

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 518.865

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207

**Оптимальная экспонента в задаче Рамсея–Касса–Купманса
с логарифмической функцией полезности**

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

Козко Артем Иванович — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Лужина Любовь Михайловна — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: lluzhina@gmail.com

Попов Антон Юрьевич — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, кафедра математического анализа, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: —

Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: vgchirskii@yandex.ru***Аннотация**

Исследуется полная полезность экономической деятельности в некоторой модели, когда вложение в производство экономического ресурса задано в виде экспоненты, а функция полезности — логарифм. Доказывается существование и единственность оптимального показателя экспоненты и находится интервал в котором содержится оптимальный показатель.

Ключевые слова: математическая модель, задача Рамсея–Касса–Купманса, конкурентные домохозяйства, максимизация полной полезности, лог-полезность.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея – Касса – Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 197–207.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 518.865

DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207

Optimal exponent in the Ramsey–Kass–Koopmans problem with logarithmic utility function

А. И. Козко, Л. М. Лузина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

Kozko Artem Ivanovich — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Department of mathematical analysis, Lomonosov Moscow state University (Moscow).

e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk

Luzhina Lyubov Mihailovna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Department of mathematical analysis, Lomonosov Moscow state University (Moscow).

e-mail: lluzhina@gmail.com

Popov Anton Yurievich — doctor of physical and mathematical Sciences, leading researcher, Department of mathematical analysis, Lomonosov Moscow state University (Moscow).

e-mail: —

Chirskii Vladimir Grigorevich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Department of mathematical analysis, Lomonosov Moscow state University (Moscow).

e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

We study the full utility of economic activity in a certain model, when the investment in the production of an economic resource is given as an exponent and the utility function — logarithm. We prove the existence and uniqueness of the optimal exponent and find the interval in which the optimal exponent is contained.

Keywords: mathematical model, Ramsey–Kass–Koopmans problem, competitive households, maximizing total utility, log-utility.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

А. И. Козко, Л. М. Лузина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский, 2019, "Optimal exponent in the Ramsey – Kass – Koopmans problem with logarithmic utility function", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 197–207.

1. Введение

Рассмотрим задачу Рамсея–Касса–Купманса [3]–[16], на бесконечном промежутке времени, состоящую в нахождении оптимального режима вложения в производство экономического ресурса $K(t)$ (капитала), зависящего от времени t и имеющего заданное начальное значение K_0 . Требуется максимизировать интеграл

$$\int_0^{+\infty} U(f(K(t)) - \dot{K}(t)) e^{-\rho t} dt, \quad (1)$$

выражающий в изучаемых нами моделях полную полезность экономической деятельности. Максимум интеграла (1) ищется на классе невозрастающих функций $K(t)$, непрерывных на

луче $[0; +\infty)$, дважды дифференцируемых на $(0; +\infty)$ (под $\dot{K}(t)$ понимается производная функции K по времени) и имеющих заданные начальное и предельное значения

$$K(0) = K_0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} K(t) = 0. \quad (2)$$

В (1) под функцией $f = f(K)$ понимается зависимость производства продукции от капитала K . Типичной функцией f , используемой в экономических моделях, где ставится данная экстремальная задача, является функция Кобба – Дугласа – вогнутая на положительной полуоси степенная функция

$$f(K) = aK^\alpha, \quad a > 0, \quad \alpha \in (0; 1). \quad (3)$$

В моделях, имеющих практическую ценность, рассматриваются показатели $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Если производство продукта в зависимости от капитала K меньше по порядку $\sqrt{K}$, то такие модели считаются заведомо неэффективными [10]. Число ρ называется ставкой временного предпочтения. Обычно ρ – небольшая положительная постоянная, её значения в большинстве моделей выбираются из отрезка $[0.01; 0.025]$. Функция U есть функция полезности. Как правило, в работах по этой тематике рассматривают функции

$$U(C) = U_\theta(C) = \frac{C^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}, \quad C > 0, \quad \theta > 0, \quad (4)$$

где θ – некоторый положительный параметр, значение которого выбирается в соответствии с определенными характеристиками данной экономической системы [1], [2], [6]. Изучают модели со значениями θ как большими, так и меньшими 1 см. [2]. В «исключительном» случае $\theta = 1$ имеем

$$U_1(C) = \lim_{\theta \rightarrow 1} U_\theta(C) = \lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{C^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{C^\gamma - 1}{\gamma} = \ln C. \quad (5)$$

Именно этот случай, когда функция полезности является логарифмической, мы и исследуем в нашей работе; ранее он рассматривался в работах [2], [16].

Исследования задачи (1), (2) на конечном временном отрезке $[0; T]$ в случае функции полезности, заданной для $\theta > 0$, $\theta \neq 1$ рассматривался в работах авторов [11]–[13].

Нахождение оптимальной зависимости экономического ресурса $K(t)$ от времени, то есть «наилучшего» режима вложения капитала, доставляющего максимум интеграла (1), представляет собой весьма сложную математическую задачу. Тем не менее, она укладывается в общую теорию поиска экстремалей интеграла

$$\int_0^T F(t, K(t), \dot{K}(t)) dt \quad (6)$$

при наличии граничных условий

$$K(0) = K_0, \quad K(T) = K_1. \quad (7)$$

Известно, что экстремали интеграла (6), удовлетворяющие граничным условиям (7), являются решениями уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{K}} \right), \quad (8)$$

но решить такое уравнение в квадратурах удаётся только для немногих весьма функций трёх переменных F . Для имеющей место в задаче Рамсея – Касса – Купманса зависимости

$$F(t, K, \dot{K}) = U(f(K) - \dot{K}) e^{-\rho t} \quad (9)$$

мы выписали уравнение Эйлера (8) в [13]. В случае (5) уравнение Эйлера (8) для зависимости (9) принимает вид

$$L(K(t)) = 0, \quad (10)$$

где

$$L(K) = \ddot{K} - 2\dot{K}f'(K) + \rho\dot{K} - \rho f(K) + f(K)f'(K). \quad (11)$$

Как видно из (11), L является весьма непросто устроенным нелинейным оператором, действующим в пространстве $C[0; +\infty) \cap D^2(0; +\infty)$, и уравнение (10) решения в квадратурах, вообще говоря, не допускает.

Возникает еще одна проблема. Если нас интересуют экстремали интеграла (1) на классе невозрастающих функций, то для учёта ограничения на монотонность K ($\dot{K}(t) \leq 0$) уравнение Эйлера должно быть заменено менее явными уравнениями, получающимися на основе принципа максимума Понтрягина [15]. Это дополнительно осложняет поиск оптимального режима вложения капитала $K(t)$. Даже в самом лучшем случае, если нам «повезло» и оказалось, что решение уравнения Эйлера не возрастает и его хотя бы приближённо удалось найти, оно может оказаться функцией довольно сложной природы. В то же время, в практической деятельности достаточно найти режим вложения экономического ресурса пусть не оптимальный, но близкий к оптимальному, который был бы максимально простой функцией времени. Наиболее простыми убывающими функциями, удовлетворяющими условиям (6), являются экспоненты

$$K(t) = K_0 e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0. \quad (12)$$

В этой работе мы исследуем, какой из показателей $\lambda > 0$ даёт максимальное значение интеграла полной полезности (1), когда в качестве $K(t)$ берутся только функции (12), а $U(C) \equiv \ln C$. Другими словами, ищется максимум на полуоси $0 \leq \lambda < +\infty$ функции действительной переменной

$$P(\lambda) = \int_0^{+\infty} \ln \left[f(K_0 e^{-\lambda t}) + \lambda K_0 e^{-\lambda t} \right] e^{-\rho t} dt, \quad (13)$$

поскольку для функции (12) имеем $\dot{K}(t) = -\lambda K_0 e^{-\lambda t}$. Поставленная задача является корректной, поскольку интеграл (13) сходится при любом $\lambda > 0$ ввиду наличия быстро стремящегося к нулю множителя $e^{-\rho t}$. Более того, интеграл (13) сходится равномерно по λ на любом отрезке $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$; а так как подынтегральная функция непрерывна на декартовом произведении $(0 \leq \lambda < +\infty) \times (0 \leq t < +\infty)$ то P является непрерывной функцией на полуоси $0 \leq \lambda < +\infty$. Следовательно, $P(\lambda)$ имеет максимум на любом отрезке $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, а нашей задачей является доказательство существования максимума этой функции на всей полуоси и его локализация.

2. Основные результаты

Наше исследование ведётся в естественном предположении, что начальный экономический ресурс является достаточно большим, а именно, величина

$$\varepsilon = aK_0^{-\beta} \rho^{-1}, \quad (14)$$

где $\beta = 1 - \alpha$ (напомним, что $\alpha \in (0; 1)$, и, следовательно, $\beta > 0$) невелика; по крайней мере она должна быть заведомо меньше 1. Нами доказаны две следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Оптимальный в рассматриваемой задаче показатель λ существует и лежит в интервале $((1 - \varepsilon)\rho; \rho/\alpha)$.*

ТЕОРЕМА 2. *В случае $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ при дополнительном предположении $\varepsilon \leq \frac{1}{3}$ оптимальный показатель λ единственен и лежит в интервале $((1 - \varepsilon)\rho; \rho)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство теоремы 1.] Подынтегральная функция в (13) дифференцируема по переменной λ при любых неотрицательных λ и t и эта частная производная равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(e^{-\rho t} \ln \left(f(K_0 e^{-\lambda t}) + \lambda K_0 e^{-\lambda t} \right) \right) &= e^{-\rho t} \frac{\frac{\partial}{\partial \lambda} (f(K_0 e^{-\lambda t}) + \lambda K_0 e^{-\lambda t})}{f(K_0 e^{-\lambda t}) + \lambda K_0 e^{-\lambda t}} = \\ &= e^{-\rho t} \frac{-K_0 t e^{-\lambda t} f'(K_0 e^{-\lambda t}) + K_0 e^{-\lambda t} - \lambda t K_0 e^{-\lambda t}}{f(K_0 e^{-\lambda t}) + \lambda K_0 e^{-\lambda t}} = \frac{1 - \lambda t - t f'(K_0 e^{-\lambda t})}{\lambda + (e^{\lambda t}/K_0) f(K_0 e^{-\lambda t})} e^{-\rho t}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись выражением (2) для функции f и обозначением (3), получим следующую формулу для частной производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(e^{-\rho t} \ln \left(f(K_0 e^{-\lambda t}) + \lambda K_0 e^{-\lambda t} \right) \right) &= \frac{1 - \lambda t - t f'(K_0 e^{-\lambda t})}{\lambda + (e^{\lambda t}/K_0) f(K_0 e^{-\lambda t})} e^{-\rho t} = \\ &= \frac{1 - \lambda t - a \alpha K_0^{-\beta} t e^{\lambda \beta t}}{\lambda + a K_0^{-\beta} e^{\lambda \beta t}} e^{-\rho t} = \frac{1 - \lambda t - \alpha \varepsilon \rho t e^{\lambda \beta t}}{\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t}} e^{-\rho t}. \quad (15) \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в справедливости оценки

$$\left| \frac{1 - \lambda t - \alpha \varepsilon \rho t e^{\lambda \beta t}}{\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t}} \right| \leq \alpha t + t + \frac{1}{\varepsilon \rho} \quad \forall \lambda \geq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Поэтому частная производная (4) на декартовом произведении $(0 \leq \lambda < +\infty) \times (0 \leq t < +\infty)$ по абсолютной величине мажорируется функцией $(2t + (\varepsilon \rho)^{-1}) e^{-\rho t}$, интеграл от которой по лучу $[0, +\infty)$ сходится. Это влечет за собой не только сходимость интеграла от частной производной (4) по лучу $[0, +\infty)$, но и равномерную сходимость данного интеграла по параметру $\lambda \in [0, +\infty)$. Согласно теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру [14], приходим к равенству

$$P'(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \lambda t - \alpha \varepsilon \rho t e^{\lambda \beta t}}{\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t}} e^{-\rho t} dt. \quad (16)$$

Для оценок производной $P'(\lambda)$ нам потребуется записать интеграл из (5) в несколько ином виде, воспользовавшись тождествами

$$\frac{\lambda t + \alpha \varepsilon \rho t e^{\lambda \beta t}}{\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t}} = \frac{\lambda t + \varepsilon \rho t e^{\lambda \beta t}}{\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t}} - \frac{\beta \varepsilon \rho t e^{\lambda \beta t}}{\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t}} = t - \frac{\beta \varepsilon \rho t e^{\lambda \beta t}}{\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t}} \quad (17)$$

и обозначением

$$v(\lambda, t) = \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t}. \quad (18)$$

Из (16) – (18) находим

$$P'(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{1 + \beta \varepsilon \rho t e^{\lambda \beta t}}{\lambda + \varepsilon \rho e^{\lambda \beta t}} - \int_0^{+\infty} t e^{-\rho t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 + \beta t v(\lambda, t)}{\lambda + v(\lambda, t)} e^{-\rho t} dt - \frac{1}{\rho^2}. \quad (19)$$

Выведем двусторонние оценки отношения

$$R(\lambda, t) = \frac{1 + \beta t v(\lambda, t)}{\lambda + v(\lambda, t)}. \quad (20)$$

Справедливость оценки сверху

$$R(\lambda, t) < \frac{1}{\lambda} + \beta t, \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall t > 0, \quad (21)$$

элементарно проверяется. Оценка же снизу

$$R(\lambda, t) > R(\lambda, 0) = \frac{1}{\lambda + v(\lambda, 0)} = \frac{1}{\lambda + \varepsilon\rho}, \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall t > 0, \quad (22)$$

есть следствие возрастания $R(\lambda, t)$ по переменной t при любом $\lambda > 0$. Действительно, имеем (для краткости записи опускаем аргументы функций и обозначаем $v_t = \frac{\partial v}{\partial t}$, $R_t = \frac{\partial R}{\partial t}$)

$$R_t = \frac{(\beta v + \beta t v_t)(\lambda + v) - v_t(1 + \beta t v)}{(\lambda + v)^2} = \frac{\beta v(\lambda + v) + \beta \lambda t v_t - v_t}{(\lambda + v)^2}.$$

А так как из (18) следует тождество $v_t = \lambda \beta v$, то приходим к представлению

$$R_t = \frac{\beta v^2 + (\beta \lambda)^2 t v}{(\lambda + v)^2}. \quad (23)$$

Из (23) немедленно следует положительность $R_t = \frac{\partial R(\lambda, t)}{\partial t}$, при всех $\lambda > 0$ и $t > 0$, а значит и возрастание функции $R(\lambda, t)$ по переменной t при любом $\lambda > 0$.

Таким образом, согласно обозначениям (18) и (20) представление (19) производной $P'(\lambda)$ можно переписать следующим образом:

$$P'(\lambda) = \int_0^{+\infty} R(\lambda, t) e^{-\rho t} dt - \frac{1}{\rho^2}. \quad (24)$$

Полученная формула вместе с оценками (21) и (22) функции $R(\lambda, t)$ даёт неравенства

$$\begin{aligned} P'(\lambda) &< \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda} + \beta t \right) e^{-\rho t} dt - \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\lambda \rho} + \frac{\beta}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\lambda \rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}, \\ P'(\lambda) &> \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\rho t}}{\lambda + \varepsilon \rho} dt - \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho(\lambda + \varepsilon \rho)} - \frac{1}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $P'(\lambda) > 0$, как только $\lambda + \varepsilon \rho \leq \rho$, то есть $\lambda \leq \rho(1 - \varepsilon)$, а при $\lambda \geq \rho/\alpha$, напротив, $P'(\lambda) < 0$.

На основании доказанного можно сделать вывод, что функция P возрастает на отрезке $[0; (1 - \varepsilon)\rho]$ и убывает на луче $[\rho/\alpha; +\infty)$. Поэтому максимум функции P на отрезке $[(1 - \varepsilon)\rho; \rho/\alpha]$ (он существует в силу её непрерывности) одновременно является максимумом этой функции на луче $[0; +\infty)$. Более того, из неравенств

$$P'((1 - \varepsilon)\rho) > 0, \quad P'\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) < 0 \quad (25)$$

следует, что максимум P на отрезке $[(1 - \varepsilon)\rho; \rho/\alpha]$ достигается в некоторой внутренней точке этого отрезка. Теорема доказана. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство теоремы 2.] Из (24), (18), (20), учитывая, что $v_\lambda = \beta t v$, находим

$$\begin{aligned} P''(\lambda) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial R(\lambda, t)}{\partial \lambda} e^{-\rho t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\beta t v_\lambda (\lambda + v) - (1 + v_\lambda)(1 + \beta t v)}{(\lambda + v)^2} e^{-\rho t} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda(\beta t)^2 - 2\beta t) v(\lambda, t) - 1}{(\lambda + v(\lambda, t))^2} e^{-\rho t} dt. \end{aligned} \quad (26)$$

(Обоснование корректности дифференцирования по параметру λ под знаком интеграла проводится стандартным образом: примерно так же, как и в доказательстве теоремы 1.)

Докажем отрицательность $P''(\lambda)$ при $(1 - \varepsilon)\rho \leq \lambda \leq \rho/\alpha$. Это повлечёт за собой убывание $P'(\lambda)$ на отрезке $[(1 - \varepsilon)\rho; \rho/\alpha]$, что в связи с (25) даст существование и единственность нуля $P'(\lambda)$ на интервале $((1 - \varepsilon)\rho; \rho/\alpha)$, а значит единственность точки максимума функции P . После этого мы установим справедливость неравенства

$$P'(\rho) < 0, \quad (27)$$

что ввиду убывания P' и (25) докажет наличие нуля производной, а значит и точки максимума функции P на интервале $((1 - \varepsilon)\rho; \rho)$.

Займемся оценкой $P''(\lambda)$ сверху. Разобьём интеграл в (26) на два и в связи с неравенством

$$\lambda(\beta t)^2 - 2\beta t > 0 \iff \lambda\beta t > 2 \text{ при } t > 0,$$

получим оценку

$$P''(\lambda) < \mathcal{I}_1(\lambda) - \mathcal{I}_2(\lambda), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(\lambda) &= \int_{T_\lambda}^{+\infty} \frac{(\lambda(\beta t)^2 - 2\beta t) v(\lambda, t)}{(\lambda + v(\lambda, t))^2} e^{-\rho t} dt, \quad T_\lambda = \frac{2}{\beta\lambda}, \\ \mathcal{I}_2(\lambda) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\rho t} dt}{(\lambda + v(\lambda, t))^2}. \end{aligned}$$

Интеграл $\mathcal{I}_1(\lambda)$ требуется оценить сверху, а $\mathcal{I}_2(\lambda)$ – снизу. Ввиду неравенства

$$\frac{v}{(\lambda + v)^2} \leq \frac{1}{4\lambda}$$

(равенство достигается, когда $v = \lambda$), справедливого при всех положительных значениях λ и v , и положительности множителя $\lambda(\beta t)^2 - 2\beta t$ на луче $(T_\lambda; +\infty)$, мы можем оценить сверху интеграл $\mathcal{I}_1(\lambda)$ через интеграл, который явно вычисляется:

$$\mathcal{I}_1(\lambda) \leq \frac{\tilde{\mathcal{I}}_1(\lambda)}{4\lambda},$$

где

$$\tilde{\mathcal{I}}_1(\lambda) = \int_{T_\lambda}^{+\infty} (\lambda(\beta t)^2 - 2\beta t) e^{-\rho t} dt.$$

Оценка снизу интеграла $\mathcal{I}_2(\lambda)$ осуществляется посредством оценки сверху знаменателя дроби в подынтегральном выражении функцией, которая приводит к вычисляемому явно интегралу. Ниже используется ограничение

$$(1 - \varepsilon)\rho \leq \lambda \leq \frac{\rho}{\alpha},$$

следствием которого и условий теоремы $\varepsilon \leq \frac{1}{3}$, $\alpha \geq \frac{1}{2}$ являются неравенства

$$\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \leq 1.$$

Имеем

$$\frac{1}{(\lambda + v(\lambda, t))^2} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{\varepsilon\rho}{\lambda} e^{\lambda\beta t})^2} \geq \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} e^{(\frac{\rho}{\alpha})\beta t})^2} \geq \frac{1}{\lambda^2 (1 + \frac{1}{2} e^{\rho t})^2}.$$

Тем самым получаем следующую оценку снизу интеграла $\mathcal{I}_2(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2(\lambda) &\geq \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\rho t} dt}{(1 + 0.5e^{\rho t})^2} = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3\rho t} dt}{(e^{-\rho t} + 0.5)^2} = \\ &= \frac{1}{\lambda^2 \rho} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x + 0.5)^2} = \frac{\frac{4}{3} - \ln 3}{\lambda^2 \rho} > \frac{0.23}{\lambda^2 \rho}.\end{aligned}\quad (29)$$

С помощью несложно проверяемых равенств

$$\int_T^{+\infty} t e^{-\rho t} dt = \frac{1 + \rho T}{\rho^2} \exp(-\rho T), \quad \int_T^{+\infty} t^2 e^{-\rho t} dt = \frac{(\rho T)^2 + 2\rho T + 2}{\rho^3} \exp(-\rho T),$$

вычислим интеграл $\tilde{\mathcal{I}}_1(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{I}}_1(\lambda) &= \left(\lambda \beta^2 \frac{(\rho T_\lambda)^2 + 2\rho T_\lambda + 2}{\rho^3} - 2\beta \frac{\rho T_\lambda + 1}{\rho^2} \right) \exp(-\rho T_\lambda) = \\ &= \left(\frac{4\lambda\beta^2}{\rho\lambda^2\beta^2} + \frac{4\lambda\beta^2}{\beta\lambda\rho^2} + \frac{2\lambda\beta^2}{\rho^3} - \frac{2\beta}{\rho^2} - \frac{4\beta}{\rho\beta\lambda} \right) \exp\left(-\frac{2\rho}{\beta\lambda}\right) = \left(\frac{2\beta}{\rho^2} + \frac{2\lambda\beta^2}{\rho^3} \right) \exp\left(-\frac{2\rho}{\beta\lambda}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, верна оценка

$$\mathcal{I}_1(\lambda) \leq \frac{\beta}{2\lambda\rho^2} \left(1 + \frac{\lambda\beta}{\rho} \right) \exp\left(-\frac{2\rho}{\lambda\beta}\right). \quad (30)$$

Из (28) – (30) видно, что для доказательства отрицательности $P''(\lambda)$ достаточно установить справедливость неравенства

$$\frac{\beta}{2\lambda\rho^2} \left(1 + \frac{\lambda\beta}{\rho} \right) \exp\left(-\frac{2\rho}{\lambda\beta}\right) < \frac{0.23}{\lambda^2\rho} \iff \frac{\lambda\beta}{\rho} \left(1 + \frac{\lambda\beta}{\rho} \right) < 0.46 \exp\left(\frac{2\rho}{\lambda\beta}\right).$$

Обозначим $u = \frac{\lambda\beta}{\rho}$. Поскольку $\lambda \leq \frac{\rho}{\alpha}$, то $u \leq \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - 1$. А так как по условию теоремы $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$, то $u \leq 1$. Таким образом, достаточно доказать неравенство

$$u(1+u) < 0.46 \exp\left(\frac{2}{u}\right), \quad 0 < u \leq 1.$$

Это неравенство верно, поскольку его левая часть не превосходит 2, а правая часть не меньше $0.46e^2 > 3$. Отрицательность $P''(\lambda)$ на отрезке $[(1-\varepsilon)\rho; \rho/\alpha]$ доказана.

Докажем неравенство (27). Согласно (16) имеем

$$P'(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \rho t - \alpha \varepsilon \rho t e^{\rho\beta t}}{1 + \varepsilon e^{\rho\beta t}} e^{-\rho t} dt. \quad (31)$$

Поскольку верны равенства

$$\int_0^{+\infty} (1 - \rho t) e^{-\rho t} dt = 0, \quad \frac{1}{1 + \varepsilon e^{\rho\beta t}} = 1 - \frac{\varepsilon e^{\rho\beta t}}{1 + \varepsilon e^{\rho\beta t}},$$

то интеграл (31) преобразуется следующим образом:

$$\rho P'(\rho) = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \rho t)(-\varepsilon e^{\rho\beta t}) - \alpha \varepsilon \rho t e^{\rho\beta t}}{1 + \varepsilon e^{\rho\beta t}} e^{-\rho t} dt.$$

Отсюда находим

$$\frac{\rho P'(\rho)}{\varepsilon} = \int_0^{+\infty} (\rho\beta t - 1)e^{-\rho\beta t} w(t) dt, \quad (32)$$

где

$$w(t) = \frac{e^{(2\beta-1)\rho t}}{1 + \varepsilon e^{\rho\beta t}}.$$

Ввиду условия $\alpha \geq 1/2$ верно неравенство $2\beta - 1 \leq 0$, поэтому функция w убывает на луче $[0; +\infty)$ и, кроме этого, является положительной. Следовательно, каковы бы ни были число $t_0 > 0$ и функции

$$\varphi_1 : (0; t_0) \rightarrow (0; +\infty), \quad \varphi_2 : (t_0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$$

интегрируемые на $(0; t_0)$ и $(t_0; +\infty)$ соответственно, для интегралов верны оценки

$$\int_0^{t_0} \varphi_1(t) w(t) dt > w(t_0) \int_0^{t_0} \varphi_1(t) dt, \quad \int_{t_0}^{+\infty} \varphi_2(t) w(t) dt < w(t_0) \int_{t_0}^{+\infty} \varphi_2(t) dt.$$

Положив

$$t_0 = \frac{1}{\beta\rho}, \quad \varphi_1(t) = (1 - \beta\rho t)e^{-\beta\rho t}, \quad \varphi_2(t) = (\beta\rho t - 1)e^{-\beta\rho t},$$

получим неравенства

$$\int_0^{t_0} (1 - \beta\rho t) e^{-\beta\rho t} w(t) dt > w(t_0) I_1, \quad \int_{t_0}^{+\infty} (\beta\rho t - 1) e^{-\beta\rho t} w(t) dt < w(t_0) I_2, \quad (33)$$

где

$$I_1 = \int_0^{t_0} (1 - \beta\rho t) e^{-\beta\rho t} dt, \quad I_2 = \int_{t_0}^{+\infty} (\beta\rho t - 1) e^{-\beta\rho t} dt. \quad (34)$$

Из (33) и (34) находим

$$\int_0^{+\infty} (\beta\rho t - 1) e^{-\beta\rho t} w(t) dt < w(t_0) (I_1 - I_2) = w(t_0) \int_0^{+\infty} (\beta\rho t - 1) e^{-\beta\rho t} dt = 0.$$

Отсюда и из (32) следует неравенство (27). Теорема 2 полностью доказана. $\square$

3. Заключение

Основным итогом нашей работы является следующий вывод.

Если мы решаем задачу Рамсея – Касса – Купманса нахождения оптимального режима вложения капитала на бесконечном промежутке времени и берём логарифмическую функцию полезности, а функция Кобба – Дугласа (3) является степенной с показателем $\alpha \geq \frac{1}{2}$ (данное неравенство выполняется во всех реально рассматриваемых моделях), то среди экспоненциальных зависимостей капитала от времени вида $K(t) = K_0 e^{-\lambda t}$ оптимальная имеет показатель λ чуть меньший ρ (ставки временного предпочтения). Например, взяв $K(t) = K_0 e^{-\rho t}$ мы получим хороший (хотя и не самый лучший) результат, но полную полезность можно повысить, рассматривая функции $K(t) = K_0 e^{(\delta-\rho)t}$ и постепенно увеличивая параметр δ до какого-то небольшого значения (увеличение начинается с нуля).

Более детальное уточнение вида близкой к оптимальной функции $K(t)$ и рассмотрение аналогичной задачи, когда в качестве функций полезности берутся функции U_θ – см. выше (4) – мы планируем осуществить в последующих работах. Пока же сделаем еще одно наблюдение. Близость функции $K(t) = K_0 e^{-\lambda t}$ к оптимальной в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ (то есть $f(K) = a\sqrt{K}$) косвенно подтверждается тем, что нелинейный оператор L , определенный в (11), взятый на этой функции, принимает на ней весьма малое (в сравнении с самой функцией) значение, пока экономический ресурс $K(t)$ не станет слишком малым. Действительно, подставив в (11) $K(t) = K_0 e^{-\rho t}$, получим $L(K_0 e^{-\rho t}) \equiv a^2/2$, что является весьма малой величиной в сравнении с $K_0 e^{-\rho t}$ при небольших значениях t .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rahul Giri. Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model // http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf
2. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.
3. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf
4. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=899250>
5. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory, Vol. 44, No. 2, 2010.
6. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: <http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf>, 2010.
7. Abel A. B. Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with the Joneses // American Economic Review. 1990. Vol. 80, № 2. P. 38–42.
8. Carroll Ch.D., Overland J. R., Weil D. N. Saving and Growth with Habit Formation // American Economic Review. 2000. Vol. 90, № 3. P. 341–355.
9. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.
10. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September, P. 908–931.
11. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимости начального экономического ресурса // Чебышевский сборник, 2019. (готовится к выходу в печать)
12. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея-Касса-Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87–88.
13. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея-Касса-Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. (готовится к выходу в печать)
14. Зорич В. А. Математический анализ // Часть II. – Изд. 4-е, испр. – М.: МЦНМО, 2002. – XIV. с. 794.
15. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление // М.: ФИЗМАТ-ЛИТ. 2-е изд. 2005.
16. Robert J. Barro, 1999. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114. No 4. P. 1125–1152.

REFERENCES

1. Rahul, Giri. “Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model“, 2018, http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.
2. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, “Economic growth (2nd ed.)“, *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.
3. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, “Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model“, *UC Berkeley Fall*, https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf
4. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, “Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)“, *CESifo Working Paper Series No. 1701*. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=899250>
5. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. “When Economic Growth is Less than Exponential“, 2010. *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, 2010.
6. Groth, C. 2010, “Chapter 10: The Ramsey Model“, *Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf*.
7. Abel, A. B. 1990, “Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with the Joneses“, *American Economic Review*, vol. 80, no. 2, pp. 38–42.
8. Carroll, Ch. D., Overland, J. R., Weil, D. N. 2000, “Saving and Growth with Habit Formation“, *American Economic Review*, vol. 90, no. 3, pp. 341–355.
9. Romer, D. “Advanced Macroeconomics. 3rd ed“, *New York: McGraw-Hill/Irwin*, 2006. pp. 651.
10. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, “Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model“, *American Economic Review*. vol. 83, September, pp. 908–931.
11. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, Assessment of the need for an initial economic resource in the Ramsey-Kass-Koopmans problem // *Chebyshevskii sbornik. (preparing to go to press)*.
12. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey-Kass-Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow*. pp. 87–88.
13. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, “On the Ramsey-Kass-Koopmans problem for consumer choice“, *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review*. (preparing to go to press).
14. Zorich, V. A. 2004, “Mathematical Analysis“, *Springer*, ISBN 3540403868, pp. 574.
15. Alekseev, V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. “Optimal Control“, *Springer, Boston, MA*, 1987. pp. 310.
16. Robert J. Barro, 1999. “Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model“, *The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press*, vol. 114, no. 4, pp. 1125–1152.

Получено 4.10.2019 г.

Принято в печать 20.12.2019 г.