ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-282-295

Об одном варианте метода Адамара в теории L-функций Дирихле[1]

О. В. Колпакова, О. В. Попов, В. Н. Чубариков

Колпакова Ольга Викторовна — кандидат физико-математических наук, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: olja_k@list.ru
Попов О. В. — кандидат физико-математических наук, доцент, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: ovlpopov@yandex.ru
Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Аннотация

В статье дан новый вариант метода Адамара в теории L-функций Дирихле. Доказано этим методом отсутствие нулей L-функций на единичной прямой. Показано, что метод Адамара позволяет получить результаты, которые по точности соответствуют результатам Валле-Пуссена в асимптотическом законе распределения простых чисел. Тем самым расширены возможности метода Адамара. Получены новые оценки дзетовой суммы, скрученной с характером Дирихле по модулю, равному степени нечётного простого числа, что позволяет получить современную границу нулей для соответствующей L-функции Дирихле.

Ключевые слова: характеры Дирихле, метод Адамара, асимптотический закон распределения простых чисел с остатком Валле Пуссена, функции Дирихле, дзетовая сумма, скрученная с характером Дирихле.

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:
О. В. Колпакова, О. В. Попов, В. Н. Чубариков. Об одном варианте метода Адамара в теории L-функций Дирихле // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 282–295.

[1]Работа выполнена на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-282-295

On a version of Hadamard's method in the theory of Dirichlet's L-functions[2]

O. V. Kolpakova, O. V. Popov, V. N. Chubarikov

Kolpakova Olga Viktorovna — candidate of physical and mathematical Sciences, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: olja_k@list.ru
Popov O. V. — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: ovlpopov@yandex.ru
Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

In the paper a new version of the Hadamard's method in the theory of Dirichlet's L-functions is given. We prove of this method of the absence of the L-functions zeroes on the unit line. We show that the Hadamard's method allow to get results, which on the accuracy correspond to the Vallee Poussin results in the asymptotical law of the distribution of primes. Of this we extend possibilities of the Hadamard's method. New estimations of the zeta-sum twisted together with the Dirichlet's character by modulo, equals to the degree of an odd prime number are obtained that permits to get the modern limit of zeroes for the corresponding Dirichlet's L-function.

Keywords: Dirichlet's characters, the Hadamard's method, the asymptotical law of the distribution of primes with the Vallee Poussin remainder, Dirichlet's functions, the zeta-sum twisted together with the Dirichlet's character.

Bibliography: 28 titles.

For citation:
O. V. Kolpakova, O. V. Popov, V. N. Chubarikov, 2019, "On a version of Hadamard's method in the theory of Dirichlet's L-functions" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 282–295.

1. Введение

В настоящей статье дан вывод современной границы нулей L — функций Дирихле на основе метода, представляющего собой вариант метода Адамара [3] для дзета-функции Римана (см. [22, 23]).

В изложении Титчмарша [9] метод Адамара состоит в следующем. Простой полюс функции $\zeta(s), s = \sigma + it$, в точке $s = 1$ при $\sigma \to 1 + 0$ даёт асимптотическое равенство

$$\ln \zeta(\sigma) \sim \sum_p \frac{1}{p^\sigma} \sim \ln \frac{1}{\sigma - 1},$$

[2]The work was performed at the faculty of Mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow state University.

где p пробегает все простые числа натурального ряда чисел.

Допущение наличия нуля $s = 1 + it_0$ дзета-функции Римана на единичной прямой при $s = \sigma + it_0, \sigma \to 1 + 0$, приводит к соотношению

$$\sum_p \frac{\cos(t_0 \ln p)}{p^\sigma} \sim \ln|\zeta(s)| \sim \ln(\sigma - 1) \sim \sum_p \frac{-1}{p^\sigma}.$$

Далее имеем

$$\ln|\zeta(\sigma + 2it_0)| \sim \sum_p \frac{\cos(2t_0 \ln p)}{p^\sigma} \sim \sum_p \frac{1}{p^\sigma} \sim \ln \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Это означает, что точка $s = 1 + 2it_0$ является полюсом функции $\zeta(s)$, но это не так. Следовательно, допущение, что $\zeta(1 + it_0) = 0$ не имеет места.

Другой вариант метода Адамара дал Аткинсон (см.[9]). Допустим, как и прежде, что $s = 1 + it_0$ — нуль функции $\zeta(s)$, и пусть

$$P = \sum_p \frac{1}{p^\sigma}, S = \sum_p \frac{\cos(t_0 \ln p)}{p^\sigma}, Q = \sum_p \frac{\cos(2t_0 \ln p)}{p^\sigma}.$$

Тогда при $s = \sigma + it_0, \sigma \to 1 + 0$, имеем

$$P \sim \ln(\sigma - 1), S \sim \ln(1/(\sigma - 1)).$$

Используя неравенство Коши, находим

$$P^2 = \left(\sum_p \frac{\cos(t_0 \ln p)}{p^\sigma}\right)^2 = \left(\sum_p \frac{\cos(t_0 \ln p)}{p^{\sigma/2}} \frac{1}{p^{\sigma/2}}\right)^2 \le$$

$$\le \sum_p \frac{\cos^2(t_0 \ln p)}{p^\sigma} \sum_p \frac{1}{p^\sigma} = \frac{1}{2} \sum_p \frac{1 + \cos(2t_0 \ln p)}{p^\sigma} \sum_p \frac{1}{p^\sigma} = \frac{1}{2}(S + Q)S,$$

т.е.

$$Q \ge \frac{2P^2}{S} - S \sim \ln \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Правая часть последнего выражения стремится к бесконечности при $\sigma \to 1 + 0$. Это означает, что точка $s = 1 + 2it_0$ является полюсом функции $\zeta(s)$, но это не так.

2. §1. Отсутствие нулей L-функции Дирихле на единичной прямой

Здесь мы даём новый вариант метода Адамара в применении к L-функциям Дирихле.

Теорема 1. *Пусть $q > 1$ — натуральное число, χ — комплексный характер Дирихле по модулю q. Тогда L-функция Дирихле $L(s, \chi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$ не обращается в нуль на прямой* $\mathrm{Re}\, s = 1$.

Доказательство. Пусть $\rho = 1 + it_0$ — нуль $L(s, \chi)$, т.е. $L(\rho, \chi) = 0$, тогда он простой. Предположим противное. Пусть кратность нуля равна $k \ge 2$. Возьмём точку $s = \sigma + it_0, \sigma > 1$. Тогда при $\sigma \to 1 + 0$ имеем

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{k}{\sigma - 1} + O(1),$$

и для главного характера χ_0 по модулю q при $\sigma > 1$ получим

$$L(s,\chi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_0(n) n^{-s} = \zeta(s) \prod_{p|q} (1-p^{-s}), \quad -\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)} = \frac{1}{\sigma-1} + O(1).$$

Далее находим

$$\delta = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} \left(1 + \mathrm{Re}(\chi(n) n^{it_0})\right) \geq 0,$$

и при $\sigma \to 1+0$ получим

$$\delta = -\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)} + \mathrm{Re}\left\{-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right\} = \frac{1-k}{\sigma-1} + O(1) \to -\infty.$$

Это противоречие показывает, что $k \leq 1$.

Предположим, как и раньше, что $L(1+it_0,\chi) = 0$, и пусть $\chi(n) n^{it_0} = e^{i\varphi}$. Тогда находим

$$\Delta = -\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)} + \mathrm{Re}\left\{\frac{L'(\sigma+2it_0,\chi^2)}{L(\sigma+2it_0,\chi^2)}\right\} = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} (1-\cos 2\varphi) \geq 0,$$

Оценим Δ при $\sigma \to 1+0$. Получим

$$\Delta = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} (1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi) \leq$$

$$\leq 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma}} (1+\cos\varphi) = 4\delta = O(1).$$

Это означает, что $L(s,\chi)$ имеет полюс в точке $1+2it_0$. Данное утверждение противоречит тому факту, что $L(s,\chi)$ является аналитической функцией при $\mathrm{Re}s > 0$.

Теорема доказана. □

3. §2. Отсутствие нулей L-функции Дирихле в окрестности единичной прямой

Итак, для любого $\sigma > 1$ и для любого $t \in \mathbf{R}$ установлено неравенство $\Delta \leq 4\delta$, где $s = \sigma + it$,

$$\delta = -\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)} + \mathrm{Re}\left\{-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right\},$$

$$\Delta = -\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)} + \mathrm{Re}\left\{\frac{L'(\sigma+2it,\chi^2)}{L(\sigma+2it,\chi^2)}\right\}.$$

Отсюда находим

$$0 \leq 4\delta - \Delta = 3\left\{-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}\right\} + 4\mathrm{Re}\left\{-\frac{L'(\sigma+it,\chi_0)}{L(\sigma+it,\chi_0)}\right\} + \mathrm{Re}\left\{-\frac{L'(\sigma+2it,\chi^2)}{L(\sigma+2it,\chi^2)}\right\}.$$

Стандартным образом из последнего неравенства выводим следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть χ — примитивный комплексный характер по модулю q и $\rho=\beta+i\gamma$, $\gamma\neq 0$, — нуль $L(s,\chi)$. Тогда*

$$\mathrm{Re}\rho=\beta\geq 1-\frac{c}{\log\{q(|\gamma|+2)\}},$$

где $c>0$ — некоторая постоянная.

Пусть χ — примитивный действительный характер по модулю q и $\rho=\beta+i\gamma,\gamma\neq 0$, — нуль $L(s,\chi)$. Тогда найдется абсолютная положительная постоянная c' такая, что при $|\gamma|\geq 1/(c'\mathcal{L})$ имеем

$$\beta\leq\frac{1}{21c'\mathcal{L}}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай комплексного характера χ, т.е. $\chi^2\neq\chi_0$. Находим

$$-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}=-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}+\sum_{p|q}\frac{p^{-s}\log p}{1-p^{-s}}=\frac{1}{s-1}+R_1,|R_1|\leq\log(eq),$$

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right\}=-\mathrm{Re}\frac{1}{s-\rho}+R_2,|R_2|\leq c_1\log\{q(|t|+2)\},$$

где $\rho=\beta+i\gamma$ — нуль $L(s,\chi)$,

$$\mathrm{Re}\left\{-\frac{L'(\sigma+2it,\chi^2)}{L(\sigma+2it,\chi^2)}\right\}=R_3,|R_3|\leq c_2\log\{q(|t|+2)\}.$$

Далее получим

$$0\leq 4\delta-\Delta\leq\frac{3}{\sigma-1}-\mathrm{Re}\frac{4}{s-\rho}+c_3\log\{q(|t|+2)\}.$$

Положим $|t|=\gamma,\sigma=1+\frac{1}{2\mathcal{L}},\mathcal{L}=\log\{q(\gamma+2)\}$. Тогда для границы нулей $L(s,\chi)$ находим

$$\beta\leq 1-\frac{1}{14c_3\mathcal{L}}.$$

Пусть теперь χ — действительный примитивный характер по модулю q, т.е. $\chi^2=\chi_0$. Тогда, взяв $s=\sigma+it,\rho=\beta+i\gamma$ — нуль $L(s,\chi)$ и положив $t=\gamma$, имеем

$$\Delta=-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}+\mathrm{Re}\left\{\frac{L'(\sigma+2it,\chi_0)}{L(\sigma+2it,\chi_0)}\right\}=$$

$$=-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}+\mathrm{Re}\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)}+\sum_{p|q}\frac{p^{-\sigma}\log p}{1-p^{-\sigma}}-\mathrm{Re}\sum_{p|q}\frac{p^{-\sigma-2it}\log p}{1-p^{-\sigma-2it}}=$$

$$=\frac{1}{\sigma-1}-\mathrm{Re}\frac{1}{\sigma-1+2it}+2\theta_2\log(eq),|\theta_2|\leq 1,$$

$$\delta=-\frac{L'(\sigma,\chi_0)}{L(\sigma,\chi_0)}+\mathrm{Re}\left\{-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sigma-1}+\frac{1}{\sigma-\beta}+R_4,|R_4|\leq c_4\log(q(\gamma+2)).$$

Следовательно,

$$0\leq 4\delta-\Delta\leq\frac{3}{\sigma-1}-\frac{4}{\sigma-\beta}+\mathrm{Re}\frac{1}{\sigma-1+2i\gamma}+c_5\log\{q(\gamma+2)\}.$$

Отсюда находим

$$\frac{3}{\sigma-1}-\frac{4}{\sigma-\beta}+\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4\gamma^2}+c_5\log\{q(\gamma+2)\}\geq 0.$$

Положим $\sigma=1+\frac{1}{c_5\mathcal{L}}$ и предположим, что $\gamma\geq\frac{1}{c_5\mathcal{L}}$. Тогда из предыдущего неравенства имеем

$$\frac{4}{\sigma-\beta}\leq 3c_5\mathcal{L}+\frac{c_5\mathcal{L}}{5}+c_5\mathcal{L}=\frac{21c_5\mathcal{L}}{5}.$$

Стало быть,

$$\beta\leq 1-\frac{1}{21c_5\mathcal{L}}.$$

Теорема 2 доказана. □

4. §3. Дзетовая сумма, скрученная с характером Дирихле по модулю, равному степени простого числа

Пусть $n,N\geq 2$ — натуральные числа, p — нечётное простое число, $q=p^n$, $\tau=|t|+2$, $N^r=q\tau$, $1\leq r\leq n/2$, χ — примитивный характер Дирихле по модулю q.

Дзетовой суммой, скрученной с характером Дирихле по модулю $q=p^n$, равному степени нечётного простого числа, назовём сумму вида

$$S=S(N;t,\chi)=\sum_{m\leq N}\chi(m)m^{it}.$$

Теорема 3. *Пусть S — дзетовая сумма, скрученная с характером Дирихле по модулю $q=p^n$, равному степени нечётного простого числа. Тогда*

$$|S|\ll N^{1-\frac{\gamma}{r^2}},$$

где постоянные γ и в знаке $\ll$ — абсолютные.

Лемма 1. *Пусть $n,s\leq n-1$ — натуральные числа, χ — примитивный характер по модулю p^n. Тогда при некотором $(\lambda,p)=1$ справедливо равенство*

$$\chi(1+p^{s+1}m^*xy)=\exp\left(\frac{2\pi i\lambda\Phi(p^{s+1}m^*xy)}{p^{n-s-1}}\right),$$

где

$$\Phi(p^{s+1}m^*xy)=xy+\sum_{\mu=2}^{\infty}a_\mu p^{(s+1)(\mu-1)}(m^*xy)^\mu,$$

причём

$$a_\mu=(-1)^{\mu-1}p^{-\tau}\mu_1^*,\mu=p^\tau\mu_1,(\mu_1,p)=1,\mu_1\mu_1^*\equiv 1\pmod{p^{n-s-1}}.$$

Доказательство. см. [24],[27].

Лемма 2. *Пусть $l\geq 0$ — целое число, $n\geq 2$ — натуральное число, $P>1$. Тогда при $k\geq nl$ для величины*

$$J=J(P;k,n)=\int_0^1\cdots\int_0^1|T(\alpha_n,\ldots,\alpha_1)|^{2k}\,d\alpha_n\ldots d\alpha_1,$$

где
$$T(\bar{\alpha}) = T(\alpha_n \ldots, \alpha_1) = \sum_{x \le P} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)},$$
справедлива оценка
$$J \le D(l) P^{2k - 0,5n(n+1) + \delta(l)},$$
где
$$\delta(l) = 0,5n(n+1)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^l, D(l) = k^{nl} n^{2n^3(n+1)\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^l\right)} 2^{4n^2(n+1)l}.$$

Лемма 3. *Пусть* $\Pi_n \subset \mathbf{R}^n$ *— параллелепипед, со сторонами параллельными соответствующим осям координат, и длины этих сторон равны*
$$d_s = c_s^{-1} n^{-1} P^{-s-\kappa}, c_s > 4\pi, s = 1, \ldots, n.$$
Пусть, также, найдётся точка $\bar{\alpha} = (\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ *такая, что*
$$|T(\bar{\alpha})| > P^{1-\kappa}. \tag{$*$}$$
Тогда для любой точки $\bar{\beta} \in \Pi_n$ *имеем*
$$|T(\bar{\beta})| > 0,5P^{1-\kappa}.$$

Выберем постоянные c_s в условии леммы 3, принадлежащими промежутку $(4\pi, 4\pi + 0,5]$, так, чтобы при $s = 1, \ldots, n$ все числа d_s^{-1} были целыми. Разобьём все точки единичного куба $E = \{\bar{\alpha} | 0 \le \alpha_n, \ldots, \alpha_1 < 1\}$ на равные параллелепипеды Π_n.

Лемма 4. *Пусть* $k \ge nl$. *Тогда количество* M *параллелепипедов* Π_n *с условием* $(*)$ *удовлетворяет неравенству*
$$M \le 2^{2k}(c_n \ldots c_1)^{-1} n^n D(l) P^{\kappa(2k+n)+\delta(l)}.$$

Доказательство теоремы 3. Разобьём промежуток суммирования $[1, N]$ на промежутки вида $(K, eK]$ так, что $e^r \le N < e^{r+1}$, т.е. $r = [\ln N], K = e^s, 0 \le s \le r$ и $(e^r, N]$. Количество таких промежутков не превосходит $\ln N + 1$. Следовательно, достаточно оценить сумму
$$S(K) = \sum_{K < k \le K_1} \chi(k) k^{it}, K < K_1 \le eK.$$
В сумме $S(K)$ произведём сдвиг промежутка суммирования на величину u. В понятных обозначениях получим
$$S(K) = \sum_{K+u < k \le K_1+u} \cdots + \sum_{K < k \le K+u} \cdots - \sum_{K_1 < k \le K_1+u} \cdots.$$
Отсюда находим
$$S(K) = \sum_{K < k \le K_1} \chi(k+u)(k+u)^{it} + 2\theta u, |\theta| \le 1.$$
Возьмём $u = p^{s+1}xy, s = [0,25\log_p K] - 1, a = [K^{1/4}], 1 \le x, y \le a$, и просуммируем предыдущее равенство по переменным x, y в пределах от 1 до a. Имеем
$$|S(K)| \le a^{-2} \sum_{\substack{K < l \le K_1 \\ (k,p)=1}} |W(k)| + 2p^{s+1}a^2,$$

где

$$W(k) = \sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{a}\chi(1+p^{s+1}k^{*}xy)\exp\left(it\ln\left(1+p^{s+1}k^{-1}xy\right)\right),$$

причём $kk^{*}\equiv 1 \pmod{p^n}$, если $(k,p)=1$.

Далее воспользуемся разложением функции логарифм по формуле Тейлора до $r = \left[\frac{4\ln(q\tau)}{\ln K}\right]+1$ члена. Получим

$$\ln\left(1+\frac{p^{s+1}xy}{k}\right) = F_r(p^{s+1}xy)+\theta_1\left(\frac{p^{s+1}a^2}{k}\right)^{r+1}, |\theta_1|\le 1,$$

где

$$F_r(p^{s+1}xyk^{-1}) = \sum_{\nu=1}^{r}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\left(\frac{p^{s+1}xy}{k}\right)^{\nu}$$

По формуле А. Г. Постникова (лемма 1) примитивный характер χ по модулю p^n при некотором $(\lambda,p)=1$ можно представить в виде

$$\chi(1+p^{s+1}k^{*}xy) = \exp\left(\frac{2\pi i\lambda\Phi(p^{s+1}k^{*}xy)}{p^{n-s-1}}\right),$$

где

$$\Phi(p^{s+1}k^{*}xy) = xy+\sum_{\mu=2}^{\infty}a_{\mu}p^{(s+1)(\mu-1)}(k^{*}xy)^{\mu},$$

причём

$$a_{\mu} = (-1)^{\mu-1}p^{-\tau}\mu_1^{*}, \mu=p^{\tau}\mu_1, (\mu_1,p)=1, \mu_1\mu_1^{*}\equiv 1 \pmod{p^{n-s-1}}.$$

Следовательно,

$$W=W(k)=W_1+R,\quad R\le\tau\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{a}\left(\frac{p^{s+1}a^2}{k}\right)^{r+1}\le a^2\tau\left(\frac{p^{s+1}a^2}{k}\right)^{r+1},$$

где

$$W_1=\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{a}\exp\left(\frac{2\pi i\lambda\Phi(p^{s+1}k^{*}xy)}{p^{n-s-1}}+itF_r(p^{s+1}xyk^{-1})\right)=\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{a}\exp G(x,y),$$

причём

$$G(x,y)=\sum_{\nu}b_{\nu}(xy)^{\nu},$$

$$b_{\nu}=(-1)^{\nu}p^{(s+1)\nu-\tau_{\nu}}\left(\frac{\lambda\nu_1^{*}k^{*\nu}}{p^{n-s-1}}+\frac{t}{2\pi\nu_1k^{\nu}}\right).$$

Возведём сумму W_1 в степень $2l, l=r\tau, l=5\tau$, и воспользуемся неравенством Гёльдера. Получим

$$|W_1|^{2l}\le a^{2l-1}\sum_{y_1,\dots,y_{2l}}T(\mathbf{b},\mathbf{Y}),\quad T(\mathbf{b},\mathbf{Y})=\left|\sum_{x=1}^{a}\exp 2\pi i(b_1Y_1x+\dots+b_rY_rx^r)\right|,$$

где

$$Y_s=y_1^s+\dots+y_l^s-y_{l+1}^s-\dots-y_{2l}^s,\quad s=1,\dots,r;\quad (\mathbf{b},\mathbf{Y})=(b_1Y_1,\dots,b_rY_r).$$

Разобьём все точки $\mathbf{Y}$ из $\mathbf{R}^r$ на два класса. К первому классу E_1 отнесём те из них, для которых

$$|T(\mathbf{b},\mathbf{Y})|\le a^{1-\kappa}.$$

Остальные точки отнесём ко второму классу E_2.

Тогда при $k = rl, l = 5r$, имеем

$$|W_1|^{2k} \le a^{2k-1}(\Sigma_1 + \Sigma_2), \Sigma_1 = \sum_{\mathbf{Y}\in E_1} T(\mathbf{b}, \mathbf{Y}), \Sigma_2 = \sum_{\mathbf{Y}\in E_2} T(\mathbf{b}, \mathbf{Y}).$$

Оценим Σ_1. Количество наборов $\mathbf{Y}$ не превосходит числа всех наборов вида $(y_1, \ldots, y_{2k})$, т.е. a^{2k}. Следовательно,

$$a^{2k-1}\Sigma_1 \le a^{4k-\kappa}.$$

Перейдём теперь к оценке Σ_2. Имеем, что $\mathbf{Y} \in E_2$, если

$$a^{1-\kappa} < |T(\mathbf{b}, \mathbf{Y})| \le a,$$

и, кроме того, координаты $Y_s, s = 1, \ldots, r$, вектора $\mathbf{Y}$ принимают целые значения z_s, удовлетворяющие условиям $|z_s| < ka^s$.

Далее, для любого фиксированного набора $z_s, s = 1, \ldots, r$, число решений системы уравнений $Y_s = z_s$ (лемма 4) не превосходит величины

$$V = D(l)a^{2k-\frac{r(r+1)}{2}+\frac{r(r+1)}{2}(1-\frac{1}{r})^l}.$$

Оценим сверху общее число I точек $\{\mathbf{b}, \mathbf{Y}\} = \{b_1Y_1, \ldots, b_rY_r\}$, попадающих в заданный малый параллелепипед со сторонами $d_s = c_sr^{-1}a^{-s-\kappa}, s = 1, \ldots, r$. С этой целью разобьём все координаты b_sz_s на три случая: первый — при $r/2 < s \le r-4$; второй — при $r/3 < s \le r/2-2$; и к третьему случаю отнесём все оставшиеся точки.

Так как значения $|z_s| \le ka^s, |b_s| \le \frac{|t|}{2\pi sK^s}, a = [K^{1/4}]$, то

$$|b_sz_s| \le \frac{|t|}{2\pi sK^s}ka^s \le \frac{ka^{r+s}}{2\pi sK^s}.$$

В третьем случае воспользуемся тривиальной оценкой вида: $< 2ka^s$.

Отсюда находим, что общее число I точек $(\mathbf{b}, \mathbf{Y}) = (b_1Y_1, \ldots, b_rY_r)$, попадающих в заданный малый параллелепипед со сторонами $d_s = c_sr^{-1}a^{-s-\kappa}, s = 1, \ldots, r$, не превосходит

$$I \le a^{\frac{r(r+1)}{2}0{,}75}.$$

Таким образом,

$$a^{2k-1}\Sigma_2 \le VIMa^{2k} \le a^{4k-100}.$$

Собирая вместе найденные выше оценки Σ_1 и Σ_2, получим утверждение теоремы. □

5. §4. Современная граница нулей L-функции Дирихле по модулю, равному степени простого числа

Лемма 5. *Пусть $M \ge 1, r > 0, s, s_0 \in \mathbf{C}$, функция $F(s)$ — аналитическая в круге $|s-s_0| \le r, F(s_0) \ne 0$, для любого s, принадлежащего этому кругу имеем $|F(s)/F(s_0)| \le M$, и пусть $F(s) \ne 0$ в полукруге $|s-s_0| \le r/2, \quad \mathrm{Re}(s-s_0) \ge 0$. Тогда для любого нуля ρ функции $F(s)$ из полукруга $|s-s_0| \le r/2, \quad \mathrm{Re}(s-s_0) < 0$ справедливы неравенства*

$$\alpha) \quad \mathrm{Re}\frac{F'(s_0)}{F(s_0)} \ge -\frac{4}{r}\log M;$$

$$\beta) \quad \mathrm{Re}\frac{F'(s_0)}{F(s_0)} \ge -\frac{4}{r}\log M + \mathrm{Re}\frac{1}{s_0-\rho}.$$

Теорема 4. *Пусть $s=\sigma+it$ и при $1-2\cdot 10^{-4}\le\sigma\le 1, t\ge 2$ справедлива оценка*

$$|L(s,\chi)|\ll (qt)^{a(1-\sigma)^{3/2}}(\log(qt))^{2/3}.$$

Тогда при некотором $t_0\ge 1$, L-функция Дирихле не имеет нулей в следующей области комплексной s-плоскости

$$t\ge t_0,\quad \sigma\ge 1-ca^{-2/3}(\log(qt))^{-2/3}(\log\log qt)^{-1/3}.$$

Доказательство. Возьмём любой нуль $\rho=\beta+i\gamma$ в критической полосе функции $L(s,\chi)$. Положим

$$s_0=\sigma_0+i\gamma, \mathcal{K}=(\log(qt))^{-2/3}(\log\log qt)^{-1/3}, \sigma_0=1+A\mathcal{K}.$$

В лемме 1 возьмём

$$r=(3a)^{-2/3}\mathcal{K}\log\log(q\gamma), M_0=\max_{|s-s_0|\le r}\left|\frac{L(s,\chi)}{L(s_0,\chi)}\right|.$$

Тогда имеем

$$-\mathrm{Re}\frac{L'(s_0,\chi)}{L(s_0,\chi)}\le\frac{4}{r}\log M_0-\frac{1}{\sigma_0-\beta},$$

$$-\frac{L'(s_0,\chi_0)}{L(s_0,\chi_0)}=\frac{1}{\sigma_0-1}+R_1, |R_1|\le\log(eq).$$

Отсюда находим

$$\delta=-\frac{L'(\sigma_0,\chi_0)}{L(\sigma_0,\chi_0)}-\mathrm{Re}\frac{L'(s_0,\chi)}{L(s_0,\chi)}\le\frac{1}{\sigma_0-1}+\frac{4}{r}\log M_0-\frac{1}{\sigma_0-\beta}+\log(eq).$$

Теперь возьмём круг радиуса r с центром в точке $s_1=\sigma_0+2i\gamma$. Положим

$$M_1=\max_{|s-s_1|\le r}\left|\frac{L(s,\chi)}{L(s_1,\chi)}\right|.$$

Тогда из леммы 1 имеем

$$\Delta=-\frac{L'(\sigma_0,\chi_0)}{L(\sigma_0,\chi_0)}+\mathrm{Re}\frac{L'(s_1,\chi)}{L(s_1,\chi)}\ge\frac{1}{\sigma_0-1}-\frac{4}{r}\log M_1-\log((eq).$$

Из последних оценок получим

$$0\le 4\delta-\Delta\le\frac{3}{\sigma_0-1}-\frac{4}{\sigma_0-\beta}+\frac{16}{r}\log M_0+\frac{4}{r}\log M_1+5\log(eq).$$

Найдем верхние границы величин M_0 и M_1. Очевидно,

$$|L(s_0,\chi)|^{-1}\le\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma_0}}=\zeta(\sigma_0)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^{\sigma_0}}\right)\le$$

$$\le 1+\int\limits_1^{+\infty}u^{-\sigma_0}\,du=1+(\sigma_0-1)^{-1}=1+\frac{1}{A\mathcal{K}};\quad |L(s_1,\chi)|^{-1}\le 1+\frac{1}{A\mathcal{K}}.$$

□

6. Заключение

Проблемы распределения нулей и оценки сверху модулей дзета-функции Римана и L — функций Дирихле в критической полосе тесно связаны между собой. Важность их решения обусловлена в первую очередь выводом асимптотического закона распределения простых чисел в натуральном ряду и в арифметических прогрессиях.

Нам представляется интересным продолжение исследований дзетовой суммы, скрученной с характерами Дирихле по модулю, равному степени простого числа, и вообще, по произвольному модулю.

Более чем красноречиво о трудностях оценки остатка R в асимптотической формуле для числа простых чисел, не превосходящих N,

$$\pi(N) = \int\limits_2^N \frac{dx}{\ln x} + R, R \ll N \exp\left(-c_1(\ln N)^{0,6}(\ln\ln N)^{-0,2}\right), c_1 > 0,$$

И. М. Виноградов во введении к своей монографии [13] писал: "Однако если допустить справедливость гипотезы Римана, следствием которой явилось бы $R \ll \sqrt{N}\ln N$, то и этот результат крайне далёк от окончательного, и в этом отношении он не очень далеко ушёл от первоначального результата Валле Пуссена. Более того, если бы даже в лемме 9, главы 4 [13] было

$$|S| < 2a^{1-c_2/n} \quad \text{вместо} \quad |S| < 2a^{1-\frac{1}{30000n^2}},$$

то и тогда мы могли бы получить (сохраняя в остальном прежнее доказательство) лишь результат

$$R \ll N \exp\left(-c_3(\ln N)^{\frac{2}{3}}(\ln\ln N)^{-\frac{1}{5}}\right),$$

опять-таки принципиально немногим лучший предыдущего. По-видимому, добиться существенных сдвигов в решении вопроса о порядке R (хотя бы найти $R \ll N^{1-c}$, пусть даже с $c = 0,000001$) с помощью только улучшения оценок сумм Г. Вейля без дополнительных существенных сдвигов в теории функции $\zeta(s)$ трудно."

В настоящей статье мы использовали идеи и соображения работ [1]–[28].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. М.: ОНТИ, 1936.

2. Риман Б. О числе простых, не превышающих данной величины. Сочинения. М.: ОГИЗ, 1948. С. 216–224.

3. Hadamard J. Sur la distribution des z*é*ros de la fonction $\zeta(s)$ et cons*é*quencies arithmetiques // Bull. Soc. Math. France, 1896, **24.**

4. de la Valle*é* Poussin C. J. Recherches analytiques sur la theorie des nombres. Premiere partie: La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers general // Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1896, bf 20, 183–256.

5. de la Valle*é* Poussin C. J. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inf*é*rieurs *à* une limite donn*é*e // Memories couronnes de l'Acad. Roy. des Sci. Belgique, 1899–1900, **59,** № 1.

6. Weyl H. Zur Abschätzung von $\zeta(1 + it)$ // Math. Zs., 1921, bf 10, 88–101.

7. Littlewood J. E. Researches in the theory of Riemann ζ-function // Proc. London Math. Soc., 1922, **(2)20,** XXII–XXVIII.

8. Landau E. Uber die ζ-Funktion und die L-Funktion // Math.Zs., 1924, **20,** 105–125.

9. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.

10. Чудаков Н. Г. О нулях L-функций Дирихле // Матем. сб., 1936, **1(43),** 591–602.

11. Чудаков Н. Г. О нулях функции $\zeta(s)$ // Докл. АН СССР, 1936, 187–201.

12. Виноградов И. М. Новая оценка функции $\zeta(1 + it)$ // Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, **22,** № 2, 161–164.

13. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел / 2-е изд., исправленное и дополненное. М.: Физматлит, 1980. 144 с.

14. Коробов Н. М. О нулях функции $\zeta(s)$ // Докл. АН СССР, 1958, **118,** 231–232.

15. Коробов Н. М. Оценки тригонометрических сумм и их приложения // Усп. матем. наук, 1958, **13,** вып. 4, 185–192.

16. Richert H.-E. Zur Abschätzung der Riemannschen Zeta-funktion in der Nahe der Vertikalen $\sigma = 1$ // Math. Ann., 1967, **169,** № 2, 97–101.

17. Карацуба А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова и их приложения // Тр. МИАН СССР, 1971, **112,** 241–255.

18. Arkhipov G., Buriev K. Refinement of estimates for the Riemann zeta-function in a neibourhood of the line $\mathrm{Re}(s) = 1$ // Integral Transforms and Special Functions, 1993, v. 1, № 1, 1–7.

19. Дэвенпорт Г. Мультипликатиная теория чисел. М.: Физматлит, 1971. 200 с.

20. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994, 376 с.

21. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983. 240 с.

22. Popov O. V. On Hadamard's method concerning zeros of the Riemann zeta-function // Integral Transforms and Special Functions, 1993, v. 1, № 2, pp. 143–144.

23. Попов О. В. Вывод современной границы нулей дзета-функции Римана по методу Адамара // Вестник МГУ, сер. 1, мат., мех., 1994, № 1, 51–54.

24. Постников А. Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа // Изв. АН СССР, сер. мат., 1955, т. 19, 11–16.

25. Розин С. М. О нулях L-рядов Дирихле // Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, т. 23, 503–508.

26. Карацуба А. А. Тригонометрические суммы специального вида и их приложения // Изв. АН СССР, сер. мат., 1964, т. 28, 237–248.

27. Чудаков Н. Г. О нулях L-функций Дирихле для модулей, равных степеням нечетного простого // Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., 1966, № 1, 93–98.

28. Чубариков В. Н. Уточнение границы нулей L-рядов Дирихле по модулю, равному степени простого числа // Вестник МГУ, сер. 1, мат., мех., 1973, № 2, 46–52.

REFERENCES

1. Euler, L. 1936, "Introduction to the infinitesimal analysis", *Moscow*, in Russian.
2. Riemann, B. 1948, "Works ", *Moscow*, pp. 216–224.
3. Hadamard, J. 1896, "Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et conséquencies arithmetiques", *Bull. Soc. Math. France*, **24.**
4. de la Valleé Poussin C. J. 1896, "Recherches analytiques sur la theorie des nombres. Premiere partie: La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers general", *Ann. Soc. Sci. Bruxelles,* bf 20, pp. 183–256.
5. de la Valleé Poussin, C. J. 1899–1900, "Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée", *Memories couronnes de l'Acad. Roy. des Sci. Belgique,* **59,** № 1.
6. Weyl, H. 1921, "Zur Abschätzung von $\zeta(1+it)$", *Math. Zs.* bf 10, pp. 88–101.
7. Littlewood, J. E. 1922, "Researches in the theory of Riemann ζ-function", *Proc. London Math. Soc.,* **(2)20,** XXII–XXVIII.
8. Landau, E. 1924, "Über die ζ-Funktion und die L-Funktion", *Math. Zs.,* **20,** pp. 105–125.
9. Titchmarsch, E. C. 1953, "The theory of the Riemann zeta-function", *Moscow.*
10. Chudakov, N. G. 1936, "On zeros of the Dirichlet L-functions", *Matem. Sb.,* **1(43),** pp. 591–602.
11. Chudakov, N. G., 1936, "On zeros of the $\zeta(s)$ function", *Doklady AN SSSR,* pp. 187–201.
12. Vinogradov, I. M., 1958, "A new estimation of the function $\zeta(1+it)$", *Izv. AN SSSR, Ser.matem.,* **22,** № 2, pp. 161–164.
13. Vinogradov, I. M. 1980, "The method of trigonometrical sums in the theory of numbers", *2nd ed., correct. and supplement: Moscow,* pp. 144.
14. Korobov, N. M. 1958, "On zeros of the $\zeta(s)$ function", *Doklady AN SSSR,* **118,** pp. 231–232.
15. Korobov, N. M. 1958, "Estimations of trigonometric sums and their applications", *Uspehi matem. nauk,* **13,** issue 4, pp. 185–192.
16. Richert, H.-E. 1967, "Zur Abschätzung der Riemannschen Zeta-funktion in der Nahe der Vertikalen $\sigma = 1$", *Math. Ann.,* **169,** № 2, pp. 97–101.
17. Karatsuba, A. A. 1971, "Estimations of trigonometric sums by the Vinogradov method and their applications", *Trudy MIAN SSSR,* **112,** pp. 241–255.
18. Arkhipov, G., Buriev, K. 1993, "Refinement of estimates for the Riemann zeta-function in a neibourhood of the line $\mathrm{Re}(s) = 1$", *Integral Transforms and Special Functions,* v. 1, № 1, pp. 1–7.
19. Davenport, H. 1971, "Multiplicative number theory", *Moscow,* pp. 200.
20. Voronin, S. M., Karatsuba, A. A. 1994, "The Riemann zeta-function", *Moscow,* pp. 376.
21. Karatsuba, A. A. 1983, "The foundation of the analytic number theory", *Moscow,* pp. 240.

22. Popov, O. V. 1993 “On Hadamard’s method concerning zeros of the Riemann zeta-function”, *Integral Transforms and Special Functions,* v. 1, № 2, pp. 143–144.

23. Popov, O. V. 1994, “The deduction of the modern limit of zeros of the Riemann zeta-function by the Hadamard method”, *Vestnik MSU, ser. 1,mat.,mech.,* № 1, pp. 51–54.

24. Postnikov, A. G. 1955, “On the character sum by modulo, equil to a degree of prime”, *Izv. AN SSSR, ser. mat.,* v. 19, pp. 11–16.

25. Rozin, S. M. 1959, “On zeros of the Dirichlet L-series”, *Izv. AN SSSR, ser. mat.,* v. 23, pp. 503–508.

26. Karatsuba, A. A. 1964, “Trigonometric sums of the special form and their aplications”, *Izv. AN SSSR, ser. mat.,* v. 28, pp. 237–248.

27. Chudakov, N. G. 1966, “On zeros of the Dirichlet L-functions for modulo, equal to degrees of an odd prime”, *Vest. LSU, ser. mat.,mech.,* № 1, pp. 93–98.

28. Chubarikov, V. N. 1973, “ A more precise boundary of zeros of the Dirichlet L-series by modulo, equal to degree of an prime”, *Vest. MSU, ser. mat.,mech.,* № 2, pp. 46–52.

Получено 24.09.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.