ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 2 (2013)

УДК 511.331

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ ОТРЕЗКОМ РЯДА ДИРИХЛЕ

И. Ф. Авдеев (г. Орел)

Аннотация

Настоящую статью автор посвящает светлой памяти выдающегося математика Геннадия Ивановича Архипова.

В статье получено приближение для дзета-функции квадратичной формы отрицательного дискриминанта. Даны оценки в близи единичной прямой.

Ключевые слова: Дзета-функции Римана, квадратичная форма, ряд Дирихле.

APPROXIMATION ZETA-FUNCTION OF A QUADRATIC FORM THE FINAL TRIGONOMETRIC SUM OF THE REMAINDER

I. F. Avdeev (Orel)

Abstract

In this article functional approximate equation was get for zeta-function in square form with negative discriminant.

Keywords: Riemann zeta-function, quadratic form, the Dirichlet series.

Пусть $\zeta(s,K)$ — дзета-функция квадратичной формы K, определяется равенством

$$\zeta(s,K) = \sum_{m^2+n^2\neq 0} \frac{1}{(K(m,n))^s},$$

где s — комплексное число, $s=\sigma+it$. Мы будем рассматривать задачу вывода простейшего приближенного функционального уравнения для дзета-функции $\zeta(s,K)$, позволяющее продолжить эту функцию и получить нетривиальные оценки модуля этой функции вблизи единичной прямой $\sigma = 1$. Будем считать, что форма $K(m,n)$ представлена в виде

$$K(m,n) = am^2 + bmn + cn^2,$$

Здесь коэффициенты a, b и c предполагаются удовлетворяющими условиям

$$|b| \leqslant c \leqslant a,$$
$$d = 4ac - b^2,$$

где $-d < 0$ дискриминант формы.

Проверим сходимость ряда Дирихле в области $\sigma > 1$.

Имеем

$$\left| \sum_{m^2+n^2 \neq 0} \frac{1}{(K(m,n))^s} \right| \leqslant \sum_{m^2+n^2 \neq 0} \frac{1}{(K(m,n))^s} \leqslant \sum_{m^2+n^2 \neq 0} \frac{2}{(am^2 + bmn + cn^2)^\sigma}.$$

Так как $|bmn| \leqslant \frac{|b|}{2}(m^2+n^2)$ и

$$K(m,n) = am^2 + bmn + cn^2 \geqslant am^2 + cn^2 - \frac{|b|}{2}(m^2 - n^2) \geqslant \frac{a}{2}m^2 + \frac{c}{2}n^2.$$

Далее

$$\sum_{m^2+n^2 \neq 0} \frac{2}{(am^2 + cn^2)^\sigma} \leqslant \sum_{m^2+n^2 \neq 0} \frac{2}{(m^2 + n^2)^\sigma} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^\sigma}.$$

Здесь $r(n)$ — число представления натурального n в виде суммы двух квадратов целых чисел. Известно, что $r(n)$ удовлетворяет неравенству

$$r(n) \leqslant 4\tau(n),$$

где $\tau(n)$- число делителей n. С другой стороны, для $\tau(n)$ известна оценка

$$\tau(n) \leqslant n^\varepsilon \left(\frac{2}{\varepsilon \ln 2} \right)^{2^{\frac{1}{\varepsilon}}},$$

$\varepsilon > 0$- любое [2]. Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^\sigma}$$

сходится при всех $\sigma = 1 + \varepsilon$, что и требовалось доказать. Отметим, что при $\sigma > 1$

$$\zeta(s,K)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{c^s n^{2s}}+\sum_{m>0}\frac{2}{(K(m,n))^s}=$$
$$=\sum_{m,n\geqslant 1}\frac{2}{(K(m,n))^s}+\sum_{m,n\geqslant 1}\frac{2}{(K(m,-n))^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{c^s n^{2s}}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{a^s m^{2s}}=$$
$$=\sum_{m,n\geqslant 1}\frac{2}{(K(m,n))^s}+\sum_{m,n\geqslant 1}\frac{2}{(K(m,-n))^s}+2(a^{-s}+c^{-s})\zeta(2s).$$

Для каждого из трех слагаемых правой части последнего равенства необходимо вывести приближенное функциональное уравнение. Но для функции $\zeta(s)$ соответствующее уравнение давно известно см. [3], а для каждого из двух других слагаемых оно выводится одинаково. Поэтому ограничимся рассмотрением функции $f(s)$ вида

$$f(s)=\sum_{m,n\geqslant 1}\frac{1}{(K(m,n))^s}=\sum_{m,n\geqslant 1}\frac{2}{(am^2+bmn+cn^2)^s}=2(4a)^s g(s),$$

где $g(s)$ определена последним равенством. Точнее

$$g(s)=\sum_{m,n\geqslant 1}\frac{2}{((2am+bn)^2+dn^2)^s}.$$

Будем искать приближенное функциональное уравнение для функции $g(s)$. Справедливо следующее утверждение теоремы

Теорема 1. *При $\sigma>\frac{1}{2}$, $t>0$ для точек $s=\sigma+it$ с условием $t<\pi v$, где v-полуцелое справедливо приближенное функциональное уравнение вида*

$$g(s)=\sum_{m,n\leqslant V}f(m,n)+\int_M f(x,y)dxdy+O\left(a^2t(a+v\sqrt{d})^{-2\sigma}\right)$$

Здесь $M=M_0/M_1$, где M_0 — область точек с условием $\frac{1}{2}\leqslant x,y<+\infty$, M_1 — область, определенная неравенством $\max(x,y)<V$.

Зафиксируем $n\geqslant 1$ и рассмотрим сумму $g_n(s)$ по m вида

$$g_n(s)=\sum_{m\geqslant 1}\frac{2}{((2am+bn)^2+dn^2)^s}.$$

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть Q и R — полуцелые числа, удовлетворяющие условию $Q < R$. На функцию $f(x)$ наложим условие, что на отрезке $[Q, R]$ ее вторая производная существует и непрерывна. Тогда при любом натуральном m справедлива следующая формула*

$$\sum_{Q<n\leqslant R} f(n) = \int\limits_Q^R f(x)dx + \left.\frac{f'(x)}{12}\right|_Q^R + T_2,$$

где

$$T_2 = \int\limits_Q^R f''(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} dx$$

Доказательство. См. [4]

В качестве $f(x)$ в этой лемме возьмем функцию вида

$$f(x) = f(x,n) = \frac{1}{((2am+bn)^2+dn^2)^s}.$$

Положим так же $Q = V$, а параметр R будем считать большим числом, превосходящим V. Тогда для суммы

$$A_Q(s) = \sum_{V<m\leqslant Q} \frac{1}{((2am+bn)^2+dn^2)^s}$$

приходим к равенству

$$A_Q(s) = \int\limits_V^B \frac{dx}{((2ax+bn)^2+dn^2)^s} +$$
$$+ \left.\left(\left((2ax+bn)^2+dn^2\right)^{-s}\right)'_x \frac{1}{12}\right|_V^R + T_2,$$

где

$$T_2 = \int\limits_V^B \left(\left((2ax+bn)^2+dn^2\right)^{-s}\right)''_{xx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} dx$$

Вычислим явно первые и вторые производные по x указанные выше. Имеем

$$(((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s})'_x = -s((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s-1}4a(2ax+bn),$$
$$(-s((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s-1}4a(2ax+bn))'_x =$$
$$= s(s+1)((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s-1}\times$$
$$\times 16a^2(2ax+bn)^2 - s((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s-1}8a^2.$$

В случае, когда $\sigma > 1$, параметр R можно устремить к бесконечности. В результате приходим к равенству при каждом $n < V$, где V — полуцелое

$$g_n(s) = \sum_{m\geqslant 1} \frac{2}{\left((2am+bn)^2+dn^2\right)^s} =$$

$$= \sum_{1\leqslant m\leqslant V} \frac{2}{\left((2am+bn)^2+dn^2\right)^s} + \int\limits_V^\infty \frac{dx}{\left((2ax+bn)^2+dn^2\right)^s} -$$

$$-\frac{\left(\left((2aV+bn)^2+dn^2\right)^{-s}\right)'_x}{12} +$$

$$+\int\limits_V^\infty \left(\left((2aV+bn)^2+dn^2\right)^{-s}\right)''_{xx} \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} dx.$$

В случае $n > V$ будем иметь

$$g_n(s) = \sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{\left((2am+bn)^2+dn^2\right)^s} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{dx}{\left((2ax+bn)^2+dn^2\right)^s} - \frac{\left(\left((2aV+bn)^2+dn^2\right)^{-s}\right)'_x}{12} +$$

$$+\int\limits_V^\infty \left(\left((2aV+bn)^2+dn^2\right)^{-s}\right)''_{xx} \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} dx.$$

Далее просуммируем величину $g_n(s)$ по параметру n. Имеем

$$g(s) = \sum_{n=1}^\infty g_n(s) = \sum_{n<V} g_n(s) + \sum_{n>V} g_n(s) = G_1 + G_2.$$

Преобразуем величины G_1 и G_2. Рассмотрим сначала величину G_1. Получим

$$G_1 = \sum_{n<V} g_n(s) =$$

$$= \sum_{n<V}\sum_{m<V} \frac{1}{\left((2am+bn)^2+dn^2\right)^s} + \sum_{n<v} \int\limits_V^\infty \frac{dx}{\left((2am+bn)^2+dn^2\right)^s} -$$

$$-\sum_{n<V} \frac{\left(\left((2aV+bn)^2+dn^2\right)^{-s}\right)'_V}{12} +$$

$$+\sum_{n<V} \int\limits_V^\infty \left(\left((2aV+bn)^2+dn^2\right)^{-s}\right)''_{xx} \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} dx = G_{11} + G_{12} + R_{11} + R_{12}.$$

Здесь значения $G_{11}, G_{12}, R_{11}, R_{12}$ очевидным образом определяются последним равенством. Рассмотрим сумму G_2.

$$G_2 = \sum_{n>V} g_n(s) = \sum_{n>V}\sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{\left((2am+bn)^2+dn^2\right)^s} =$$

$$= \sum_{n>V} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{\left((2ax+bn)^2+dn^2\right)^s} - \sum_{n>V} \frac{\left(\left((a+bn)^2+dn^2\right)^{-s}\right)'_x}{12} +$$

$$+ \sum_{n>V} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} \left(\left((2aV+bn)^2+dn^2\right)^{-s}\right)''_{xx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} dx =$$

$$= G_{21} + R_{21} + R_{22}.$$

Значение величин G_{21}, R_{21}, R_{22} в последнем равенстве определены однозначно.

Из суммы $G_{12} + G_{21}$ выделим главный член в виде двойного интеграла из формулировки теоремы с допустимой погрешностью. После этого оценим погрешности, вносимые остатками $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$. Член G_{11} присутствует в формулировке теоремы и в дальнейших преобразованиях не нуждается.

Исследование G_{12}.

Имеем

$$G_{12} = \sum_{n<V} \int\limits_{V}^{\infty} \frac{dx}{\left((2ax+bn)^2+dn^2\right)^s} = \int\limits_{V}^{\infty} \sum_{n<V} \frac{dx}{\left((2ax+bn)^2+dn^2\right)^s}.$$

К внутренней сумме применим лемму 1 со значением параметров $Q = \frac{1}{2}, R = V$ Получим

$$\int\limits_{V}^{\infty} \sum_{n<V} \frac{dx}{\left((2ax+bn)^2+dn^2\right)^s} =$$

$$= \int\limits_{V}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{V} \frac{dxdy}{\left((2ax+by)^2+dy^2\right)^s} +$$

$$+ \frac{1}{12} \int\limits_{V}^{\infty} \left(\frac{1}{\left((2ax+by)^2+dy^2\right)^s}\right)'_y \Bigg|_{\frac{1}{2}}^{V} dx +$$

$$+ \int\limits_{V}^{\infty} \left(\left((2ax+by)^2+dy^2\right)^{-s}\right)''_{yy} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} dxdy =$$

$$= I_{12} + R_{121} + R_{122}.$$

Как и ранее, введенные выше величины определяются последним равенством.

Заметим, что несобственные интегралы, являющиеся слагаемыми суммы G_{12}, сходятся абсолютно в области $\sigma > 1$ и поэтому являются аналитическими функциями по переменной s в этой области.

$$R_{121} = \frac{1}{12}\int\limits_V^\infty \left(\frac{1}{((2ax+by)^2+dy^2)^s}\right)'_y\Bigg|_{\frac{1}{2}}^V dx =$$

$$= \frac{1}{12}\int\limits_V^\infty -s((2ax+by)^2+dy^2)^{-s-1}2(2abx+y(b^2+d))2a\Big|_{\frac{1}{2}}^V dx \ll$$

$$\ll t\int\limits_V^\infty ((2ax+bV)^2)^{\sigma-1}(abx+Vd)dx+$$

$$+t\int\limits_V^\infty ((ax+b)^2+d)^{\sigma-1}(abx+1)dx \ll$$

$$\ll t\int\limits_V^\infty \frac{(abx+Vd)}{(a^2x^2)^{\sigma+1}} + t\int\limits_V^\infty \frac{(abx+1)}{(a^2x^2)^{\sigma+1}} \ll \frac{Vdt}{a^{2\sigma+2}V^{2\sigma+2}} = \frac{t}{a^{2\sigma}V^{2\sigma}}.$$

Теперь рассмотрим R_{122}. По определению

$$R_{122} = \int\limits_V^\infty \int\limits_{\frac{1}{2}}^V \left(((2ax+by)^2+dy^2\right)^{-s})''_{yy}\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2}dxdy.$$

Вычислим значение второй частной производной подынтегральной функции

$$\begin{gathered}
\left(((2ax+by)^2+dy^2\right)^{-s})'_y = \\
= -s((2ax+by)^2+dy^2)^{-s-1}(2(ax+by)b+2yd) \\
\left(-s((2ax+by)^2+dy^2)^{-s-1}(2(ax+by)b+2yd)\right)'_y = \\
= s(s+1)((2ax+by)^2+y^2d)^{-s-2}(2(ax+by)b+2yd)^2 \\
-s((2ax+by)^2+y^2d)^{-s-1}(2b^2+2d).
\end{gathered}$$

Следовательно

$$R_{122} = \int\limits_V^\infty dx\int\limits_{\frac{1}{2}}^V (s(s+1)((2ax+by)^2+y^2d)^{-s-2}(2(2ax+by)b+2yd)^2$$

$$-s((2ax+by)^2+y^2d)^{-s-1}(2b^2+2d))\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2}dy =$$

$$= \int\limits_V^{\infty} dx \int\limits_{\frac{1}{2}}^{V} (s(s$$

$$+1)((2ax+by)^2+y^2d)^{-s-1}(2(2ax+by)b$$

$$+2yd)^2)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2}dy$$

$$-\int\limits_V^{\infty} dx \int\limits_{\frac{1}{2}}^{V} s((2ax+by)^2+y^2d)^{-s-1}(2b^2+2d)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2}dy$$

$$= R_{1221} - R_{1222}.$$

Для оценки величины R_{1221} снова воспользуемся второй теоремой о среднем. Имеем

$$R_{1221} = s(s+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi k)^2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{V}\cos 2\pi ky dy \int\limits_V^{\infty}((2ax+by)^2$$

$$+y^2d)^{-s-2}(2(2ax+by)b+2yd)^2dx.$$

Далее

$$\int\limits_V^{\infty}((2ax+by)^2+y^2d)^{-s-2}(2(2ax+by)b+2yd)^2dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_V^{\infty}((2ax+by)^2+y^2d)^{\sigma-2}\times(2(2ax+by)b+2yd)^2dx.$$

Далее

$$(4abx+2b^2y^2+2yd)^2((2ax+by)^2+y^2d)^{-\sigma-2} \ll$$

$$\ll \left(\frac{2abx+b^2y^2+yd}{(2ax+by)^2+y^2d}\right)^2((2ax+by)^2+y^2d)^{-\sigma}.$$

Напомним, что $x \geqslant V \geqslant y \geqslant \frac{1}{2}$ Дальнейшую оценку разобьем на 2 случая. Первый случай $a^2x^2 \geqslant y^2d$. Тогда $x^2 \geqslant \frac{y^2d}{a^2}, x \geqslant \frac{y\sqrt{d}}{a}, y \leqslant \frac{ax}{\sqrt{d}}$. Следовательно

$$\left(\frac{2abx+b^2y^2+yd}{(2ax+by)^2+y^2d}\right)^2 \ll \left(\frac{2abx+yd}{a^2x^2+y^2d}\right)^2 \ll \left(\frac{a^2x+yd}{a^2x^2}\right)^2 = \left(\frac{a+\sqrt{d}}{ax}\right)^2.$$

По определению $4ac-b^2=d$, причем $a \geqslant c \geqslant |b|$ следовательно $3ac<d$, $a \ll \sqrt{d}$. Поэтому

$$\left(\frac{a+\sqrt{d}}{ax}\right)^2 \ll \left(\frac{\sqrt{d}}{ax}\right)^2 = \frac{d}{a^2x^2} \ll \frac{d}{a^2V^2}.$$

Кроме того

$$((2ax+by)^2+y^2d)^{-\sigma} \ll (a^2x^2+y^2d)^{-\sigma} \ll a^{-2\sigma}x^{-2\sigma}.$$

Во втором случае имеем $a^2x^2 \leqslant y^2d$. Тогда $x^2 \leqslant \frac{y^2d}{a^2}$, $x \leqslant \frac{y\sqrt{d}}{a}$. Следовательно

$$\left(\frac{a^2x+yd}{a^2x^2+y^2d}\right)^2 \ll \left(\frac{a^2\frac{y\sqrt{d}}{a}+yd}{y^2d}\right)^2 = \left(\frac{a+\sqrt{d}}{y\sqrt{d}}\right)^2 \ll \frac{1}{y^2}.$$

Имеем так же

$$((2ax+by)^2+y^2d)^{-\sigma} \ll (a^2x^2+y^2d)^{-\sigma} \ll (y^2d)^{-\sigma}.$$

В первом случае подынтегральная функция $A(y)$ оценивается так

$$A(y) \ll \frac{d}{a^2x^2}(a^2x^2)^{-\sigma}.$$

Следовательно

$$A(y) \ll \frac{d}{a^{2+2\sigma}x^{2+2\sigma}}.$$

Во втором случае имеем

$$A(y) \ll \frac{1}{y^2}(y^2d)^{-\sigma} = \frac{1}{y^{2+2\sigma}d^{\sigma}}.$$

Далее оценку функции $A(y)$ проинтегрируем по y в пределах от $1/2$ до V.

Заметим, что параметр при этом принимает некоторое фиксированное значение с условием $x \geqslant V$. Это значение таково, что

$$x > V \geqslant \frac{V\sqrt{d}}{a},$$

поэтому второй случай, при котором $y \geqslant \frac{ax}{\sqrt{d}}$ не имеет места, так как тогда выполняется неравенство

$$y > \frac{a}{\sqrt{d}}\frac{V\sqrt{d}}{a} = V,$$

что невозможно. В этой ситуации получим

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{V} A(y)dy \ll \frac{Vd}{a^{2+2\sigma}x^{2+2\sigma}} \ll \frac{d}{a^{2+2\sigma}V^{1+2\sigma}}.$$

Суммируя эту оценку по k и учитывая, что $s \ll t$ окончательно получаем

$$R_{1222} \ll \frac{t^2}{d^\sigma V^{1+2\sigma}}.$$

Теперь рассмотрим R_{1222}. По определению

$$R_{1222} = s\int\limits_V^\infty dx \int\limits_{\frac{1}{2}}^V ((2ax+by)^2 + y^2 d)^{-s-1}(2b^2+2d)\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2} dy =$$

$$= s(2b^2+2d)\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(\cos 2\pi k)^2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^V \cos 2\pi ky dy \int ((2ax+by)^2+y^2d)^{-s-1}dx$$

Положим

$$A_2(y) = \int\limits_V^\infty ((2ax+by)^2 + y^2 d)^{-\sigma-1}dx.$$

Тогда

$$((2ax+by)^2+y^2d)^{-\sigma-1} \ll (a^2x^2+y^2d)^{-\sigma-1}$$

В случае $a^2x^2 \geqslant y^2 d$ имеем

$$(a^2x^2+y^2d)^{-\sigma-1} \ll a^{-2\sigma-2}x^{-2\sigma-2},$$

отсюда заключаем, что

$$A_2(y) \ll \frac{a^{-2\sigma-2}x^{-2\sigma-2}}{aVt} = \frac{1}{a^{2\sigma+3}x^{2\sigma+2}Vt}$$

Во втором случае $y^2 d > a^2x^2$ следовательно

$$((2ax+by)^2+y^2d)^{-\sigma-1} \ll (a^2x^2+y^2d)^{-\sigma-1} \ll (y^2d)^{-\sigma-1} = y^{-2\sigma-2}d^{-\sigma-1}.$$

откуда

$$A_2(y) \ll (y^2d)^{-\sigma-1} = \frac{1}{y^{2\sigma+2}d^{\sigma+1}}.$$

Полученную оценку для $A_2(y)$ необходимо проинтегрировать по y в пределах от $\frac{1}{2}$ до V. По условию $x \geqslant V$. При этом $x > \frac{V\sqrt{d}}{a}$ и второй случай не имеет места. Поэтому

$$H_2 = \int\limits_{\frac{1}{2}}^V A_2(y)dy \ll \frac{V}{a^{2\sigma+2}V^{2\sigma+1}} = \frac{1}{a^{2\sigma+2}V^{2\sigma}}$$

Из последней оценки вытекает, что

$$R_{1222} \ll tdH_2 \ll \frac{t\sqrt{d}}{a^{2\sigma+2}V^{2\sigma}}.$$

Сравнивая оценки для R_{1221} и R_{1222} приходим к неравенству

$$R_{122} \leqslant |R_{1221}| + |R_{1222}| \ll \frac{t^2}{d^\sigma V^{1+2\sigma} + \frac{t\sqrt{d}}{a^{2\sigma+2}V^{2\sigma}}}$$

Оценка остатка R_{11}

По определению

$$R_{11} = -\frac{1}{12}\sum_{n<V}(((2aV+bn)^2+dn^2)^{-s})'_V.$$

Явный вид производной по V для слагаемых последней суммы имеет вид

$$(((2aV+bn)^2+dn^2)^{-s})'_V = -s((2aV+bn)^2+dn^2)^{-s-1}2a(2aV+bn) \ll$$
$$\ll t((aV)^2+dn^2)^{\sigma-1}a^2V \ll t(aV)^{-2\sigma-2}a^2V = ta^{-2\sigma}V^{-2\sigma-1}.$$

Суммируя по $n<V$, получим

$$R_{11} \ll ta^{-2\sigma}V^{-2\sigma}.$$

Оценка остатка R_{12}.

Значение величины R_{12} определяется равенством

$$R_{12} = \sum_{n<V}\int\limits_V^\infty \left(((2ax+bn)^2+dn^2\right)^{-s})''_{xx}\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2}dx =$$
$$= \sum_{n<V}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2\pi k)^2}\int\limits_V^\infty \left(((2ax+bn)^2+dn^2\right)^{-s})''_{xx}\cos 2\pi kx dx.$$

Но

$$\left(((2ax+bn)^2+dn^2\right)^{-s})''_{xx} = 16a^2s(s+1)((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s-2}\times$$
$$\times(2ax+bn)^2 - 8a^2s((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s-1}.$$

В соответствии с последним равенством величина R_{12} представляется в виде двух слагаемых $R_{12} = R_{121} + R_{122}$, где

$$R_{121} = \sum_{n<V}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4a^2 s(s+1)}{(\pi k)^2} \int_V^{\infty} ((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s-2}(2ax+ \\ +bn)^2 \cos 2\pi kx dx.$$

$$R_{122} = -\sum_{n<V}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a^2 s}{(\pi k)^2} \int_V^{\infty} ((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s-2} \cos 2\pi kx dx.$$

Рассмотрим сначала величину R_{121}. Для этого оценим величину B_n, являющуюся значением интервала по x в последней сумме, то есть

$$B_n(k) = \int_V^{\infty} ((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s-2}(2ax+bn)^2 \cos 2\pi kx dx =$$
$$= \int_V^{\infty} ((2ax+bn)^2+dn^2)^{-\sigma-2} e^{-it\ln((2ax+bn)^2+dn^2)} \times$$
$$\times (2ax+bn)^2 \left(\frac{e^{2i\pi kx}+e^{-2i\pi kx}}{2}\right) dx.$$

Выражение B_n разбивается на 2 слагаемых B_{n1} и B_{n2} вида

$$B_{n1}(k), B_{n2}(k) = \frac{1}{2}\int_V^{\infty} ((2ax+bn)^2+dn^2)^{\sigma-2}(2ax+bn)^2 \times$$
$$\times e^{-it\ln((2ax+bn)^2+dn^2)\pm 2i\pi kx} dx$$

Оба слагаемых оцениваются одинаково. Рассмотрим, например, B_{n1}. С помощью второй теоремы о среднем опять приходим к оценке

$$B_{n1}(k) \ll ((2aV+bn)^2+dn^2)^{\sigma-2}(2aV+bn)^2|I|,$$

где

$$I = \int_{\xi_1(n)}^{\xi_2(n)} \xi_2(n) e^{2i\pi kx - it\ln((2ax+bn)^2+dn^2)} dx,$$

при некоторых числах $\xi_2(n) > \xi_1(n) \geqslant V$. Функцию, стоящую в показателе экспоненты, в интеграле I обозначим через $if(x)$. Для производной $f'(x)$ выполнено равенство

$$f'(x) = 2\pi k - t\frac{2}{x} > 2\pi k - 2 \gg k.$$

Следовательно оценка интеграла I по первой производной имеет вид

$$I \ll \frac{1}{k}.$$

Отсюда имеем

$$B_n(k) \ll B_{n1}(k) \ll \frac{((2aV+bn)^2+dn^2)^{-\sigma-2}(2aV+bn)^2}{k}.$$

Подставляя полученную оценку в равенство для R_{121}, получим

$$R_{121} \ll \sum_{n<V}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^2t^2}{k^3}\frac{(2aV+bn)^2}{((2aV+bn)^2+dn^2)^{\sigma+2}} \ll$$

$$\ll a^2t^2\sum_{n<V}\frac{(2aV+bn)^2}{((2aV+bn)^2+dn^2)^{\sigma+2}} \ll a^2t^2a^2V^2\sum_{n<V}\frac{(2aV+bn)^2}{((aV)^2+dn^2)^{\sigma+2}} =$$

$$= a^4t^2V^2\left(\sum_{n\leqslant\frac{aV}{\sqrt{d}}}\frac{(2aV+bn)^2}{((aV)^2+dn^2)^{\sigma+2}} + \sum_{\frac{aV}{\sqrt{d}}<n<V}\frac{(2aV+bn)^2}{((aV)^2+dn^2)^{\sigma+2}}\right).$$

Оценивая вклад каждой суммы, приходим к оценке

$$R_{121} \ll a^4t^2V^2(aV)^{-2\sigma-3}d^{-\frac{1}{2}} = t^2d^{-\frac{1}{2}}a^{1-2\sigma}V^{-2\sigma-1}.$$

Перейдем к оценке величины R_{122}. Для этого рассмотрим внутренний интеграл $D_n(k)$ вида

$$D_n(k) = \int\limits_V^{\infty}((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s-1}\cos 2\pi kx dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_V^{\infty}((2ax+bn)^2+dn^2)^{-\sigma-1}e^{-it\ln((2ax+bn)^2+dn^2)}\left(e^{2i\pi kx}+e^{-2i\pi kx}\right)dx.$$

Действуя по предыдущей схеме, получим

$$D_n(k) \ll \frac{1}{((aV)^2+dn^2)^{\sigma+1}k}.$$

Отсюда имеем

$$R_{122} \ll a^2t\sum_{n<V}\frac{1}{((aV)^2+dn^2)^{\sigma+1}} \ll$$

$$\ll a^2tV(aV)^{-2\sigma-2} = a^{-2\sigma}tV^{-2\sigma-1}.$$

Это окончательная оценка для величины R_{122}.

Оценка величины G_{21}.

Величина G_{21} определяется так

$$G_{21} = \sum_{n>V} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{((2ax+bn)^2+dn^2)^s}.$$

Суммирование по n сделаем внутренним

$$G_{21} = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{n>V} \frac{dx}{((2ax+bn)^2+dn^2)^s} = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{n>V} Q(n)dx,$$

где $Q(n)$ определяется последним равенством. Применяя формулу суммирования, получим

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \sum_{n>V} Q(n)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \int_{v}^{\infty} Q(y)dydx - \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{Q'_y(y)}{12}\bigg|_{y=V} dx+$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \int_{V}^{\infty} Q''_{yy}(y) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi ky}{(2\pi k)^2} dydx = T_0 + R_{01} + R_{02}.$$

Нам требуется оценить остатки R_{01} и R_{02}. Рассмотрим сначала R_{01}.

$$R_{01} = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{Q'_y(y)}{12}\bigg|_{y=V} dx.$$

Найдем явное значение подынтегрального выражения

$$Q'_y(y) = \left(\frac{1}{((2ax+bn)^2+dn^2)^s}\right)'_y = \frac{-s(2b(2ax+by)+2dy)}{((2ax+by)^2+dy^2)^{s+1}}.$$

$$R_{01} = \frac{-s}{6} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{b(2ax+bV)+dV}{((2ax+bV)^2+dV^2)^{s+1}} dx \ll t \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{b2ax+dV}{((2ax)^2+dV^2)^{\sigma+1}} dx$$

$$= t \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{V\sqrt{d}}{a}} \frac{b(2ax+bV)+dV}{((2ax+bV)^2+dV^2)^{\sigma+1}} dx + t \int_{\frac{V\sqrt{d}}{a}}^{\infty} \frac{b2ax+dV}{((2ax)^2+dV^2)^{\sigma+1}} dx = I_1 + I_2.$$

Далее

$$I_1 \ll t \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{V\sqrt{d}}{a}} \frac{Vd}{(dV^2)^{\sigma+1}} dx \ll t \frac{Vd}{(dV^2)^{\sigma+1}} \frac{V\sqrt{d}}{a} \ll \frac{t}{V^{2\sigma} d^{\sigma-\frac{1}{2}} a}.$$

Теперь оценим

$$I_2 \ll t \int\limits_{\frac{V\sqrt{d}}{a}}^{\infty} \frac{bax+dV}{(ax)^{2\sigma+2}} dx =$$

$$= t \int\limits_{\frac{V\sqrt{d}}{a}}^{\infty} \frac{b}{(ax)^{2\sigma+1}x^{2\sigma+1}} dx + t \int\limits_{\frac{V\sqrt{d}}{a}}^{\infty} \frac{dV}{(ax)^{2\sigma+2}x^{2\sigma+2}} dx =$$

$$= tba^{-(2\sigma+1)}x^{-2\sigma}\Big|^{x=\frac{V\sqrt{d}}{a}} + \frac{V\sqrt{d}}{a^{2\sigma+2}V^{-2\sigma-1}d^{\sigma-\frac{1}{2}}a^{2\sigma+1}} =$$

$$= \frac{tb}{aV^{2\sigma}d^{\sigma}} + \frac{td^{\frac{1}{2}-\sigma}}{aV^{2\sigma}} \ll \frac{t}{aV^{2\sigma}d^{\sigma-\frac{1}{2}}}.$$

Следовательно общая оценка для R_{01} имеет вид

$$R_{01} \ll \frac{t}{aV^{2\sigma}d^{\sigma-\frac{1}{2}}}.$$

Перейдем к рассмотрению остатка R_{02}. Он имеет вид

$$R_{02} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} dx \int\limits_{V}^{\infty} Q''_{yy} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi ky}{(2\pi k)^2} dy.$$

Найдем в явном виде Q''_{yy}

$$Q''_{yy} = \frac{s(s+1)(2b(2ax+by)+2dy)^2}{((2ax+by)^2+dy^2)^{s+2}} - \frac{2s(b^2+d)}{((2ax+by)^2+dy^2)^{s+2}}$$

Подстановка данного выражения в интеграл дает

$$R_{02} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} dx \int\limits_{V}^{\infty} \frac{s(s+1)(2b(2ax+by)+2dy)^2}{((2ax+by)^2+dy^2)^{s+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi ky}{(2\pi k)^2} dy -$$

$$- \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} dx \int\limits_{V}^{\infty} \frac{2s(b^2+d)}{((2ax+by)^2+dy^2)^{s+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi ky}{(2\pi k)^2} dy = R_{021} - R_{-22}.$$

Займемся оценкой величины R_{021}. Вынося суммирование по k за знак интеграла и выражая $\cos 2\pi ky$ через экспоненту, получим неравенство

$$R_{021} \ll \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^2}{(2\pi k)^2} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} dx \int\limits_{V}^{\infty} \frac{s(s+1)(2b(2ax+by)+2dy)^2}{((2ax+by)^2+dy^2)^{s+2}} e^{it\ln(\varphi(y))\pm 2\pi ik} dy,$$

где $\varphi(y) = (2ax+by)^2 + dy^2$.

Из второй теоремы о среднем вытекает оценка

$$\int_V^\infty \frac{(2b(2ax+by)+2dy)^2}{((2ax+by)^2+dy^2)^{\sigma+2}} e^{it\ln(\varphi(y))\pm 2\pi ik} dy \ll$$

$$\ll \sup_{y\leqslant V}\left\{\frac{(2b(2ax+by)+2dy)^2}{((2ax+by)^2+dy^2)^{\sigma+2}}\right\} \frac{1}{\min_{y\leqslant V}\left|t\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \pm 2\pi k\right|}.$$

Заметим, что $t\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \ll \frac{t}{V} < 1$. Поэтому $\frac{1}{\min_{y\leqslant V}\left|t\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\pm 2\pi k\right|} \ll \frac{1}{k}$. Далее оценим $\sup_{y\geqslant V}\left\{\frac{(2b(2ax+by)+2dy)^2}{((2ax+by)^2+dy^2)^{\sigma+2}}\right\}$ в зависимости от параметра x. В случае

$$2ax+by \leqslant y\sqrt{d},$$

имеем неравенство

$$\frac{(2b(2ax+by)+2dy)^2}{((2ax+by)^2+dy^2)^{\sigma+2}} \ll \frac{(2b(2ax+by)+2dy)^2}{(dy^2)^{\sigma+2}} \ll \frac{(2by\sqrt{d}+2dy)^2}{(d^2)^{\sigma+2}} \ll$$

$$\ll \frac{(dy)^2}{(d^2)^{\sigma+2}} = y^{-2\sigma-2}d^{-\sigma}.$$

Если же $2ax+by > y\sqrt{d}$ то

$$\frac{(2b(2ax+by)+2dy)^2}{((2ax+by)^2+dy^2)^{\sigma+2}} \ll \frac{(2b(2ax+by)+2dy)^2}{(2ax+by)^{\sigma+2}} \ll$$

$$\ll \left(\frac{b}{(2ax+by)^{\sigma+1}}\right)^2 + \left(\frac{yd}{(2ax+by)^{\sigma+1}}\right)^2.$$

Полученные оценки проинтегрируем по x и просуммируем по k.

Суммирование по k дает абсолютную константу, поэтому приходим к оценке

$$R_{021} \ll t^2 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{y\sqrt{d}-by}{2a}} y^{-2\sigma-2}d^{-\sigma}dx+$$

$$+t^2 \int_{\frac{y\sqrt{d}-by}{2a}}^{\infty} \left(\left(\frac{b}{(2ax+by)^{\sigma+1}}\right)^2 + \left(\frac{yd}{(2ax+by)^{\sigma+1}}\right)^2\right)dx \ll$$

$$t^2\left(y^{-2\sigma-2}\frac{y\sqrt{d}}{a}d^{-\sigma}\right) + \frac{t^2}{a}\int_{y\sqrt{d}}^{\infty}\left(\left(\frac{b}{z^{\sigma+1}}\right)^2 + \left(\frac{yd}{z^{\sigma+1}}\right)^2\right)dz \ll$$

$$\ll t^2y^{-2\sigma-1}d^{\frac{1}{2}-\sigma}a^{-1} + t^2a^{-1}b^2(y\sqrt{d})^{-2\sigma-1} + t^2a^{-1}y^2d^2(y\sqrt{d})^{-2\sigma-3} \ll$$

$$\ll t^2y^{-2\sigma-1}d^{\frac{1}{2}-\sigma}a^{-1} \ll t^2V^{-2\sigma-1}d^{\frac{1}{2}-\sigma}a^{-1}.$$

Требуемая оценка для величины R_{021} получена. Перейдем теперь к оценке R_{022}. По определению R_{022} имеет вид

$$R_{022} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} dx \int\limits_{V}^{\infty} \frac{2s(b^2+d)}{((2ax+by)^2+dy^2)^{s+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi ky}{(2\pi k)^2} dy.$$

Переходя к неравенствам, будем иметь

$$R_{022} \ll td \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} dx \int\limits_{V}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\pm 2\pi ik + it\ln((\varphi(y))}}{(2\pi k)^2 (\varphi(y))^{\sigma+1}} dy,$$

где $\varphi(y) = (2ax+by)^2 + dy^2$. Как и ранее с помощью второй теоремы о среднем заключаем, что

$$R_{022} \ll td \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{((2ax+by)^2+dy^2)^{\sigma+1}},$$

где $y \leqslant V$. Внутренний интеграл по y оценим в зависимости от параметра x. Участок интегрирования разобьем на две части, отвечающие условиям $2ax + by < y\sqrt{d}$ и $2ax + by \geqslant y\sqrt{d}$. Следовательно,

$$R_{022} \ll td \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{((ax)^2+V^2d)^{\sigma+1}} \ll td \int\limits_{\frac{1}{2}}^{V\frac{\sqrt{d}}{a}} \frac{dx}{(V^2d)^{\sigma+1}} + td \int\limits_{V\frac{\sqrt{d}}{a}}^{\infty} \frac{dx}{(a^2d)^{\sigma+1}} \ll$$

$$\ll tdV\frac{\sqrt{d}}{a}V^{-2\sigma-2}d^{-\sigma-1} + tda^{-2\sigma-2}x^{-2\sigma-1}\Big|_{x=V\frac{\sqrt{d}}{a}} \ll$$

$$\leqslant td^{\frac{1}{2}-\sigma}a^{-1}V^{-1-2\sigma}.$$

Эта оценка лучше, чем оценка для R_{021}, поэтому имеем

$$R_{02} \ll td^{\frac{1}{2}-\sigma}a^{-1}V^{-1-2\sigma}.$$

Оценка R_{21}.

Выписывая явное представление для R_{021} и переходя к неравенствам, получим

$$R_{21} = -\sum_{n>V} \frac{(((a+bn)^2+dn^2)^{-s})'_x}{12}\Bigg|_{x=\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{as}{3}\sum_{n>V}((a+bn)^2+dn^2)^{-s-1}(a+bn) \ll$$
$$\ll at\sum_{n>V}((a+bn)^2+dn^2)^{-\sigma-1}(a+bn) \ll$$
$$\ll at\sum_{n>V}(a^2+dn^2)^{-\sigma-1}(a+bn) \ll at\sum_{V<n<\frac{a}{\sqrt{d}}} a^{-2(\sigma+1)}a$$
$$+at\sum_{n>\frac{a}{\sqrt{d}}}(dn^2)^{-\sigma-1}(a+bn) \ll ata^{-2(\sigma+1)}\frac{a}{\sqrt{d}} \ll at\sum_{n>V}(a^2+dn^2)^{-\sigma-1}(a+n\sqrt{d}) \ll$$
$$\ll at\sum_{n>V}(a+n\sqrt{d})^{-2\sigma-1}a \ll atd^{-\sigma-\frac{1}{2}}\sum_{n>V}(\frac{a}{\sqrt{d}}+n)^{-2\sigma-1}a \ll$$
$$\ll atd^{-\sigma-\frac{1}{2}}(\frac{a}{\sqrt{d}}+n)^{-2\sigma} == \frac{at}{\sqrt{d}}(a+V\sqrt{d})^{-2\sigma}.$$

Таким образом

$$R_{21} \ll \frac{at}{\sqrt{d}}(a+Vd)^{-2\sigma}.$$

Наконец оценим R_{22}. Имеем

$$R_{22} = \sum_{n>V}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}(((2ax+bn)^2+dn^2)^{-s})''_{xx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2}dx.$$

Если $P(x) = F(\varphi(x))$, где $F(\varphi) = \varphi^{-s}\varphi(x) = (2ax+bn)^2+dn^2$. То

$$P''_{xx} = \left(P'_{\varphi}\varphi'_x\right)'_x = P''_{\varphi\varphi}(\varphi'_x)^2 + P'_{\varphi}\varphi''_{xx},$$
$$P'_{\varphi} = -s\varphi^{-s+1}, P''_{\varphi\varphi} = s(s+1)\varphi^{-s-2}$$
$$\varphi'_x = (2ax+bn)4a, (\varphi'_x)^2 = 16a^2(2ax+bn)^2, \varphi''_{xx} = 8a^2.$$

Следовательно $P''_{xx} = P_1(x) + P_2(x)$, где

$$P_1(x) = s(s+1)\varphi^{-s-2}16a^2(2ax+bn)^2,$$

$$P_2(x) = -s\varphi^{-s+1}8a^2.$$

В этих обозначениях величина R_{22} представляется в виде

$$R_{22} = R_{211} + R_{222},$$

где

$$R_{211}=\sum_{n>V}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}P_1(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2}dx,$$

$$R_{222}=\sum_{n>V}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}P_2(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{k^2}dx.$$

Оценим сначала R_{221}. Имеем

$$R_{211}=\sum_{n>V}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}s(s+1)\varphi^{-s-2}16a^2(2ax+bn)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2}dx=$$

$$=s(s+1)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{n<V}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}\varphi^{-s-2}16a^2(2ax+bn)^2\cos 2\pi kxdx.$$

Запишем величину φ^{-s-2} в виде

$$\varphi^{-s-2}=\varphi^{-\sigma-2}e^{-it\ln\varphi}$$

и применим вторую теорему о среднем. Получим

$$R_{211}\ll t^2a^2sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sum_{n<V}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{(a+bn)^2}{(a+n^2d)^{-\sigma-2}}\ll t^2a^2\sum_{n<V}\frac{1}{(a+n\sqrt{d})^{-2\sigma-2}}\ll$$

$$\ll t^2a^2(a+n\sqrt{d})^{-2\sigma-1}.$$

Теперь рассмотрим R_{222}. Снова опираясь на вторую теорему о среднем, получим

$$R_{222}=\sum_{n>V}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}P_2(x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2}dx=$$

$$=-s\varphi^{-s+1}8a^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{n<V}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}\varphi^{-\sigma-1}e^{it\ln\varphi}\cos 2\pi kxdx\ll$$

$$\ll ta^2\sum_{n>V}\frac{1}{((a+bn)^2+dn^2)^{\sigma+1}}\ll ta^2(a+V\sqrt{d})^{-2\sigma}.$$

Окончательная оценка для приобретает вид

$$R_{22}\ll t^2a^2(a^2+V\sqrt{d})^{-2\sigma-1}+ta^2(a+V\sqrt{d})^{-2\sigma}.$$

Но $t\left(a+V\sqrt{d})^{-1}\right) < 1$ при $t < V$. Поэтому

$$R_{22} = a^2 t(a+V\sqrt{d})^{-2\sigma}.$$

Собирая вместе все полученные ранее оценки, приходим к следующему результату

$$g(s) = \sum_{1\leqslant m,n\leqslant V} \frac{1}{((a+bn)^2+dn^2)^s} + \iint\limits_M \frac{dxdy}{((2ax+by)^2+dy^2)^s} +$$
$$+O\left(ta^{-2\sigma}V^{-2\sigma} + t^2V^{-1-2\sigma}d^{-\sigma} + td^{\frac{1}{2}}a^{-2\sigma-2}V^{-2\sigma} + ta^{-2\sigma}V^{-1-2\sigma} + \right.$$
$$\left. + td^{\frac{1}{2}-\sigma}a^{-1}V^{-2\sigma} + t^2V^{-1-2\sigma}d^{\frac{1}{2}-\sigma}a^{-1} + ta^2\left(a+V\sqrt{d}\right)^{-2\sigma}\right).$$

Учитывая, что $\sigma > \frac{1}{2}, d < a^2$ и $t \leqslant V$ остаток в полученной формуле можно преобразовать к виду $O\left(ta^2(a+V\sqrt{d}^{-2\sigma}\right)$ что и завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронин С. М. Избранные труды: математика / Под ред. и вступ. ст. А. А. Карацубы; РАН, Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 480 с.

2. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Тр. МИАН СССР. 1947. Т. 23. 110 с.

3. Титчмарш И. М. Теория дзета-функции Римана. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 409 с.

4. Авдеев И. Ф. О некоторых формулах суммирования // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 4(40). С. 24—32.

5. Авдеев Ф. С., Авдеев И. Ф. Асимптотическое разложение остаточного члена в приближенном функциональном уравнении для дзета-функции Римана // Ученые записки Орловского гос. ун-та. Сер. Естественные науки. 2012. № 3(47). С. 6—14.

6. Авдеев И. Ф. Об оценке остаточного члена в приближенном функциональном уравнении Харди-Литтлвуда для дзета-функции Римана // Ученые записки Орловского гос. ун-та. Сер. Естественные науки. 2012. № 3(47). С. 15—19.

Орловский государственный университет
Поступило 27.05.2013