2(A) \equiv [p](A) = [p^i] \circ a^{p-1} \varphi g \circ h \bmod p^{i+1}\mathcal{O}_H$$

В случае пункта (i) $a \in U_1$, поэтому $a \equiv 1 \bmod p\mathcal{O}_H$, отсюда тривиально следует требуемое утверждение. □ Теперь определим отображение $\Theta : I \to I$ следующим образом:

$$\Theta(f) = \log(f) - \frac{\varphi \log(f \circ [p])}{p}$$

Теорема 6. *Θ является корректно определённым отображением. Более того, если Θ сузить на $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$, то Θ будет гомоморфизмом*

$$\Theta : \mathfrak{F}(\mathfrak{M}) \to A$$

где $A = \left\{ f \in I : f(0) \in \mathcal{O}_H, \frac{d}{dT}(f)(0) \in (1 - \varphi)\mathcal{O}_H \right\}$, в случае $p \neq 2$
и $A = \left\{ f \in I : f(0) \in (1 - \varphi)\mathcal{O}_H + p\mathcal{O}_H, \frac{d}{dT}(f)(0) \in (1 - \varphi)\mathcal{O}_H \right\}$ иначе.

Доказательство. Докажем для случая $p \neq 2$. Случай $p = 2$ рассматривается аналогично, более подробно он разобран в [6].
Известно ([7]) что логарифм формальной группы выражается следующим образом:

$$\log = \lim_{n \to \infty} \frac{[p^n]}{p^n}$$

Тогда

$$\log \circ g - \frac{\log \circ \varphi g \circ [p]}{p} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{[p^{n+1}] \circ g - [p^n] \circ \varphi g \circ [p]}{p^{n+1}} \right)$$

Как видно из леммы 4 выражение под знаком предела лежит в I, следовательно и сам предел там содержится. Этим мы доказали корректность Θ.
Проверим что в случае, когда область определения это $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$, Θ будет гомоморфизмом.

$$\Theta(f +_F g) = \log(f +_F g) - \frac{\varphi \log((f +_F g) \circ [p])}{p} =$$
$$= \log(f) + \log(g) - \frac{\varphi \log(f \circ [p])}{p} - \frac{\varphi \log(g \circ [p])}{p} = \Theta(f) + \Theta(g)$$

Теперь проверим, что Θ действует в точности в множество A.
В $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ содержатся ряды вида $pk_1(T) + Tk_2(T)$, где $k_1, k_2 \in I$. Докажем, что $\Theta(f)(0) \in \mathcal{O}_H$. Очевидно, что достаточно доказать это только для рядов f вида $f = pk_1(T)$.

$$\Theta(pk_1)(0) = \log(pk_1(0)) - \frac{\varphi \log(pk_1(0))}{p}$$

Аргументы обоих логарифмов лежат в максимальном идеале, и расписав логарифм в ряд и подставив аргумент с нормированием не меньшим единицы, мы получим значение с нормированием тоже не меньшим единицы, поэтому оба слагаемых лежат в $\mathcal{O}_H$. Осталось проверить, что производные имеют нужный вид.:

$$\frac{d}{dT}\Theta(f)(0) = f'(0)\log'(0) - \frac{\varphi(\log'(0)f'(0)[p]'(0))}{p} = f'(0)\log'(0) - \varphi(f'(0)\log'(0))$$

□

3. Заключение

В настоящей работе получено обобщение операторов следа и нормы для рядов Лорана, введённых Кольманом в статье [6]. Оказалось, что для построенных обобщенных операторов остаются верными многие результаты из [6], правда для некоторых из них требуются дополнительные условия на значения параметра многочленной формальной группы. Используя аналогичные результаты из [6], Кольман в своей работе [8] получает явную формулу для классического символа Гильберта (для круговых расширений $\mathbb{Q}_p$). Ожидается, что используя полученные результаты будет возможно получить аналогичные формулы для обобщенных символов Гильберта для формальных групп.

В разделе 2.3 ставится задача об отыскании собственных чисел и собственных функций операторов $\mathscr{N}$, $\mathscr{S}$, $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ и $\varphi^{-1}\mathscr{S}$. Оказалось, что мы можем переводить собственные функции с собственным числом 1 оператора $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ в собственные функции оператора $\varphi^{-1}\mathscr{S}$ и наоборот при помощи логарифмирования и экспоненцирования соответственно. Так же удалось доказать вложения множеств собственных чисел и корневых значений операторов $\mathscr{S}$ и $\varphi^{-1}\mathscr{N}$ в $p\mathcal{O}_H$ и $1 + p\mathcal{O}_H$ соответственно. Но остаётся открытым вопрос, все ли элементы этих множеств реализуются в качестве собственных и корневых значений соответствующих операторов.

В последней части статьи строится гомоморфизм

$$\Theta : \mathfrak{F}(\mathfrak{M}) \to A$$

согласованный со структурой формального модуля на $\mathfrak{F}$. Его значение в том что используя аналогичный гомоморфизм Кольман в своей статье [8] получает явную формулу символа Гильберта. Также в его работе [9] активно используются классические операторы $\mathscr{N}$, $\mathscr{S}$ и гомоморфизм Θ. Поэтому важно было отметить что данная конструкция переносится и на случай многочленных формальных групп для, возможно, получения аналогичных формул для обобщенных символов Гильберта.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lubin J. One-parameter formal Lie groups over p-adic integer rings, Annals of Math. 80 (1964), 464–484.

2. Frohlich A. Formal groups. Lecture Notes in Mathematics. Springer. 1968. Vol. 74.

3. Lubin J. Entireness of the endomorphism rings of one-dimensional formal groups, Proc. American Math. Soc. 52, (1975), 8–9.

4. Востоков С. В., Волков В. В., Пак Г. К. Символ Гильберта для многочленных формальных групп // Вопросы теории представлений алгебр и групп. 23, Зап. научн. сем. ПОМИ, 400, ПОМИ, СПб., 2012, 127–132; J. Math. Sci. (N. Y.), 192:2 (2013), 196–199.

5. Lubin, Jonathan, and John Tate. Formal Complex Multiplication in Local Fields // Annals of Mathematics, vol. 81, no. 2, 1965, pp. 380–387.

6. Coleman R. F. Division values in local fields // Invent. Math. 1979. Vol. 53. № 2. P. 91–116.

7. Hazewinkel, Michiel. (1978). Formal Groups and Applications.

8. Coleman, Robert F. The dilogarithm and the norm residue symbol. Bulletin de la Société Mathématique de France, Volume 109 (1981), pp. 373–402.

9. Coleman, Robert F. The arithmetic of Lubin-Tate division towers. Duke Math. J. 48 (1981), no. 2, 449–466.

REFERENCES

1. Lubin, J. One-parameter formal Lie groups over p-adic integer rings, Annals of Math. 80 (1964), 464–484.

2. Frohlich, A. Formal groups. Lecture Notes in Mathematics. Springer. 1968. Vol. 74.

3. Lubin, J. Entireness of the endomorphism rings of one-dimensional formal groups, Proc. American Math. Soc. 52, (1975), 8–9.

4. Vostokov, S. V., Volkov, V. V., Pak, G. K. “The Hilbert symbol of a polynomial formal group”, Problems in the theory of representations of algebras and groups. Part 23, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 400, POMI, St. Petersburg, 2012, 127–132; J. Math. Sci. (N. Y.), 192:2 (2013), 196–199.

5. Lubin, Jonathan, and John Tate. “Formal Complex Multiplication in Local Fields.” Annals of Mathematics, vol. 81, no. 2, 1965, pp. 380–387.

6. Coleman, R. F., 1979, “Division values in local fields“, *Invent. Math.*, vol. 53, no. 2, pp. 91–116.

7. Hazewinkel, Michiel. (1978). Formal Groups and Applications.

8. Coleman, Robert F. The dilogarithm and the norm residue symbol. Bulletin de la Société Mathématique de France, Volume 109 (1981), pp. 373–402.

9. Coleman, Robert F. The arithmetic of Lubin-Tate division towers. Duke Math. J. 48 (1981), no. 2, 449–466.

Получено 17.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.