

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 517.925

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-333-348

**Механизмы возникновения скрытой синхронизации
динамических систем**

С. С. Мамонов, И. В. Ионова, А. О. Харламова

Мамонов Сергей Станиславович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина (г. Рязань).

e-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Ионова Ирина Викторовна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина (г. Рязань).

e-mail: i.ionova@365.rsu.edu.ru

Харламова Анастасия Олеговна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина (г. Рязань).

e-mail: a.harlamova@365.rsu.edu.ru

Аннотация

В работе рассматривается одна из разновидностей радиотехнических систем, а именно — система частотно-фазовой автоподстройки частоты (ЧФАПЧ). Математическая модель такой системы описывается системой дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством. Для системы ЧФАПЧ определены условия формирования режимов скрытой синхронизации. Несмотря на многочисленные работы, посвященные системам ЧФАПЧ, открытыми остаются вопросы нахождения скрытой синхронизации, определение механизмов ее возникновения, нахождение условий бифуркаций циклов и изучение их сценариев, возникновения сложно модулированных колебаний. Условиями формирования скрытой синхронизации являются наличие в системе фазовой автоподстройки частоты режимов биения, колебательно-вращательных циклов, наличие мультистабильности. Под мультистабильностью понимают сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов, в частности аттракторами могут являться предельные циклы. Один из случаев мультистабильности — фазовая мультистабильность, когда аттракторы отличаются друг от друга значениями разности фаз между колебаниями системы. Фазовое пространство в системах с фазовой мультистабильностью оказывается более сложно устроенным, чем в системах с единственным устойчивым предельным циклом. В формировании мультистабильности определяющую роль играют неустойчивые предельные множества соответствующие ненаблюдаемым в эксперименте колебаниям. В связи с этим актуальным является разработка методов определения мультистабильности и определения механизмов ее появления. В связи с выше изложенным актуальной является задача разработки численных алгоритмов, позволяющих находить в радиотехнических системах сложно модулированные колебания и определять механизмы их возникновения. Предложены аналитические методы определения скрытой синхронизации системы ЧФАПЧ, позволяющие разработать эффективные вычислительные методы изучения математических моделей радиотехнических систем с применением компьютерных технологий.

Ключевые слова: скрытая синхронизация, система частотно-фазовой автоподстройки частоты, квазисинхронный режим, режим биений, колебательные циклы, вращательные

циклы, положительно инвариантное множество, вращение векторного поля, мультипликаторы, кривизна, показатели Ляпунова.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

С. С. Мамонов, И. В. Ионова, А. О. Харламова. Механизмы возникновения скрытой синхронизации динамических систем // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 333–348.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 517.925

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-333-348

Mechanisms for the origin of hidden synchronization of dynamic systems

S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova

Mamonov Sergey Stanislavovich — doctor of physical and mathematical Sciences, associate Professor, professor, department of mathematic and technique of teaching of mathematical disciplines, S. Yesenin Ryazan State University (Ryazan).

e-mail: s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Ionova Irina Viktorovna — candidate of physical and mathematical Sciences, senior lecturer, department of mathematic and technique of teaching of mathematical disciplines, S. Yesenin Ryazan State University (Ryazan).

e-mail: i.ionova@365.rsu.edu.ru

Kharlamova Anastassiya Olegovna — candidate of physical and mathematical Sciences, senior lecturer, department of mathematic and technique of teaching of mathematical disciplines, S. Yesenin Ryazan State University (Ryazan).

e-mail: a.harlamova@365.rsu.edu.ru

Abstract

One of the varieties of radio engineering systems is considered in the work, namely, a frequency-phase locked loop system FPLL. The mathematical model of such a system is described by a system of differential equations with a cylindrical phase space. For the FPLL system, the conditions for the formation of latent synchronization modes are defined. Despite the numerous works devoted to FPLL systems, the questions of finding hidden synchronization, determining the mechanisms of its occurrence, finding the conditions of bifurcation of cycles and studying their scenarios, the occurrence of complex modulated oscillations remain open. The conditions for the formation of hidden synchronization are the presence in the phase-locked loop system of the frequency of the beating modes, vibrational-rotational cycles, and the presence of multistability. By multistability we understand the coexistence of several attractors in the phase space, in particular, limit cycles can be attractors. One of the cases of multistability is phase multistability, when the attractors differ from each other by the values of the phase difference between the oscillations of the system. The phase space in systems with phase multistability is more complicated than in systems with a single stable limit cycle. In the formation of multistability, the decisive role is played by unstable limit sets corresponding to oscillations not observed in the experiment. In this regard, the development of methods for determining multistability and determining the mechanisms of its appearance is relevant. In connection with the above, the urgent task is to develop numerical algorithms that allow one to find complex modulated oscillations in radio engineering systems and determine the mechanisms of their

occurrence. Analytical methods for determining the latent synchronization of the PLL system are proposed, which allow developing effective computational methods for studying mathematical models of radio engineering systems using computer technologies.

Keywords: hidden synchronization, frequency-phase locked loop, quasi-synchronous mode, beat mode, vibrational cycles, rotational cycles, positively invariant set, vector field rotation, multipliers, curvature, Lyapunov exponents.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova, 2019, "Mechanisms for the origin of hidden synchronization of dynamic systems", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 333–348.

1. Введение

В работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений, описывающие динамику работы систем фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Так математическая модель системы частотно-фазовой автоподстройки частоты имеет вид [1–14],

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma) + d \frac{2\alpha\beta c^T x}{1 + \beta^2 (c^T x)^2}, \dot{\sigma} = c^T x, \quad (1)$$

где A — квадратная матрица размерности $n \times n$, $x, b, c, d \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varphi(\sigma)$ — Δ -периодическая функция.

Теория систем фазовой синхронизации регулярных сигналов достаточно хорошо развита. В фазовом пространстве системы режиму синхронизации соответствует устойчивое состояние равновесия. Для систем фазовой автоподстройки (ФАП) в работах В. В. Матросова, В. Д. Шалфеева [1, 13–15], показано, что при разных видах фильтра нижних частот может произойти нарушение устойчивости состояния равновесия и возникновение около него устойчивого предельного цикла. В этом случае в системе устанавливается квазисинхронный режим, для которого усредненная частота колебаний генератора совпадает с частотой внешнего сигнала, что определяет существование режима фазовой синхронизации.

Скрытая синхронизация основывается на понятии «скрытые колебания» сформулированного в работах Г. А. Леонова, Н. В. Кузнецова, И. М. Буркина. Характерной особенностью скрытых колебаний является невозможность попадания на него по траектории с начальными значениями из окрестности состояния равновесия. В данной работе под скрытой синхронизацией понимается наличие в системе устойчивого колебательного цикла, для которого усредненная частота колебаний генератора совпадает с частотой внешнего сигнала, при этом цикл не является «глобально устойчивым».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть для системы (1) существует колебательный цикл $z_*(t) = \text{colon}(x_*(t), \sigma(t))$ с периодом T , для которого

$$\langle \dot{\sigma} \rangle = T^{-1} \int_0^T \dot{\sigma}(t) dt = 0,$$

тогда цикл $z_*(t)$ определяет квазисинхронный режим системы фазовой синхронизации [13, 14].

С квазисинхронными режимами связано явление джиттера, которое определяется как отклонение временного положения информационных сигналов в трактах вычислительных и телекоммуникационных устройств от заданных значений. Джиттер является следствием совокупного действия множества дестабилизирующих факторов, специфичных для разных классов устройств хранения и передачи данных. Одним из факторов появления джиттера является

фазовая модуляция сигнала, при этом частота отклонения фазы называется частотой джиттера. Проблема выделения компонент джиттера представляет собой сложную техническую задачу, требующую разработку математического аппарата определения фазовой синхронизации.

Определение 2. Пусть у системы (1) существует колебательный цикл $z_*(t)$, определяющий режим квазисинхронизма системы фазовой автоподстройки, который не является «глобально» устойчивым, тогда система ФАП обладает скрытой синхронизацией.

В работе рассматриваются механизмы возникновения скрытой синхронизации динамических систем.

2. Поиск скрытой синхронизации

Один из механизмов возникновения скрытой синхронизации связан с использованием частотного управления радиотехнической модели (1). На базе принципа тора [2] разработаны аналитические методы определения квазисинхронных режимов [5, 7, 9, 10], которые позволяют использовать численные методы анализа частотно-амплитудных характеристик квазисинхронных режимов для системы ЧФАПЧ с фильтрами второго порядка.

В работах [5, 7–10] предлагаются новые конструкции для построения положительно-инвариантных тороидальных множеств, используемых для нахождения начальных условий колебательных циклов системы (1). Установлено, что устранение частотного кольца приводит к сохранению квазисинхронных режимов системы ФАПЧ, что позволяет определить численный метод обнаружения скрытой синхронизации системы ФАПЧ при отсутствии частотного кольца [7].

В настоящее время известны многочисленные результаты, связанные с бифуркацией колебательного цикла [2, 13–17]. Однако малоизученным является вопрос о количестве и методах обнаружения неустойчивых циклов, возникающих в результате бифуркации. Бифуркации циклов приводят к изменению характеристики $\dot{\sigma}$ квазисинхронного режима. Для оценки качества скрытой синхронизации предлагается использовать мультипликаторы циклов.

В системе (1) при заданных параметрах происходит бифуркация устойчивого однооборотного цикла $z_1^+(t)$ в устойчивый двухоборотный цикл $z_{2,2}^+(t)$, при этом наблюдается неустойчивый однооборотный цикл $z_{2,1}^-(t)$ [5]. В дальнейшем появляется один однооборотный неустойчивый цикл $z_{3,1}^-(t)$, один двухоборотный неустойчивый цикл $z_{3,2}^-(t)$ и один четырёхоборотный устойчивый цикл $z_{3,4}^+(t)$, при этом неустойчивый цикл $z_{2,1}^-(t)$ трансформируется в неустойчивый цикл $z_{3,1}^-(t)$. На рисунке 1 изображены циклы $z_{2,1}^-(t)$, $z_{2,2}^+(t)$, на рисунке 2 изображены циклы $z_{3,1}^-(t)$, $z_{3,2}^-(t)$, $z_{3,4}^+(t)$.

Численный анализ показал, что при бифуркации цикла происходит изменение значений $\langle \dot{\sigma}_{z_1^+(t)} \rangle = 0.008$, $\langle \dot{\sigma}_{z_{2,2}^+(t)} \rangle = 0.0589$, $\langle \dot{\sigma}_{z_{3,4}^+(t)} \rangle = 0.003$, для качества синхронизации получены мультипликаторы циклов $\mu_1(z_1^+(t)) = -0.81125$, $\mu_2(z_1^+(t)) = -0.01725$, $\mu_1(z_{2,2}^+(t)) = -0.14303$, $\mu_2(z_{2,2}^+(t)) = -0.00032$, $\mu_1(z_{3,4}^+(t)) = 0.19763$, $\mu_2(z_{3,4}^+(t)) = 1.7402 \cdot 10^{-7}$.

Следующий механизм появления скрытой синхронизации связан с появлением в системе (1) вращательных циклов или режимов биения в системе ФАПЧ.

Определение 3. [2] Решение $z(t, z_0) = \begin{pmatrix} x(t, x_0) \\ \sigma(t, \sigma_0) \end{pmatrix}$ системы (1) называется вращательным циклом, если существует $\tau > 0$, целое число $j \neq 0$, такие, что для любого t выполняются равенства $x(t + \tau, x_0) = x(t, x_0)$, $\sigma(t + \tau, \sigma_0) = \sigma(t, \sigma_0) + \Delta j$.

В случае реализации в системе вращательного цикла средняя частота колебаний генератора и частота внешнего сигнала не совпадают, что приводит к появлению у системы асинхронного режима [13, 14, 18, 19]. Вращательные режимы предшествуют режиму синхронизации,

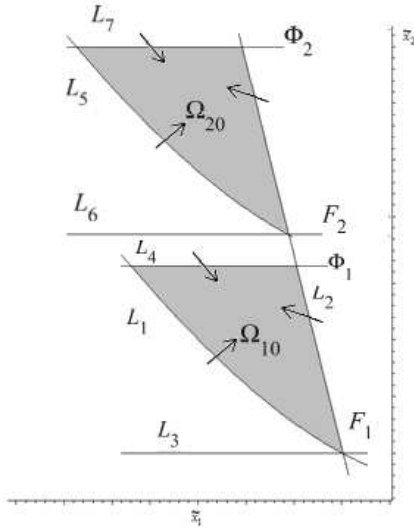


Рис. 1

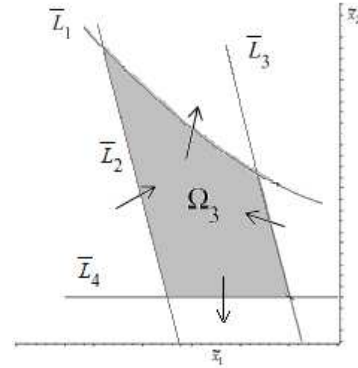


Рис. 2

что позволяет рассматривать их как генератор модулированных колебаний. Реализация в системе нескольких вращательных режимов позволяет выделить в системе область притяжения, которая определяет начальные условия режимов скрытой синхронизации системы ЧФАПЧ.

На рисунке 3 изображены области Ω_{10} и Ω_{20} , определяющие положительно инвариантные множества, содержащие начальные условия двух вращательных циклов системы (1). На рисунке 4 изображена область Ω_3 , определяющая гиперболически инвариантное множество, содержащее начальные условия неустойчивого вращательного цикла [6].

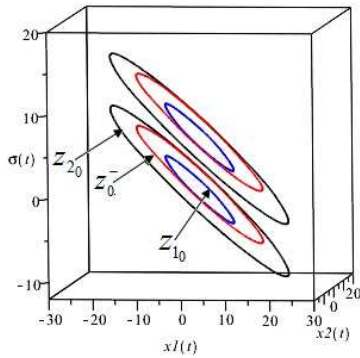


Рис. 3

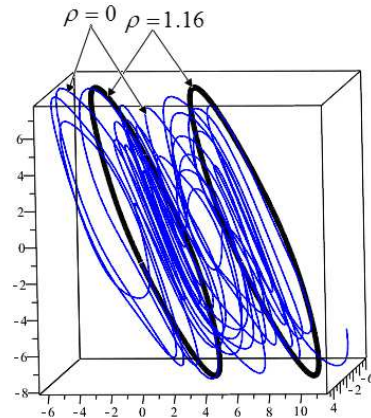


Рис. 4

Существование в системе ЧФАПЧ одновременно колебательных и вращательных режимов обеспечивает наличие скрытой синхронизации.

В случае отсутствия частотного кольца в системе ФАПЧ, для математической модели системы ФАПЧ рассматривается вспомогательная нефазовая система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \dot{\sigma} = c^T x + u\psi(\sigma), \quad (2)$$

где $x, b, c \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$, $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A = l^T$, $l^T b = -\nu_1 < 0$, $c^T A^{-1} \neq 0$, $\text{rang}[c, l] = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\psi(\sigma) = \nu_1 \beta_1^{-1} \varphi(\sigma) - \alpha_1 \sigma$, $\varphi(\sigma) - \Delta$ -периодическая функция, имеющая два нуля на периоде $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0$, $0 = \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$, $\dot{\varphi}(0) > 0$, $\dot{\varphi}(\sigma_2) < 0$, $\dot{\varphi}(\sigma)$

– ограничена на сегменте $[0; \Delta]$. Аналитически определяются условия существования циклов первого рода многомерной неавтономной системы дифференциальных уравнений (2)[9].

ТЕОРЕМА 1. Пусть для системы (2) выполнены условия:

1) $c^T b = -\Gamma < 0, c^T A = l^T, l^T b = -\nu_1 < 0, \text{rang} \|c, l\| = 2, l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T, \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, c^T A^{-1} b \neq 0$;

2) $\varphi(\sigma) = \beta_1 \nu_1^{-1} (\psi(\sigma) + \alpha_1 \sigma) - \Delta$ -периодическая функция, имеющая два нуля на периоде $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0, 0 = \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta, \dot{\varphi}(0) > 0, \dot{\varphi}(\sigma_2) < 0, \dot{\varphi}(\sigma)$ – ограничена на сегменте $[0; \Delta]$;

3) существует $r_2 > 0$ такое, что система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{y} = -\beta_1 \sigma - \Gamma \varphi(\sigma) - \varepsilon, \dot{\sigma} = y + u \psi(\sigma), \quad (3)$$

при $\varepsilon = \varepsilon_1^+ > r_2$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^+(\sigma), f_1^+(-\bar{\sigma}_1) = f_1^+(\bar{\sigma}_3) = 0, -\bar{\sigma}_1 < 0, \bar{\sigma}_3 > 0, f_1^+(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\bar{\sigma}_1; \bar{\sigma}_3)$;

4) существует $r_1 > 0$, что система (3) при $\varepsilon = \varepsilon_2^+ > r_1$ имеет решение, определяющее функцию $f_2^+(\sigma), f_2^+(-\bar{\sigma}_6) = f_2^+(\bar{\sigma}_5) = 0, -\bar{\sigma}_6 < -\bar{\sigma}_1 < 0, \bar{\sigma}_5 > \bar{\sigma}_3 > 0, f_2^+(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\bar{\sigma}_6; \bar{\sigma}_5)$;

5) система (3) при $\varepsilon = \varepsilon_1^- > r_1$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^-(\sigma), f_1^-(-\bar{\sigma}_1) = f_1^-(\bar{\sigma}_2), \bar{\sigma}_3 > \bar{\sigma}_2 > 0, f_1^-(\sigma) < 0$ для любого $\sigma \in (-\bar{\sigma}_1; \bar{\sigma}_2)$;

6) система (3) при $\varepsilon = \varepsilon_2^- > r_2$ имеет решение, определяющее функцию $f_2^-(\sigma), f_2^-(-\bar{\sigma}_4) = f_2^-(\bar{\sigma}_5) = 0, -\bar{\sigma}_6 < -\bar{\sigma}_4 < -\bar{\sigma}_1 < 0, f_2^-(\sigma) < 0$ для любого $\sigma \in (-\bar{\sigma}_4; \bar{\sigma}_5)$;

7) функции $f_1^+(\sigma), f_2^+(\sigma), f_1^-(\sigma), f_2^-(\sigma)$ удовлетворяют неравенствам $f_1^+(\sigma) < f_2^+(\sigma)$ при $\sigma \in (-\bar{\sigma}_6; \bar{\sigma}_5), f_2^-(\sigma) < f_1^-(\sigma)$ при $\sigma \in (-\bar{\sigma}_4; \bar{\sigma}_5)$;

8) для любого $\sigma \in [-\bar{\sigma}_6; -\bar{\sigma}_4]$ выполняется соотношение $-\beta_1 \sigma - r_2 - \Gamma \varphi(\sigma) > 0$;

9) справедливо неравенство $r_1 - \beta_1 \sigma - \Gamma \varphi(\sigma) < 0$ для любого $\sigma \in [\bar{\sigma}_2; \bar{\sigma}_3]$;

10) при $(-m_1) = \min_{\sigma \in [-\bar{\sigma}_6, \bar{\sigma}_5]} \psi(\sigma)$ выполняется неравенство $\alpha_1 r_1 > \beta_1 m_1 (1 - u)$ и для $(M_1) = \max_{\sigma \in [-\bar{\sigma}_6, \bar{\sigma}_5]} \psi(\sigma)$ верно соотношение $\alpha_1 r_2 > \beta_1 M_1 (1 - u)$

Тогда система (2) имеет колебательный цикл.

С использованием пакета прикладных программ Maple разработаны численные методы анализа трансформации цикла неавтономной системы (2) в цикл фазовой системы дифференциальных уравнений. Предложены критерии близости циклов двух систем, основанные на метрических характеристиках циклов и мультипликаторном анализе [9]. Для системы (2) проведена классификация сложных колебательно-вращательных режимов системы ФАПЧ, сопровождающих скрытую синхронизацию.

Определение 4. Вращательный цикл $\omega(t, z_0) = \text{colon}(x(t, z_0), \sigma(t, z_0))$ называется циклом колебательно-вращательным структуры $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, если для него существует $T > 0$, и для любого $t \geq 0$ выполняются равенства $x(t + T, z_0) = x(t, z_0), \sigma(t + T, z_0) = \sigma(t, z_0) + m\Delta$, Δ – период функции $\varphi(\sigma)$ системы (2), функция $\dot{\sigma}(t) = c^T x$ имеет $2k_i$ нулей на промежутке $\sigma \in [(i-1)\Delta; i\Delta], i = \overline{1, m}$.

В частности, если цикл второго рода $\omega(1, 0, 2)$ имеет структуру $(1, 0, 2)$, то для него $m = 3$, существует $T > 0$, и для любого $t \geq 0$ выполняются равенства $x(t + T, z_0) = x(t, z_0), \sigma(t + T, z_0) = \sigma(t, z_0) + 6\pi, \Delta = 2\pi$. Функция $\dot{\sigma}(t) = c^T x$ имеет 2 нуля на промежутке $\sigma \in [0; 2\pi]$, не имеет нулей на сегменте $\sigma \in [2\pi; 4\pi]$ и имеет 4 нуля на промежутке $\sigma \in [4\pi; 6\pi]$. Значения $2k_i, i = \overline{1, m}$ определяют колебательные характеристики цикла $\omega(t, z_0)$, а именно число оборотов проекции цикла на плоскость (x_1, x_2) .

У системы (2) наряду с устойчивым колебательным циклом при изменении параметра α_1 могут появляться как вращательные, так и колебательно-вращательные предельные циклы [11]. На рисунке 5 изображены два устойчивых колебательно-вращательных цикла $z_{4\pi, (1;0)}^+(t)$,

$z_{4\pi,(0;1)}^+(t)$, неустойчивый цикл второго рода $z_{2\pi,\text{в}}^-(t)$ и устойчивые циклы первого рода $z_k^+(t)$. На рисунке 6 изображены проекции циклов $z_k^+(t)$, $z_{2\pi,\text{в}}^-(t)$, $z_{4\pi,(1;0)}^+(t)$, $z_{4\pi,(0;1)}^+(t)$ на плоскость (x_1, x_2) при этом проекции колебательно-вращательных циклов $z_{4\pi,(1;0)}^+(t)$, $z_{4\pi,(0;1)}^+(t)$ на плоскость (x_1, x_2) совпадают.

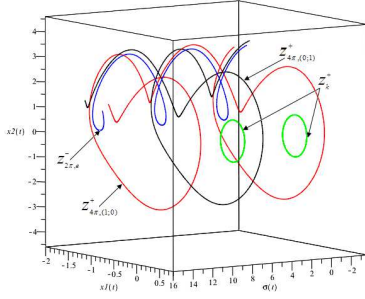


Рис. 5

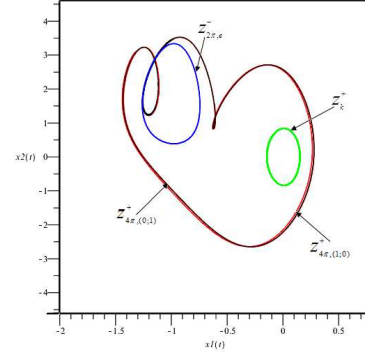


Рис. 6

3. Мультистабильность квазисинхронных режимов

Условиями формирования скрытой синхронизации являются наличие в системе фазовой автоподстройки мультистабильности. Под мультистабильностью понимают сосуществование в фазовом пространстве нескольких аттракторов, в частности аттракторами могут являться предельные циклы. Одним из условий появления мультистабильности в системе ФАПЧ является использование запаздывания. Динамика рассматриваемой системы фазовой автоподстройки с запаздыванием описывается операторным уравнением [13],

$$p\sigma + K_\varphi(p)K_\tau(p)\Omega_y F(\sigma) = \Omega_H, \quad (4)$$

где $K_\varphi(p)$ — коэффициент передачи фильтров нижних частот в фазовой цепи управления, $K_\tau(p) = e^{-\tau p} \approx (1 - \tau p)$ — операторный коэффициент запаздывания, τ — время запаздывания.

Для математической модели система ФАПЧ с запаздыванием рассматривается вспомогательная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \dot{\sigma} = c^T x + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0(1 - u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma, \quad (5)$$

где $x, b, c \in \mathbb{R}^2$, $u \in [0; 1]$, $\alpha_1, \rho_1, \rho_0 \in \mathbb{R}$. Запаздывание в системе автоподстройки определяет значение параметра $\rho = \rho_1 + \rho_0 > 0$, при отсутствии запаздывания выполняется равенство $\rho = 0$. При $u = 0$ система (5) примет вид

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \dot{\sigma} = c^T x + \rho\varphi(\sigma). \quad (6)$$

Аналитическими методами определяются условия для параметра $u = u^*$ при котором существует цикл многомерной нефазовой системы дифференциальных уравнений (5) [8]. Численными методами определяется трансформация цикла системы (5) в цикл системы (6) при $u = 0$. Показано, что запаздывание может быть использовано для подавления хаотически модулированных режимов биений и формирования на их базе квазисинхронных режимов обеспечивающих фазовую синхронизацию.

Показывается, что система (5) при $u = 0.918$ имеет устойчивый цикл первого рода $z_1(t)$ с начальными условиями $x_1 = -0.047922$, $x_2 = 6.207151$, $\sigma = 0.1$, $\langle \dot{\sigma} \rangle = 0.0044$ [8]. Мультипликаторы цикла $z_1(t)$ определяются значениями $\mu_1 = 1.0$, $\mu_2 = 0.102437$, $\mu_3 = 0.956714$. Численно

показывается, что при уменьшении значения u до $u = 0$, цикл $z_1(t)$ системы (5) трансформируется в цикл $z_{10}(t)$ фазовой системы (6) с начальными условиями $x_1 = -0.866482$, $x_2 = 5.913351$, $\sigma = 0.1$, $\langle \dot{\sigma} \rangle = 0.00061$ и мультипликаторами $\mu_1 = 1.0$, $\mu_2 = 0.1065$, $\mu_3 = 0.9744$. При этом мультипликаторный коэффициент аппроксимации циклов $A_\rho = 2.83\%$, следовательно, цикл системы (5) является поражающим для цикла системы (6) [8].

Аналогично образом можно выяснить, что система (6) имеет устойчивый цикл $z_{20}(t)$ с начальными условиями $x_1 = -1.2813$, $x_2 = 14.3064$, $\sigma = 0.1$, $\langle \dot{\sigma} \rangle = 0.0014$, $\mu_1 = 1.0$, $\mu_2 = 0.2861$, $\mu_3 = 0.9857$; неустойчивый цикл $z_0^-(t)$ с начальными условиями $x_1 = -0.339472$, $x_2 = 9.911372$, $\sigma = 0.1$, $\langle \dot{\sigma} \rangle = 0.0009$, $\mu_1 = 1.0$, $\mu_2 = 3.9$, $\mu_3 = 1.0159$ [8]. Взаимное расположение циклов $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$, $z_0^-(t)$ фазовой системы (6) в случае запаздывания изображено на рисунке 7. Для обнаружения неустойчивого цикла предложены численные методы, основанные на использовании вращения веторного поля [4, 5, 7, 9, 20]. На рисунке 8 изображены режим биения при отсутствии затухания $\rho = 0$ и квазисинхронные режимы при наличии затухания $\rho = 1, 16$.

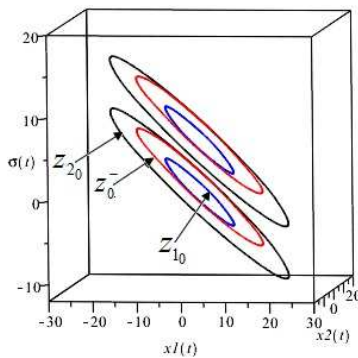


Рис. 7

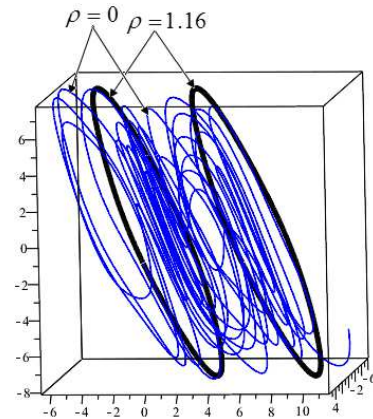


Рис. 8

Показано, что механизмом возникновения скрытой синхронизации является формирование мультистабильности, связанной с характеристиками запаздывания. Мультипликаторы циклов являются показателями устойчивости цикла или быстроты стремления траектории к циклу, поэтому предложено использовать мультипликаторы цикла как критерий выбора квазисинхронных режимов в случае мультистабильности. Запаздывания может быть использовано для подавления хаотически модулированных режимов биения и формированию на их базе квазисинхронных режимов, обеспечивающих фазовую синхронизацию рисунок 8. Полученные результаты позволяют получить практические рекомендации для определения параметров фильтров второго порядка с запаздыванием, при которых в системе ФАП наблюдается мультистабильность, то есть одновременное наличие квазисинхронных режимов с разными частотными характеристиками, что позволяет использовать систему ФАП как генератор многочастотных колебаний.

4. Характеристики кривизны циклов при мультистабильности

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений (5), (6). Для систем дифференциальных уравнений актуальным является вопрос реализации бифуркационных процессов, определение нелинейных колебаний и их анализ [1, 2, 13, 14, 15, 18, 19]. Предлагается изучать близость циклов систем (5) и (6) с использованием понятия кривизны цикла, а так же использовать кривизну цикла для выбора скрытой синхронизации в случае мультистабильности [12].

Пусть функция $z(t) = colon(x_1(t), x_2(t), \sigma(t))$ — определяет цикл системы (5), тогда под

кривизной цикла будем понимать величину

$$K(t) = \frac{\sqrt{[z'(t) \times z''(t)]^2}}{(z'^2(t))^{3/2}}, \quad (7)$$

где $z'(t) = colon(x'_1(t), x'_2(t), \sigma'(t))$, $z'^2 = z'^T \cdot z'$, $z''(t) = colon(x''_1(t), x''_2(t), \sigma''(t))$, а символ « $\times$ » — обозначает векторное произведение. В данной работе предлагается рассмотреть зависимость кривизны циклов от координат фазовой и нефазовой систем и использовать кривизну циклов для анализа мультистабильности. Для нахождения зависимости кривизны цикла системы (5) от ее координат определим расширенную систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = c^T x + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma, \\ \dot{K}(t) = \psi(\sigma, x) \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (8), где $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -\nu_1 \\ -\Gamma \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\varphi(\sigma) = -\gamma + \sin(\sigma + \arcsin \gamma)$, $\varphi(0) = 0$, найдем $c^T b = -\Gamma$, $c^T A = l^T$, $l^T b = -\nu_1 < 0$, $\nu = -\nu_1$, $\text{rang}[c, l] = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $c^T A^{-1} b \neq 0$, $\rho = \rho_1 + \rho_0 > 0$. Функция $\psi(x)$ определяется равенством $\psi(x) = \frac{g'f - 3gf'}{2g^{1/2}f^{5/2}}$, где

$$\begin{aligned} g(x; \sigma) &= (x'_1 x''_2 - x''_1 x'_2)^2 + (x'_2 \sigma'' - x''_2 \sigma')^2 + (\sigma' x'_1 - \sigma'' x'_1)^2, \\ g'(x; \sigma) &= 2(x'_1 x''_2 - x''_1 x'_2)(x'_1 x'''_2 - x'''_1 x'_2) + 2(x'_2 \sigma'' - x''_2 \sigma')(x'_2 \sigma''' - x'''_2 \sigma') + \\ &\quad + 2(x''_1 \sigma' - x'_1 \sigma'')(x'''_1 \sigma' - x'_1 \sigma'''), \\ f(x; \sigma) &= x_1'^2 + x_2'^2 + \sigma'^2, \\ f'(x; \sigma) &= 2x'_1 x''_1 + 2x'_2 x''_2 + 2\sigma' \sigma''. \end{aligned}$$

Основываясь на исследованиях, проведенных в работе [12] показывается, что при $\alpha_1 = 0.01$, $\beta_1 = 1.98$, $\Gamma = 1.2$, $\nu = -2.26$, $\gamma = 0.1$, $u = 0.918$, $\rho_1 = \nu_1 \beta_1^{-1} = 1.14$, $\rho_0 = 0.02$ система (8) имеет пять колебательных циклов, где $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$ — устойчивые, а $z_4^-(t)$ и $z_5^-(t)$ — неустойчивые циклы. При $u = 0$ система (8) становится фазовой системой, у которой также существует пять колебательных циклов $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$, $z_{30}(t)$ — устойчивые, а $z_{40}^-(t)$ и $z_{50}^-(t)$ — неустойчивые циклы. Основные характеристики всех колебательных циклов приведены в таблице 1, где $z(t)$ — цикл системы, x_1 , x_2 , σ — начальные условия цикла, T_z — период цикла, $\langle K(t) \rangle$ — среднее значение кривизны цикла на периоде.

На рисунке 9 представлены проекции циклов $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$, $z_{30}(t)$ фазовой системы (8) на плоскость $(x_2; \sigma)$. На рисунке 10 в пространстве $(x_1; x_2; K(t))$ изображены линии L_1, L_2, L_3 , определяющие решениями системы (8), с начальными условиями циклов $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$, $z_{30}(t)$ системы (8).

Таблица 1: Циклы фазовой системы.

Циклы фазовой системы (8) $u = 0, \sigma = 0$					
$z(t)$	$z_{10}(t)$	$z_{20}(t)$	$z_{30}(t)$	$z_{40}^-(t)$	$z_{50}^-(t)$
x_1	-0.866482	-1.2813	-1.6773	0.339472	0.52238
x_2	5.913351	14.3064	22.7464	9.911372	19.06786
T_z	4.5866	4.4741	4.4618	4.49677402	4.46586352
$\langle K(t) \rangle$	0.1513	0.0582	0.0363	0.0831	0.0432

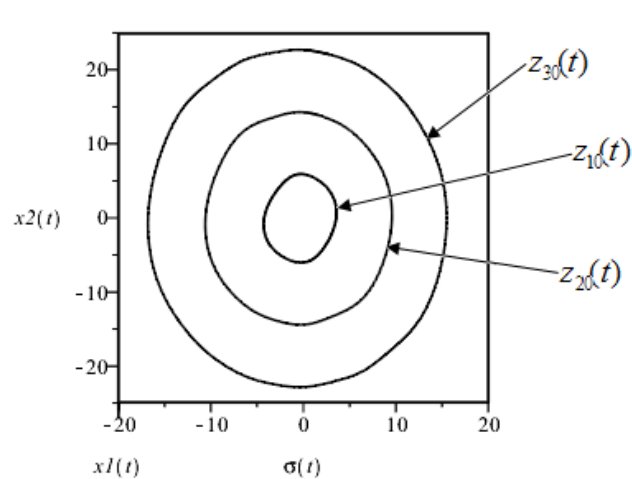


Рис. 9

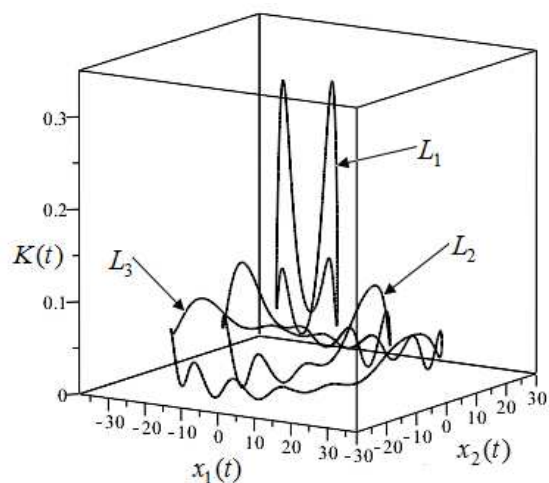


Рис. 10

На рисунке 11 изображены линии L_{z10}^1 и L_{z1}^1 , показывающие зависимость кривизны $K(t)$ циклов $z_{10}(t)$ и $z_1(t)$ фазовой и нефазовой систем от координаты $x_1(t)$. На рисунке 12 представлены зависимости кривизны от координат $x_2(t)$ (Линии: L_{z10}^2, L_{z1}^2).

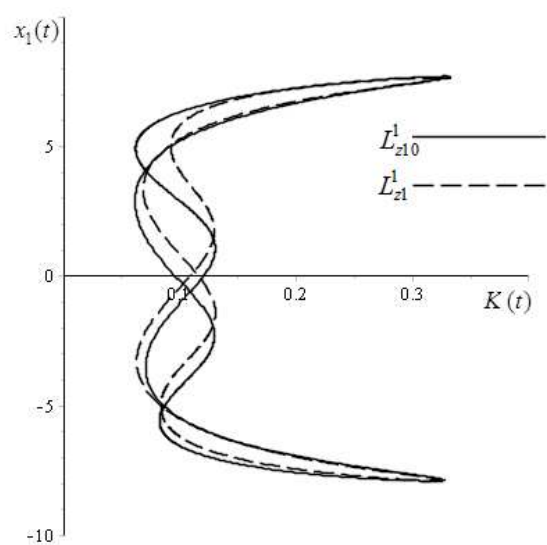


Рис. 11

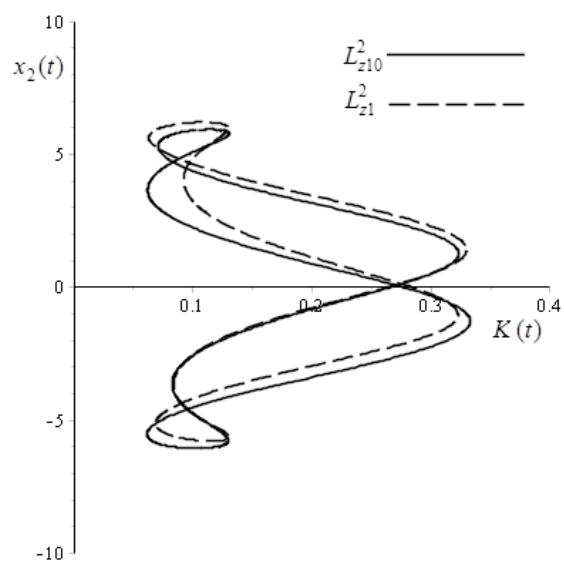


Рис. 12

Корреляционный анализ метрических характеристик циклов систем (5),(6), (8) позволяет сделать вывод о том, что отличия характеристик кривизны циклов фазовой системы (6) и нефазовой системы (5) не являются значимыми. Использование понятия кривизны цикла позволяет проводить анализ близости циклов фазовой и нефазовой систем и сравнительный анализ частотно-амплитудных характеристик кривизны полученных циклов [8].

Рассмотрим устойчивый цикл $z_{10}(0) = colon(x_{11}, x_{12}, 0)$, для которого выполняются условия $x_{11} = -0.866$, $x_{12} = 5.913$, $T_1 = 4.5866$ – период цикла $z_{10}(t)$. Для цикла $z_{10}(t)$ определим окрестность $\Omega_{10} = \{(x, t) : (x_1 - x_{11})^2 + (x_2 - x_{12})^2 = R^2, t = 0, R = 0.5\}$. Используя оператор сдвига по траекториям системы (8) найдем отображение множества Ω_{10} через время T_1 в координатах (x_1, K, t) . С использованием Ω_{10} численными методами определим кривизну $K(x_1, x_2, \sigma)$ на границе множества Ω_{10} , и построим множество

$$\Omega_{x_1, k, 0} = \{(x_1, K, t) : t = 0, K = K(x_1, x_2, \sigma_0), \sigma_0(0) = 0, x = colon(x_1, x_2) \in \Omega_{10}\}.$$

Пусть $U_{x_1, k, 0} = P_{T_1} \circ T_{x_1, k}$, где $T_{x_1, k}$ – оператор сдвига по траекториям системы (8), P_{T_1} – параллельный перенос, $P_{T_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ K \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ K \\ t - T_1 \end{pmatrix}$, $U_{x_1, k, 0}(\Omega_{x_1, k, 0}) = \Omega_{x_1, k, T_1}$. Обозначим $Q_{x_1, k, 0}(x_1, K)$ – вращение векторное поле оператора $U_{x_1, k, 0}$ на границе $\partial\Omega_{x_1, k, 0}$ множества $\Omega_{x_1, k, 0}$.

Численно показывается, что вращение векторного поля $Q_{x_1, k, 0}$ на границе $\partial\Omega_{x_1, k, 0}$ множества $\Omega_{x_1, k, 0}$ отлично от нуля, $\gamma(Q_{x_1, k, 0}, \partial\Omega_{x_1, k, 0}) \neq 0$. Отображение $U_{x_1, k, 0}$ содержит неподвижную точку оператора, определяющую начальные условия цикла первого рода фазовой системы (8). Для дальнейших исследований кривизны цикла $z_{10}(t)$ переместим центр множества $\Omega_{x_1, k, 0}$ в начало координат. Обозначим $P_{z_{10}}$ – параллельный перенос, $P_{z_{10}} \begin{pmatrix} x_1 \\ K \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_{11} \\ K - K_{10} \\ t \end{pmatrix}$, $K_{10} = 0.1035$ – кривизна цикла $z_{10}(t)$ в момент времени $t = 0$, $P_{z_{10}}(\Omega_{x_1, k, 0}) = \bar{\Omega}_{x_1, k, 0}$, $P_{z_{10}}(\Omega_{x_1, k, T_1}) = \bar{\Omega}_{x_1, k, T_1}$. Аналогично $\Omega_{x_2, k, 0}$ находится множество

$$\Omega_{x_2, k, 0} = \{(x_2, K, t) : t = 0, K = K(x_1, x_2, \sigma_0), \sigma_0(0) = 0, x = colon(x_1, x_2) \in \Omega_{10}\},$$

которое является отображением множества Ω_{10} оператором сдвига по траекториям системы (8) через время T_1 .

Пусть $U_{x_2, k, 0} = P_{T_1} \circ T_{x_2, k}$, где $T_{x_2, k}$ – оператор сдвига по траекториям системы (8), P_{T_1} – параллельный перенос, тогда $U_{x_2, k, 0}(\Omega_{x_2, k, 0}) = \Omega_{x_2, k, T_1}$, $\bar{P}_{z_{10}}(\Omega_{x_2, k, 0}) = \bar{\Omega}_{x_2, k, 0}$, $\bar{P}_{z_{10}}(\Omega_{x_2, k, T_1}) = \bar{\Omega}_{x_2, k, T_1}$, $\bar{P}_{z_{10}}$ – параллельный перенос, $\bar{P}_{z_{10}} \begin{pmatrix} x_2 \\ K \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_{12} \\ K - K_{10} \\ t \end{pmatrix}$. Для геометрической интерпретации полученных множеств выберем систему координат с совмещенными осями OX_1 , OX_2 и вертикальной осью OK_z для кривизны. На рис. 13 изображены множества $\bar{\Omega}_{x_1, k, 0}$, $\bar{\Omega}_{x_1, k, T_1}$, $\bar{\Omega}_{x_2, k, 0}$, $\bar{\Omega}_{x_2, k, T_1}$. Численными методами показывается, что $\bar{\Omega}_{x_1, k, T_1} \cap \bar{\Omega}_{x_2, k, T_1} \subset \bar{\Omega}_{x_1, k, 0}$. Предложенные отображения $U_{x_1, k, 0}$, $U_{x_2, k, 0}$ дают возможность их использования для численного определения начальных условий и периода цикла системы (8) [12].

На рис. 14 представлены множества $\bar{\Omega}_{x_1, k, 0}^-$, $\bar{\Omega}_{x_1, k, T_4}^-$, $\bar{\Omega}_{x_2, k, 0}^-$, $\bar{\Omega}_{x_2, k, T_4}^-$ полученные для неустойчивого цикла z_{40}^- , и множества $\Omega_{40} = \{(x, t) : (x_1 - x_{41})^2 + (x_2 - x_{42})^2 = R^2, t = 0\}$ где $R = 0.1$, а x_{41} , x_{42} – начальные условия неустойчивого цикла z_{40}^- . Численными методами показываются включения $\bar{\Omega}_{x_1, k, T_4}^- \cap \bar{\Omega}_{x_2, k, T_4}^- \subset \bar{\Omega}_{x_1, k, 0}^-$, $\bar{\Omega}_{x_1, k, T_4}^- \cap \bar{\Omega}_{x_2, k, T_4}^- \subset \bar{\Omega}_{x_2, k, 0}^-$, это дает возможность для неустойчивого цикла определить отображения переводящие окрестности цикла

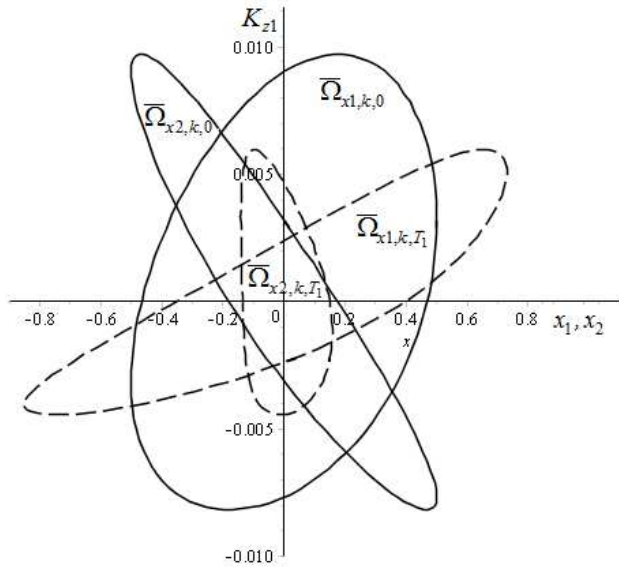


Рис. 13

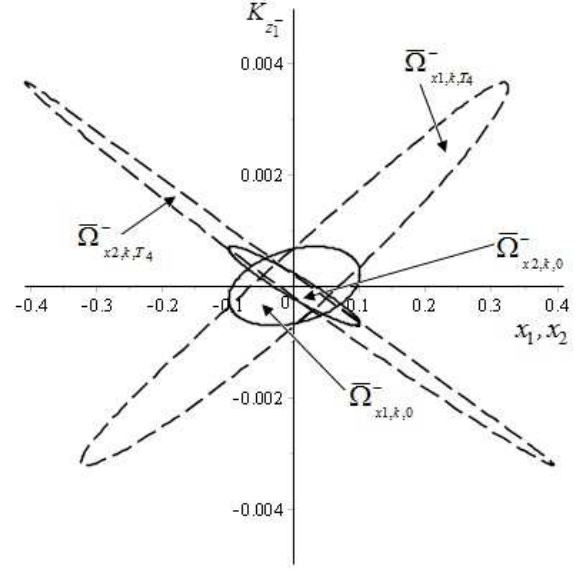


Рис. 14

в себя, что позволяет предложить численный подход определения начальных условий неустойчивого цикла [6, 9, 12].

Включение в систему (6) уравнения содержащего кривизну дает возможность использовать характеристики устойчивости кривизны циклов в качестве критерия выбора режимов скрытой синхронизации для системы фазовой автоподстройки частоты [8]. Для определения характеристик устойчивости кривизны предлагается использовать показатели Ляпунова [12].

$$\lambda_N = \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{i=1}^N \log_2 \frac{d(\Omega_{x_1,k,t_i})}{d(\Omega_{x_1,k,t_{i-1}})}, \quad (9)$$

где $d(\Omega_{x_1,k,t_i})$ — площадь множества Ω_{x_1,k,t_i} , $d(\Omega_{x_1,k,t_{i-1}})$ — площадь множества $\Omega_{x_1,k,t_{i-1}}$, множество Ω_{x_1,k,t_i} является отображением множества $\Omega_{x_1,k,t_{i-1}}$ оператором сдвига $T_{x_1,k}$ по траекториям системы (8) в координатах (x_1, K, t) через время $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Найдем для устойчивого цикла $z_{10}(t)$ показатели Ляпунова в координатах (x_1, K, t) , в качестве t_i возьмем $t_i = (i - 1)T_1$, $i = \overline{1, 7}$, $T_1 = 4.5866$ — период цикла $z_{10}(t)$. Численными методами найдем площади множеств Ω_{x_1,k,t_i} , $i = \overline{1, 7}$.

В таблице 2 приведены значения показателей Ляпунова для всех устойчивых циклов фазовой системы (2), с использованием окрестностей циклов в координатах (x_1, K, t) , (x_2, K, t) .

Таблица 2

$z_i(t)$	$x_1(t), K_{z_i}(t)$	λ_i					
		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
$z_{10}(t)$	$x_1(t), K_{z_1}(t)$	-0.3211	-0.1128	-0.0747	-0.0577	-0.0476	-0.0410
$z_{20}(t)$	$x_1(t), K_{z_2}(t)$	-0.8026	-0.2871	-0.1554	-0.1113	-0.0885	-0.0742
$z_{30}(t)$	$x_1(t), K_{z_3}(t)$	-0.4754	-0.3934	-0.1647	-0.1062	-0.0296	-0.0657

Показатели Ляпунова для устойчивых циклов являются отрицательными величинами, при этом наименьшее значение $\lambda_6 = -0.0743$ определено для устойчивого цикла $z_{20}(t)$ в координатах (x_2, K, t) . Полученные результаты позволяют использовать показатели Ляпунова в каче-

стве критерия качества режимов скрытой синхронизации для систем фазовой автоподстройки частоты.

5. Заключение

В работе, определены основные механизмы реализации режимов скрытой синхронизации в системах фазовой автоподстройки. Численными методами проведен мультипликаторный анализ бифуркации колебательных циклов и колебательно-вращательных циклов. Предложено расширение исходной системы дифференциальных уравнений за счет включения в нее уравнения производной кривизны решения. С использованием понятия кривизны цикла проведен анализ близости циклов фазовой и нефазовой систем. Предложено использование вращения векторного поля расширенной системы для определения начальных значений и периодов устойчивых и неустойчивых циклов. Определены показатели Ляпунова для кривизны циклов в случае мультистабильности. Практическая значимость полученных результатов заключается в использовании кривизны при выборе режимов скрытой синхронизации в случае мультистабильности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакунов Г. М., Матросов В. В., Шалфеев В. Д. О квазисинхронных режимах в системе фазовой автоподстройки частоты с фильтром второго порядка при приближенном учете запаздывания // Изв. вузов "ПНД". — 2011. — Т. 19. — № 3. — С. 171–178.
2. Леонов Г. А., Буркин И. М., Шепелявый А. И. Частотные методы в теории колебаний. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
3. Мамонов С. С. Динамика системы частотно-фазовой автоподстройки частоты с фильтрами первого порядка // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. — 2011. — Т. 11. — вып. 1. — С. 70–81.
4. Мамонов С. С., Ионова И. В. Применение вращения векторного поля для определения циклов второго рода // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 14. — № 5. — С. 46–54.
5. Мамонов С. С., Харламова А. О. Квазисинхронные режимы фазовой системы // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. — 2016. — № 56. — С. 45–51.
6. Мамонов С. С., Харламова А. О. Отделение циклов второго рода системы частотно-фазовой автоподстройки частоты // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 15. — № 3. — С. 97–102.
7. Мамонов С. С., Харламова А. О. Определение условий существования предельных циклов первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19. — № 1. — С. 67–76.
8. Мамонов С. С., Харламова А. О. Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. — 2017. — № 62. — С. 26–35.
9. Мамонов С. С., Харламова А. О. Численно-аналитическое определение циклов первого рода фазовой системы дифференциальных уравнений // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 17. — № 4. — С. 48–56.

10. Мамонов С. С., Харламова А. О. Циклы первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством // ВИНТИ РАН. Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. — 2018. — Т. 148. — С. 83–92.
11. Мамонов С. С., Харламова А. О., Ионова И. В. Колебательно-вращательные циклы фазовой системы дифференциальных уравнений // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. — Москва, 2018. — Т. 18. — № 4. — С. 51–57.
12. Мамонов С. С., Харламова А. О., Ионова И. В. Кривизна колебательных циклов фазовых систем // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 19, — № 2. — С. 105–110.
13. Шалфеев В. Д., Матросов В. В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. — Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013.
14. Матросов В. В. Вынужденная синхронизация: Учеб.-метод. пособие. — Н. Новгород, 2013. — 40 с.
15. Бакунов Г. М., Матросов В. В., Шалфеев В. Д. О регулярных квазисинхронных режимах в системе фазовой автоподстройки частоты // Вестник ННГУ. — 2010. — № 6. — С. 43–47.
16. Абрамов В. В. Условия существования периодического решения дифференциального уравнения второго порядка с квадратичной нелинейной частью // Вестник РАЕН. — 2018. — Т. 18. — № 4. — С. 3–7.
17. Лискина Е. Ю. Условия существования ненулевых периодических решений нелинейной автономной динамической системы второго порядка в случае пары нулевых собственных значений матрицы системы линейного приближения // Вестник РАЕН. — 2017. — Т. 17. — № 4. — С. 38–43.
18. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1972. — 768 с.
19. Капранов М. В., Кулешов В. Н., Уткин Г. М. Теория колебаний в радиотехнике. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
20. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966. — 332 с.

REFERENCES

1. Bakunov, G. M. & Matrosov, V. V. & Shalfeev, V. D. 2011, "On quasisynchronous modes in a phase-locked loop with a second-order filter with approximate consideration of delay"// Izv. vuzov "PND". vol. 19. no. 3. pp. 171–178.
2. Leonov, G. A. & Burkin, I. M. & Shepelyavy, A. I. 1992, "Frequency methods in the theory of oscillations"// SPb., Science Publ. of St. Petersburg State University.
3. Mamonov, S. S. 2011, "Dynamics of a frequency-phase locked loop with first-order filters"// Bulletin of the Novosib. State University. Series: Mathematics, Mechanics, Computer Science. vol. 11. no. 1. pp. 70–81.
4. Mamonov, S. S. & Ionova, I. V. 2014, "Application of rotation of a vector field to determine cycles of the second kind"// Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. vol. 14. no. 5. pp. 46–54.

5. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. 2016, "Quasisynchronous regimes of the phase system"// Bulletin of the Ryazan State Radio Engineering University. no. 56. pp. 45–51.
6. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. 2015, "Separation of cycles of the second kind of frequency-phase locked loop"// Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. vol. 15. no. 3. pp. 97–102.
7. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. 2017, "Determination of the conditions for the existence of limit cycles of the first kind of systems with cylindrical phase space"// Journal of the Srednevolzhsky Mathematical Society. vol. 19. no. 1. pp. 67–76.
8. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. 2017, "Forced synchronization of phase-locked loop systems with delay"// Bulletin of the Ryazan State Radio Engineering University. no. 62. pp. 26–35.
9. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. 2017, "Numerical and analytical definition of cycles of the first kind of a phase system of differential equations"// Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. vol. 17. no. 4. pp. 48–56.
10. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. 2018, "Cycles of the first kind of systems with a cylindrical phase space"// VINITI. Results of science and technology. Series: Contemporary Mathematics and its Applications. vol. 148. no. 4. pp. 83–92.
11. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. & Ionova I. V. 2018, "Oscillatory-rotational cycles of the phase system of differential equations"// Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. vol. 18. no. 4. pp. 51–57.
12. Mamonov, S. S. & Kharlamova, A. O. & Ionova I. V. 2019, "The curvature of the oscillatory cycles of phase systems"// Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. vol. 19. no. 2. pp. 105–110.
13. Shalfeev, V. D. & Matrosov, V. V. 2013, "Nonlinear dynamics of phase synchronization systems". N. Novgorod Publ. of the UNN.
14. Matrosov, V. V. 2013, "Forced synchronization"// Textbook. Allowance. Nizhny Novgorod.
15. Bakunov, G. M. & Matrosov, V. V. & Shalfeev, V. D. 2010, "About regular quasysynchronous modes in the phase-locked loop"// Bulletin of Nizhny Novgorod State University. no. 6. pp. 43–47.
16. Abramov, V. V. 2018, "Conditions for the existence of a periodic solution of a second-order differential equation with a quadratic nonlinear part"// Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. vol. 18. no. 4. pp. 3–7.
17. Liskina, E. Yu. 2017, "Conditions for the existence of nonzero periodic solutions of a second-order nonlinear autonomous dynamical system in the case of a pair of zero eigenvalues of the matrix of the linear approximation system"// Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. vol. 17. no. 4. pp. 38–43.
18. Besekersky, V. A. & Popov E. P. 1972, "Theory of automatic control systems". Moscow: Nauka.
19. Kapranov, M. V. & Kuleshov, V. N. & Utkin, G. M. 1984, "The theory of oscillations in radio engineering". Moscow: Nauka.

20. Krasnoselsky, M. A. 1966, "The shift operator along the trajectories of differential equations". Moscow: Nauka.

Получено 18.08.2019 г.

Принято в печать 12.11.2019 г.