

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-439-445

Александр Яковлевич Хинчин
(19.07.1894 – 18.11.1959)

В. Н. Чубариков

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: chubarik2009@live.ru***Аннотация**

Статья посвящена выдающемуся математику Александру Яковлевичу Хинчину в связи с его 125-летием со дня рождения и 60-летием со дня кончины.

Дан комментарий по результатам А. Я. Хинчина в теории чисел.

Ключевые слова: Александр Яковлевич Хинчин, представление числа в виде суммы двух простых чисел, двоичные дроби, непрерывные дроби, аддитивная теория чисел, линейные диофантовы приближения, теорема переноса для сингулярных систем линейных уравнений, количественная концепция аппроксимационной теории Кронекера.

Библиография: 3 названия.

Для цитирования:

В. Н. Чубариков. Александр Яковлевич Хинчин (19.07.1894 – 18.11.1959) // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 439–445.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-439-445

Alexander Yakovlevich Khinchin
(19.07.1894 – 18.11.1959)

V. N. Chubarikov

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, president of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

The article is devoted to the distinguished mathematician A. Ja. Khintchine in connection with his 125-year anniversary and 60-year of the his death.

We give the comment of results of A. Ja. Khintchine in the number theory.

Keywords: A. Ja. Khintchine, the representation of the number as a sum of two primes, diadic fractions, continued fractions, the additive number theory, linear diophantine approximation, the transfer theorem for singular system of linear equations, the quantitative conception of the Kronecker's approximative theory.

Bibliography: 3 titles.

For citation:

V. N. Chubarikov, 2019, "Alexander Yakovlevich Khinchin (19.07.1894 – 18.11.1959)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 439–445.

1. Биографическая справка

А.Я.Хинчин родился 19.07.1894 г. в с.Кондрово Медынского уезда Калужской области в семье главного инженера Кондровской бумажной фабрики.

Учился в реальном училище в Москве (учителя-математики М.Ф.Берг, К.Н.Рашевский).

В 1911 г. поступил на физико-математический факультет Московского университета (научные руководители: Д.Ф.Егоров, Н.Н.Лузин). 6.11.1914 г. сделал доклад об асимптотической производной на студенческом математическом кружке. 25.11.1915 г. учёный совет физико-математического факультета присудил золотую медаль за сочинение "Бесконечные ряды функций, их сходимость, почленное интегрирование и дифференцирование".

В 1916 г. закончил университет и оставлен в нём для подготовки к профессорскому званию.

1918 г. — преподаватель математики в Московском женском политехническом институте.

1919 г. — политехнический институт в Иваново-Вознесенске, декан физико-математического факультета пединститута.

С 1922 г. работает научным сотрудником Научно-исследовательского института математики и механики МГУ, (1932-1934) — директор. С 1927 г. — профессор МГУ, заведует кафедрой теории вероятностей, затем кафедрой математического анализа. Депутат Моссовета.

1938–1940 гг. — руководитель физико-математической секции Учебно-методического совета Наркомпроса РСФСР и кабинетом математики в НИИ школ Наркомпроса РСФСР.

1939 г. — член-корреспондент АН СССР.

1941 г. — лауреат Сталинской премии.

1943 г. — действительный член АПН РСФСР, избран членом Президиума.

А.Я.Хинчин — кавалер ордена Ленина и двух орденов Трудового Красного знамени.

18.11.1959 г. А.Я.Хинчин скончался.

Научное творчество А.Я.Хинчина в области теории чисел многообразно, но представляет собой плодотворный монолит для дальнейших исследований.

Переходя к комментариям научных работ А.Я.Хинчина, остановимся только на некоторых из них, в которых им сделаны первые существенные шаги в решении проблем теории чисел.

2. К вопросу о представлении числа в виде суммы двух простых чисел (1922)

Дан элементарный вывод следующей асимптотики.

Пусть $T(n)$ обозначает число решений неравенства $p_1 + p_2 \leq n$ в простых числах p_1, p_2 . Тогда при $n \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика

$$T(N) = \frac{n^2}{4 \ln^2 n} (1 + o(1)).$$

Отметим, что вывод этой асимптотики интересен, в частности, тем, что даёт геометрическую трактовку арифметического результата.

3. О двоичных дробях (1923)

Известны следующие соотношения

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau(n) \ln \ln n}{\ln n} &= \ln 2, & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(n) \ln \ln n}{\ln n} &= 1, \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n)}{n \ln \ln n} &= e^\gamma, & \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n) \ln \ln n}{n} &= e^{-\gamma}, \end{aligned}$$

где $\tau(n)$ — число делителей числа n , $\omega(n)$ — число различных простых делителей числа n , $\sigma(n)$ — сумма всех делителей числа n и $\varphi(n)$ — функция Эйлера.

В курсе математического анализа доказывается, что верхний предел последовательности равен верхнему предельному числу, а нижний предел — нижнему предельному числу, т.е.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(n) = \inf_{n \geq 1} \sup_{m \geq n} f(m) = L, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(n) = \sup_{n \geq 1} \inf_{m \geq n} f(m) = l.$$

Таким образом, для того чтобы доказать, что число L является верхним пределом последовательности $f(n)$ достаточно показать, что выполняются следующие два условия:

- 1) для любого натурального n имеем $\sup_{m \geq n} f(m) \geq L$, т.е. найдется бесконечная последовательность натуральных чисел $m_k, k \geq 1$, такая, что $f(m_k) \geq L$,
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что $\sup_{m \geq n_0} f(m) < L + \varepsilon$, т.е. для всех номеров m , не меньших n_0 , значения функции $f(m)$ меньше $L + \varepsilon$.

Далее рассмотрим следующую лемму Бореля – Кантелли, относящуюся к событиям, которые случаются “почти наверное”, и на которой основаны многие теоремы метрической теории чисел.

Лемма 1.2. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — последовательность событий на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, и пусть

$$B = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Тогда, если

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ сходится, то $P(B) = 0$;

2) события A_n независимы и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ расходится, то $P(B) = 1$.

В качестве арифметического следствия отсюда получаются знаменитые теорема Э.Бореля о “нормальных числах” и закон А.Я.Хинчина повторного логарифма.

Пусть x — иррациональное число, $0 < x < 1$. Разложим x в двоичную дробь. Рассмотрим первые n цифр в его разложении. Символом $\mu_n(x)$ обозначим разность между количеством нулей в его записи и числом $n/2$. Э.Борель установил, что для всех иррациональных x , за исключением множества меры нуль, при $n \rightarrow \infty$ имеем соотношение

$$\mu_n(x) = o(n).$$

В 1914 г. Ф.Хаусдорф уточнил это предельное соотношение. Он доказал, что при $\alpha > 1/2$

$$\mu_n(x) = o(n^\alpha).$$

В том же году Г.Харди и Дж.Литтлвуд получили, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mu_n(x)|}{\sqrt{n \ln n}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

С другой стороны, они доказали, что $\mu_n(x) = \Omega(\sqrt{n})$.

Теорема. (А.Я.Хинчин). Пусть x — иррациональное число, которое представлено в виде двоичной дроби. Пусть в первых n цифрах его двоичного разложения нуль встречается $m(n)$ раз, и пусть $\mu(n) = m(n) - n/2$. Тогда для всех x , за исключением множества меры нуль, при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mu_n(x)|}{\sqrt{n \ln \ln n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Одна теорема о непрерывных дробях и её арифметические приложения (1923)

Пусть x — иррациональное число, $0 < x < 1$. И пусть $a_n = a_n(x)$ обозначает n -й элемент разложения числа x в правильную непрерывную дробь вида

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}.$$

Положим

$$A_n = A_n(x) = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, G(n) = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

Теорема 3.1. Для любого $\varepsilon > 0$ и каждого иррационального x , за исключением, быть может, множества лебеговой меры нуль, при $n \rightarrow \infty$ выполняются асимптотические неравенства

$$A_n(x) \ll n^\varepsilon, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} G(n) \leq e^{e^{\sqrt{2} \ln 2}}.$$

В качестве приложения А.Я.Хинчин доказывает, что оценка В.Серпинского (1910) для любого иррационального числа при $n \rightarrow \infty$ сумм вида

$$\sum_{k=1}^n \rho(kx) = o(n), \quad \rho(t) = \frac{1}{2} - \{t\},$$

неулучшаема.

Теорема 3.2. Пусть $\omega(n) > 0$ — произвольная функция натурального аргумента n и при $n \rightarrow \infty$ имеем $\omega(n) \rightarrow 0$. Тогда найдётся иррациональное число x такое, что при $n \rightarrow \infty$ не выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^n \rho(kx) = O(n\omega(n)).$$

ТЕОРЕМА 3.3. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого иррационального x , за исключением, быть может, множества лебеговой меры нуль, при $n \rightarrow \infty$ выполняется асимптотическое неравенство

$$\sum_{k=1}^n \rho(kx) = O(\ln^{1+\varepsilon} n).$$

ТЕОРЕМА 3.4. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого иррационального x , за исключением, быть может, множества лебеговой меры нуль, при $n \rightarrow \infty$ выполняется асимптотическое неравенство

$$\sum_{k=1}^n \rho(kx) = \Omega(\ln n).$$

5. К аддитивной теории чисел (1932)

Пусть заданы последовательности A и B неотрицательных целых чисел

$$A = \{a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots\}, \quad B = \{b_0 = 0 < b_1 < b_2 < \dots\},$$

и пусть $A(n), n \geq 0$, обозначает число элементов последовательности A , не превосходящих n .

Назовём, следуя Л.Г.Шнирельману, *плотностью* последовательности A величину

$$D(A) = \inf_{n>0} \frac{A(n) - 1}{n}.$$

Определим, далее, *сумму* $C = \{c_0 = 0 < c_1 < c_2 < \dots\}$ двух последовательностей A и B соотношением вида

$$C = A + B = \{c = a + b | a \in A, b \in B\}.$$

Пример. Пусть $A = B = \{0, 1, 2, 6, 7, 8, 12, \dots\}$. Тогда

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, \dots\},$$

$$A(5) - 1 = 2, D(A) = \frac{2}{5}, C(11) - 1 = 9, D(C) = \frac{9}{11}, D(A) + D(B) = \frac{4}{5} < \frac{9}{11} = D(C).$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $D(A_1) = \dots = D(A_k)$. Тогда

$$D\left(\sum_{r=1}^k A_r\right) \geq \min \left\{1, \sum_{r=1}^k D(A_r)\right\}.$$

В 1942 г. Г.Б.Манн распространил это утверждение на последовательности с разными плотностями.

6. Об одном классе линейных диофантовых приближений (1926)

В этом исследовании А.Я.Хинчин отталкивается от известной теоремы Л.Кронекера. Пусть действительные числа $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ линейно независимы над кольцом целых чисел. Тогда точки

$$(\{n\theta_1\}, \{n\theta_2\}, \dots, \{n\theta_m\})$$

образуют в единичном m -мерном кубе всюду плотное множество.

Обозначим символом $\|\theta\| = \min(\{\theta\}, 1 - \{\theta\})$ расстояние до ближайшего целого числа. Имеем, что $\|\theta_1 + \theta_2\| \leq \|\theta_1\| + \|\theta_2\|$ и для любого целого n справедливо неравенство $\|n\| \leq |n| \cdot \|\theta\|$.

ТЕОРЕМА 5.1. (А.Я.Хинчин: принцип переноса). Пусть $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ — любые иррациональные числа, и пусть $\omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0$ являются соответственно точными верхними гранями чисел ω, ω' таких, что неравенства

$$\|u_1\theta_1 + \dots + u_n\theta_n\| \leq (\max_{1 \leq j \leq n} |u_j|)^{-n-\omega},$$

$$\max_{1 \leq j \leq n} \|x\theta_j\| \leq x^{-(1+\omega')/n}$$

имеют бесконечно много решений в целых числах $u_1, \dots, u_n, x$. Тогда

$$\omega_1 \geq \omega_2 \geq \frac{\omega_1}{n^2 + (n-1)\omega_1}.$$

7. Теорема переноса для сингулярных систем линейных уравнений (1948)

Пусть задана система n линейных форм вида

$$L_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \theta_{ji} x_i \quad (1 \leq j \leq n),$$

и пусть задана транспонированная система m линейных форм вида

$$M_i(u) = \sum_{j=1}^n \theta_{ji} u_j \quad (1 \leq i \leq m).$$

Система из n линейных форм $L_j(\mathbf{x})$ называется *сингулярной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $X_0 = X_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $X > X_0$ система неравенств

$$\|L(\mathbf{x})\| < \varepsilon X^{-m/n}, |x_i| \leq X,$$

имеет целое решение $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. В противном случае система называется *регулярной*.

Заметим, что множество коэффициентов θ_{ji} образует в mn -мерном пространстве множество лебеговой меры нуль (по лемме Бореля – Кантелли).

ТЕОРЕМА 6.1. Для того, чтоб система $L_j(\mathbf{x})$ была сингулярна, необходимо и достаточно, чтобы была сингулярна транспонированная система $M_i(\mathbf{u})$.

8. Количественная концепция аппроксимационной теории Кронекера (1948)

Основной результат аппроксимационной теории Кронекера — критерий того, чтобы система неравенств

$$\left| \sum_{i=1}^m \theta_{ij} x_i - y_j - \alpha_j \right| < \frac{1}{t} \quad (1 \leq j \leq n),$$

где θ_{ij} и α_j — вещественные числа, имела при любом $t > 0$ решения в целых числах x_i, y_j .

А.Я.Хинчин решает следующую задачу: найти критерий того, чтобы система неравенств

$$\left| \sum_{i=1}^m \theta_{ij} x_i - y_j - \alpha_j \right| < \frac{c_1}{t} \quad (1 \leq j \leq n),$$

где θ_{ij} и α_j — вещественные числа, имела при любом $t > 0$ решения в целых числах x_i, y_j при условии, что

$$|x_i| < c_2 \varphi(t) \quad (1 \leq i \leq m),$$

причём c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные, а $\varphi(t)$ — любая положительная непрерывная неубывающая функция от t .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хинчин А.Я. Избранные труды по теории чисел/ Под ред. Ю.В.Нестеренко. — М.: МЦН-МО, 2006. — 260 с.
2. Хинчин А.Я. Избранные труды по теории вероятностей /Составитель Б.В.Гнеденко. Под ред. А.М.Зубкова. — М.: ТВП, 1995. — 552 с.
3. Хинчин А.Я. Педагогические статьи. — М.: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1963.

REFERENCES

1. Khintchine A.Ya. Selected works on the number theory, 2006, *Moscow, Russia*, pp.260.
2. Khintchine A.Ya. Selected works on the probability theory, 1995, *Moscow, Russia*, pp.552.
3. Khintchine A.Ya. The pedagogical papers, 1963, *Moscow, Russia*.

Получено 15.10.2019 г.

Принято в печать 20.12.2019 г.