

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-385-398

Некоторые вопросы аппроксимации периодических функций
тригонометрическими полиномами в L_2

М. Ш. Шабозов

Шабозов Мирганд Шабозович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра функционального анализа и дифференциальных уравнений, Таджикский национальный университет (г. Душанбе).
e-mail: shabozov@mail.ru

Аннотация

Статья состоит из двух частей. В первой части излагается обзор результатов о наилучшего приближения периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в гильбертовом пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. Приведены точные неравенства между величиной наилучшего приближения функции и усредненными с заданным весом значениями модулей непрерывности m -го порядка r -той производной функции, а также их аналоги для некоторых модификаций модуля непрерывности m -го порядка.

Во второй части статьи приведены некоторые новые точные неравенства типа Джексона-Стечкина для характеристики гладкости, введенной К. В. Руновским [2] и более подробно изученной С. Б. Вакарчуком и В. И. Забутной [14]. Получен точный результат об одновременном приближении функции и ее последовательных производных для некоторых классов функций, задаваемых указанной характеристикой гладкости.

Ключевые слова: аппроксимации функций, тригонометрический полином, модуль непрерывности, обобщенный модуль непрерывности, неравенства Джексона-Стечкина, одновременное приближение функции и ее производных.

Библиография: 29 названий.

Для цитирования:

М. Ш. Шабозов. Некоторые вопросы аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 385–398.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-385-398

Some problems of approximation of periodic functions by
trigonometric polynomials in L_2

M. Sh. Shabozov

Shabozov Mirgand Shabozovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Department of functional analysis and differential equations, Tajik national University (Dushanbe).
e-mail: shabozov@mail.ru

Abstract

The paper consists from two parts. In first part summarizes the review of findings on best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in Hilbert space $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. The sharp inequalities between the best approximation and averaged with given weights modulus of continuity of m th order values r th derivatives of functions and analogues for some modified modulus of continuity presented.

In second part, some new sharp Jackson-Stechkin type inequalities for characteristics of smoothness studied by K. V. Runovski and more detail by S. B. Vakarchuk and V. I. Zabutnaya are proposed. The sharp result on joint approximation of function and successive derivatives for some classes of functions defined by modulus of smoothness obtained.

Keywords: approximation of function, the trigonometric polynomial, moduli of continuity, the averaged moduli of continuity, Jackson-Stechkin type inequality, join approximation of function and derivatives.

Bibliography: 29 titles.

For citation:

M. Sh. Shabozov, 2019, "Some problems of approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2 ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 385–398.

Посвящается 60-летию академика АН Республики Таджикистан З. Х. Рахмонова

1. Введение

При решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций в последнее время, наряду с классическим определением характеристики гладкости модуля непрерывности, часто используют различные её модификации (см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 6] и приведенную там литературу). Введение таких модификаций модуля непрерывности позволяет сформулировать естественные аналоги задач теории аппроксимации и получить результаты, раскрывающие их содержательную сущность. Так, например, для определения эффективных характеристик гладкости и выявления структурных свойств функций в работах К. В. Руновского [2], Н. П. Пустовойтова [7], В. А. Абилова [8] и других рассматривались различные способы осреднения нормы конечных разностей m -го порядка и получены конструктивные характеристики исследуемых классов функций в терминах введённых обобщённых модулей непрерывности.

В случае аппроксимации 2π -периодических функций тригонометрическими полиномами, например в ряде работ [8, 9, 10, 11, 12], вместо оператора сдвига $T_h(f) := f(x + h)$, $x, h \in \mathbb{R}$ была использована функция Стеклова $S_h(f)$, простейшие свойства которой приведены в монографии [13, с.98-101].

В этой статье мы продолжим указанную тематику. Статья организована следующим образом. В разделе 1 приведём необходимые определения, постановки задач и краткий обзор результатов в виде точных неравенств между наилучшими приближениями и интегралами, содержащими модуль непрерывности m -го порядка с заданным весом в пространстве L_2 .

Указывается на их обобщений для некоторых модификаций модулей непрерывности высших порядков.

В разделе 2 приводятся новые точные неравенства, связывающие величины наилучших приближений самой функции и её последовательных производных с интегралами, содержащими усреднённые с весом характеристики гладкости функции $f \in L_2$ введённой, К. В. Руновским [2] и более подробно изученной С. Б. Вакарчуком и В. И. Забутной [14].

2. Определения, постановки задач, смежные результаты

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел вещественной оси; $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел. Обозначим через $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ пространство измеримых по Лебегу 2π -периодических вещественных функций, у которых норма

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx \right\}^{1/2} < \infty.$$

Пусть $\mathcal{P}_{2n-1}$ — подпространство, состоящее из всевозможных тригонометрических полиномов

$$T_{n-1}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx).$$

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

величина её наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathcal{P}_{2n-1}$ равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f) &:= \inf \{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{P}_{2n-1} \} = \\ &= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $S_{n-1}(f, x)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$, $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $a_k(f), b_k(f)$ — косинус- и синус — коэффициенты Фурье.

Модуль непрерывности и некоторые его модификации. Модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$ как обычно определим равенством

$$\omega_m(f, t) = \sup \{ \|\Delta_h^m f(x)\| : |h| \leq t \}, \quad (2)$$

где

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x + kh)$$

— разность m -го порядка функции f в точке x с шагом h .

Под $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}, L_2^{(0)} = L_2$) понимаем множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)} \in L_2$.

Для оценки наилучших приближений 2π -периодических функций из L_2 , наряду с (1), используют усреднённую характеристику гладкости следующего вида (см., например, [1, 2])

$$\Omega_m(f, t) := \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_h^m f(\cdot)\|_{L_2}^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2}, \quad (3)$$

где $t > 0$, $\bar{h} := (h_1, h_2, \dots, h_m)$, $\Delta_{\bar{h}}^m := \Delta_{h_1}^1 \circ \Delta_{h_2}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$.

Усреднённая характеристики гладкости вида (3) использовалась при изучении некоторых конструктивных свойств функции $f \in L_p$ ($0 < p < 1$) К. В. Руновским [2] и Э. А. Стороженко, В. Г. Кротовым, П. Освальдом [15].

Выше отметили, что в работах [8, 9, 10, 11, 12] при аппроксимации функции $f \in L_2$ вместо обычного оператора сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$, $x, h \in \mathbb{R}$ была использована функция (оператор) Стеклова $S_h(f)$. Опишем более подробно эту схему.

Для произвольной функции $f \in L_2$ вводим в рассмотрение функцию Стеклова

$$S_h(f; x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x+t) dt$$

и рекуррентно полагаем $S_{h,k}(f) := S_h(S_{h,k-1}(f))$, $k \in \mathbb{N}$, $S_{h,0}(f) \equiv f$. Определим конечные разности первого и высших порядков, как и в классическом случае, равенствами

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_h^1(f, x) &:= S_h(f, x) - f(x) = (S_h - \mathbb{I})(f, x), \\ \tilde{\Delta}_h^m(f, x) &:= \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f, \cdot), x) = (S_h - \mathbb{I})^m(f, x) = \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} S_{h,k}(f, x), \quad k = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

где $\mathbb{I}$ — единичный оператор в L_2 . Равенством

$$\tilde{\Omega}_m(f, t) := \sup\{\|\tilde{\Delta}_h^m(f, \cdot)\| : 0 < h \leq t\} \quad (4)$$

определим обобщённый модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$.

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ НЕРАВЕНСТВ ТИПА ДЖЕКСОНА-СТЕЧКИНА. Среди экстремальных задач теории аппроксимации функций одной из наиболее важных является задача вычисления точных констант в неравенствах типа Джексона—Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \mathcal{X} n^{-r} U_m(f^{(r)}, \tau/n); \quad r \in \mathbb{Z}_+, \tau > 0, \quad (5)$$

где U_m — некоторая характеристика гладкости функции $f \in L_2^{(r)}(L_2^{(0)} = L_2)$, например, ω_m, Ω_m или $\tilde{\Omega}_m$; $\mathcal{X}$ — некоторая константа. При решении задач теории аппроксимации в L_2 , связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа (5), рассматривались различные экстремальные характеристики, приводящие к уточнению оценок сверху постоянных $\mathcal{X}$. Условимся под весовой функцией на отрезке $[0, h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию q , неэквивалентную нулю на этом же отрезке. При вычислении верхних граней по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$, $L_2^{(0)} = L_2$) в соотношениях общего характера имеется ввиду, что $f \neq const$. Для компактного изложения полученных ранее результатов введём следующее обозначение

$$\mathcal{X}_{n,r,p}(U_m; q, h) = \sup \left\{ \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h U_m^p(f^{(r)}, t) q(t) dt \right)^{1/p}} : f \in L_2^{(r)} \right\}, \quad (6)$$

где $n, r, m \in \mathbb{N}$, $p \in (0, \infty)$, $q(t)$ — весовая на $[0, h]$ ($0 < h \leq \pi/n$) функция.

Величину вида (6) при $U_m \equiv \omega_m$ в разное время изучали:

- 1) Черных [16]: а) $\mathcal{X}_{n,r,2}(\omega_1; q, \pi/n)$, где $q(t) = \sin nt$;
- б) $\mathcal{X}_{n,0,2}(\omega_m; q, 2\pi/n)$, где $q(t) = \sin(nt/2) + (\sin nt)/2$;
- 2) Тайков [17]: $\mathcal{X}_{n,r,2}(\omega_1; q, h)$, где $q(t) \equiv 1, 0 < t \leq h, 0 < h \leq 2\pi/n$;
- 3) Тайков [18]: $\mathcal{X}_{n,r,1}(\omega_1; q, \pi/n)$, где $q(t) \equiv 1$;
- 4) Тайков [19]: $\mathcal{X}_{n,r,2}(\omega_m; q, h)$, где $q(t) = 1, 0 < t \leq h, 0 < h \leq \pi/n$;
- 5) Лигун [20]: $\mathcal{X}_{n,r,2}(\omega_m; q, h)$, где $q(t) \geq 0, 0 < t \leq \pi/n$;
- 6) Айнуллоев [21]: $\mathcal{X}_{n,r,2}(\omega_m; q, h)$, где $q(t) = \sin^\gamma \beta t, 0 \leq t \leq h, 0 \leq \gamma \leq 2r-1, r \in \mathbb{N}, \beta > 0, 0 < \beta h \leq \pi$;
- 7) Шалаев [22]: $\mathcal{X}_{n,r,2/m}(\omega_m; q, \pi/n)$, где $q(t) = \sin nt, 0 < t \leq \pi/n$;
- 8) Юссеф [23]: $\mathcal{X}_{n,r,2}(\omega_1; q, h)$, где $q(t) = \sin(\pi t/h), 0 < t \leq h \leq \pi/n$;

- 9) Вакарчук [24]: $\mathcal{X}_{n,r,2/m}(\omega_m; q, h)$, где $q(t) \equiv 1, 0 \leq t \leq h, 0 < h \leq 2\pi/n$;
 10) Шабозов, Юсупов [25]: $\mathcal{X}_{n,r,p}(\omega_m; q, h)$, где $q(t) \geq 0, 0 \leq t \leq h$,
 $0 < h \leq \pi/n, 1/r \leq p \leq 2, m, r \in \mathbb{N}, r \geq 2$.
 11) Shabozov, Yusupov, Temurbekova [29]: $\mathcal{X}_{n,r,p}(\omega_m; q, h)$, где $q(t) \geq 0, 0 \leq t \leq h$,
 $0 < h \leq \pi/n, 1/r \leq p \leq 2, m, r \in \mathbb{R}_+, r \geq 2$.

Исследуя вопросы наилучшего приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 , Черных отметил [16], что для характеристики величины $E_{n-1}(f)$, по-видимому, более естественным является не джексоновский функционал $\omega_1(f, \pi/n)$, а его усреднённое значение, т.е. функционал

$$\mathcal{F}_n(f) := \left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_1^2(f, t) \sin ntdt \right)^{1/2}.$$

Эти соображения привели А.А.Лигуна [20] к рассмотрению следующую экстремальную характеристику

$$\mathcal{K}_{n,r}(\omega_m; q, h) := \sup \left\{ \frac{E_{n-1}^2(f)}{\int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t) q(t) dt} : f \in L_2^{(r)} \right\},$$

где $m, n \in \mathbb{N}; r \in \mathbb{Z}_+; 0 < h \leq \pi/n; q(t) \geq 0$ — суммируемая на $[0, h]$ функция. Он доказал, что

$$\left\{ B_{n,h}^{r,m}(q) \right\}^{-1} \leq \mathcal{K}_{n,r}(\omega_m; q, h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} B_{k,h}^{r,m}(q) \right\}^{-1}.$$

Здесь

$$B_{k,h}^{r,m}(q) := 2^m k^{2r} \int_0^h (1 - \cos kt)^m q(t) dt; \quad k \geq n, k, n \in \mathbb{N}.$$

С целью обобщения результата А. А. Лигуна [20], М. Ш. Шабозов и Г. А. Юсупов [25] ввели в рассмотрение экстремальную характеристику вида (6), в которой U_m — есть обычный модуль непрерывности m -го порядка ω_m в L_2 , и для $0 < p \leq 2$ доказали следующие неравенства

$$\left\{ A_{n,h,p}^{r,m}(q) \right\}^{-1} \leq \mathcal{X}_{n,r,p}(\omega_m; q, h) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} A_{k,h,p}^{r,m}(q) \right\}^{-1}, \quad (7)$$

где

$$A_{k,h,p}^{r,m}(q) := 2^{m/2} \left(k^{rp} \int_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2} q(t) dt \right)^{1/p}, \quad k \geq n.$$

Отметим, что при конкретном выборе чисел n, m, r, p и весовой функции $q(t)$ из неравенства (7) вытекают все цитированные выше результаты, приведенные в пунктах 1)-11).

Следует также отметить, что для характеристики гладкости Ω_m и $\tilde{\Omega}_m$ неравенства типа (7) соответственно доказаны в работах [26] и [27]. В [27] результаты [25] обобщены для дробной производной в смысле Вейля [28], а в [29] для модуля непрерывности дробного порядка.

В связи с неравенством (7) возникает естественный вопрос: выяснить условия, при выполнении которых в (7) имеет место соотношение

$$\inf_{n \leq k < \infty} A_{k,h,p}^{r,m}(q) = A_{n,h,p}^{r,m}(q). \quad (8)$$

Для некоторых конкретных весовых функций доказательство (8) при $p = 2$ имеется в [20]. В общем случае в работе М. Ш. Шабозова и Г. А. Юсупова [25] доказано, что если

весовая функция $q \in C^{(1)}[0, h]$ при всех $1/r < p \leq 2$, $r \geq 1$ и $0 < t \leq h$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$(rp - 1)q(t) - tq'(t) \geq 0, \quad (9)$$

то имеет место соотношение (8). Условие (9) является ограничительным, в том смысле, что множество весовых функций q , для которых выполняется неравенство (8), весьма узко. В [27] нами в случае $U_m = \tilde{\Omega}_m$ найдено точное значение величины (7), во-первых, для всех значений $0 < p \leq \infty$, и, во-вторых, без дополнительного предположения, что $q \in C^{(1)}[0, h]$ и удовлетворяет условию (9). При этом характеристика гладкости $\tilde{\Omega}_m$ задаётся дробной производной Вейля [28]. Сформулируем основной результат работы [27].

ТЕОРЕМА [27]. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leq 3\pi/(4n)$, q — весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{X}_{n,\alpha,p}(\tilde{\Omega}_m; q, h) = \left\{ n^{\alpha p} \int_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t) dt \right\}^{-1/p}, \quad (10)$$

где

$$\operatorname{sinc} u := \begin{cases} \frac{\sin u}{u}, & \text{если } u \neq 0; \\ 1, & \text{если } u = 0 \end{cases}.$$

Из этой теоремы вытекают очевидные следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы при $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha > m$ и $q(t) \equiv 1$ имеет место равенство

$$\mathcal{X}_{n,\alpha,1/m}(\tilde{\Omega}_m; 1, h) = n^{-\alpha} \left\{ \frac{n}{nh - \operatorname{Si}(nh)} \right\}^m, \quad (11)$$

где $\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \operatorname{sinc} u \, du$ — интегральный синус. В частности, при $h = \pi/(2n)$ и $\alpha > m$ из (11) имеем

$$\mathcal{X}_{n,\alpha,1/m}(\tilde{\Omega}_m; 1, \frac{\pi}{2n}) = n^{-\alpha+m} \left\{ \frac{2}{\pi - 2\operatorname{Si}(\pi/2)} \right\}^m.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы при $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ и $q(t) \equiv t$ имеет место равенство

$$\mathcal{X}_{n,\alpha,1/m}(\tilde{\Omega}_m; t, h) = n^{-\alpha} \{2(nh/2)^2 - \sin^2(nh/2)\}^{-m} \quad (12)$$

и, в частности, при $h = \pi/(2n)$ из (12) следует

$$\mathcal{X}_{n,\alpha,1/m}(\tilde{\Omega}_m; t, \frac{\pi}{2n}) = n^{-\alpha} \left\{ \frac{8}{\pi^2 - 4} \right\}^m.$$

3. О некоторых новых результатах

В этом пункте излагаем некоторые новые точные неравенства между наилучшими приближениями функции $f \in L_2$ и усреднённой характеристикой гладкости

$$\Lambda_m(f, t) := \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \|\Delta_h^m(f)\|^2 dh \right\}^{1/2}, \quad t > 0, \quad (13)$$

ранее рассмотренной в работах К. В. Руновского [2], С. Б. Вакарчука и В. И. Забутная [14].

Полагаем

$$\mathcal{J}_{k,m}(u) := \left\{ \frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos k\tau)^m d\tau \right\}^{1/2}, \quad (14)$$

где $k, m \in \mathbb{N}, u > 0$. Очевидно, что $\lim_{u \rightarrow 0+} \mathcal{J}_{k,m}(u) = 0$, и при всех $u > 0$ имеет место равенство

$$\mathcal{J}_{k,m}(u) = \mathcal{J}_{1,m}(ku). \quad (15)$$

Пусть $f \in L_2^{(r)}, r \in \mathbb{N}$. Тогда легко проверить, что для любого $s \in \mathbb{Z}_+, (0 \leq s \leq r)$ имеет место соотношение

$$E_{n-1}(f^{(s)}) = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \quad (16)$$

и поскольку

$$\|\Delta_h^m(f^{(r)})\|^2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) (1 - \cos kh)^m, \quad (17)$$

то, учитывая равенства (1), (14) и (15) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ исходя из (13), с учётом равенства (17), запишем

$$\begin{aligned} \Lambda_m(f^{(r)}, t) &= \left\{ \frac{2^m}{t} \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) (1 - \cos kh)^m dh \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \mathcal{J}_{1,m}^2(kt) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s$ и $0 < t \leq 2\pi$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)}, t/n)} = \frac{1}{2^{m/2} \mathcal{J}_{1,m}(t)}. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [14] доказано, что при любых $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < t \leq 2\pi$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Lambda_m(f^{(r)}, t/n)} = \frac{1}{2^{m/2} \mathcal{J}_{1,m}(t)}. \quad (20)$$

В левой части равенства (19) полагаем $f^{(s)} \equiv g$. Тогда получаем $f^{(r)} \equiv g^{(r-s)}$, а это означает, что если $f \in L_2^{(r)}$, то $g \in L_2^{(r-s)}$, а потому учитывая равенство (20) запишем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)}, t/n)} = \sup_{g \in L_2^{(r-s)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(g)}{\Lambda_m(g^{(r-s)}, t/n)} = \frac{1}{2^{m/2} \mathcal{J}_{1,m}(t)},$$

откуда и следует равенство (19). Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. В условиях теоремы 1 при $t = \pi$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_m(f^{(r)}, \pi/n)} = \frac{1}{2^{m/2} \mathcal{J}_{1,m}(\pi)} = \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \left\{ \frac{m!}{(2m-1)!!} \right\}^{1/2}.$$

Исходя из формулы (13), введём в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$M_{n,r,s,p}(\Lambda_m; q, h) = \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t) q(t) dt \right)^{1/p}}, \quad (21)$$

где $m, n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s, 0 < p \leq \infty, 0 < h \leq 2\pi/n$. Отметим, что для параметра p , удовлетворяющего условию $0 < p \leq \infty$, функционал $\|\Lambda_m\|_p$ в знаменателе дроби в правой части (21) определён соотношением

$$\|\Lambda_m\|_p := \begin{cases} \int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t) q(t) dt, & \text{если } 0 < p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{0 < t \leq h} \Lambda_m(f^{(r)}, t), & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

При этом указанный функционал лишь при $1 \leq p < \infty$ является нормой. Имеет место следующая общая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s, 0 < p \leq \infty, 0 < h \leq 2\pi/n$, q — весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство

$$M_{n,r,s,p}(\Lambda_m; q, h) = 2^{-m/2} \left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем равенство (22) для случая, когда $s = 0$. В этом случае в [14] доказано, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место неравенство

$$\Lambda_m(f^{(r)}, t) \geq 2^{m/2} n^r \mathcal{J}_{1,m}(nt) E_{n-1}(f). \quad (23)$$

Возведя обе части неравенства (23) в степень p ($0 < p \leq \infty$), умножим на вес q и интегрируем по отрезку $[0, h]$ ($0 < h \leq 2\pi/n$). В итоге получим неравенство

$$\left(\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t) q(t) dt \right)^{1/p} \geq 2^{m/2} n^r E_{n-1}(f) \left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{1/p},$$

откуда и следует, что для произвольной $f \in L_2^{(r)}$

$$\frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t) q(t) dt \right)^{1/p}} \leq \frac{1}{2^{m/2} \left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{1/p}}. \quad (24)$$

Из (24) для величины (21) получаем оценку сверху

$$M_{n,r,0,p}(\Lambda_m; q, h) \leq 2^{-m/2} \left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (25)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$. Для этой функции

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \Lambda_m(f_0^{(r)}, t) = 2^{m/2} n^r \mathcal{J}_{1,m}(nt). \quad (26)$$

Пользуясь равенствами (26), запишем оценку снизу величины (21):

$$M_{n,r,0,p}(\Lambda_m; q, h) \geq \frac{n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\int_0^h \Lambda_m^p(f_0^{(r)}, t) q(t) dt \right)^{1/2}} = 2^{-m/2} \left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (27)$$

Сопоставляя оценку сверху (24) с оценкой снизу (27) получаем

$$M_{n,r,0,p}(\Lambda_m; q, h) = 2^{-m/2} \left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{-1/p}, \quad (28)$$

и этим равенство (22) доказано при $s = 0$. В общем случае при любых $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s \geq 0$, учитывая (28), запишем

$$\begin{aligned} M_{n,r,s,p}(\Lambda_m; q, h) &= \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t) q(t) dt \right)^{1/2}} = \\ &= \sup_{g \in L_2^{(r-s)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(g)}{\left(\int_0^h \Lambda_m^p(g^{(r-s)}, t) q(t) dt \right)^{1/2}} = 2^{-m/2} \left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{-1/p}, \end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2. Из теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $m = 1$, $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq 3\pi/(4n)$, q — весовая функция на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)}, t) q(t) dt \right)^{1/p}} = \frac{1}{\sqrt{2} \left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} q(t) dt \right)^{1/p}}. \quad (29)$$

Отметим, что равенство (29) при $s = 0$ и $0 < p \leq 2$ недавно получено в [14]. Из (22), в частности при $p = 2$ и $q(t) = 1$, имеем:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int_0^h \Lambda_1^2(f^{(r)}, t) dt \right)^{1/2}} = \left\{ \frac{n}{2(nh - \operatorname{Si}(nh))} \right\}^{1/2}.$$

Для заданных $h \in \mathbb{R}_+$, $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq \infty$ и q — весовой функции на $[0, h]$, обозначим через $W_{p,m}^{(r)}(q, h) := W_p^{(r)}(\Lambda_m; q, h)$ класс функции $f \in L_2^{(r)}$, для которых

$$\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t) q(t) dt \leq 1.$$

Требуется для любого $s \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq s \leq r$ найти величину

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{p,m}^{(r)}(q, h)) := \sup\{E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in W_{p,m}^{(r)}(q, h)\}. \quad (30)$$

Имеет место следующее утверждение

ТЕОРЕМА 3. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq 2\pi/n$. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{p,m}^{(r)}(q, h)) = 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{-1/p}. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, из неравенства (24) для любой функции $f \in L_2^{(r)}$ при любых $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq 2\pi/n$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \frac{\left(\int_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)}, t) q(t) dt \right)^{1/p}}{2^{m/2} \left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{1/p}}. \quad (32)$$

Из (32) для произвольной функции $f \in W_{p,m}^{(r)}(q, h)$ имеем:

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{2^{-m/2} n^{-(r-s)}}{\left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{1/p}},$$

откуда для величины (30) получаем оценку сверху

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{p,m}^{(r)}(q, h)) \leq \frac{2^{-m/2} n^{-(r-s)}}{\left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{1/p}}. \quad (33)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу величины (30) введём в рассмотрение функцию

$$g_0(x) = \frac{2^{-m/2}}{n^r} \left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{-1/p} \sin nx.$$

Для этой функции при всех $s = 0, 1, \dots, r$ имеем:

$$g_0^{(s)}(x) = \frac{2^{-m/2}}{n^{r-s}} \left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{-1/p} \sin \left(nx + \frac{s\pi}{2} \right),$$

откуда в силу равенств (16) и (18) получаем:

$$E_{n-1}(g_0^{(s)}) = \frac{2^{-m/2} n^{-(r-s)}}{\left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{1/p}}, \quad (34)$$

$$\Lambda_m(g_0^{(r)}, t) = \frac{\mathcal{J}_{1,m}(nt)}{\left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{1/p}},$$

$$\int_0^h \Lambda_m^p(g_0^{(r)}, t) q(t) dt = 1. \quad (35)$$

Равенство (35) означает, что функция $g_0 \in W_{p,m}^{(r)}(q, h)$, а потому пользуясь равенством (28), запишем оценку снизу указанной величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{p,m}^{(r)}(q, h)) \geq E_{n-1}(g_0^{(s)}) = \frac{2^{-m/2} n^{-(r-s)}}{\left(\int_0^h \mathcal{J}_{1,m}^p(nt) q(t) dt \right)^{1/p}}. \quad (36)$$

Требуемое равенство (31) вытекает из сравнения оценки сверху (33) с оценкой снизу (36), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $m = 1, r \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s, 0 < p \leq \infty, 0 < h \leq 2\pi/n, q$ — весовая на $[0, h]$ функция. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{p,1}^{(r)}(q, h)) = \frac{n^{-(r-s)}}{\sqrt{2} \left(\int_0^h (1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} q(t) dt \right)^{1/p}}.$$

Отсюда, в частности, при $p = 2, q \equiv 1$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{2,1}^{(r)}(1, h)) = \left\{ \frac{n}{2(nh - \operatorname{Si}(nh))} \right\}^{1/2} n^{-(r-s)}.$$

4. Заключение

В первой части статьи приводится краткий обзор результатов о наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в пространстве $L_2[0, 2\pi]$. Во второй части излагаются новые точные результаты между наилучшим приближением и интегралами, содержащими специальные характеристики гладкости функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ditzian Z., Totik V. Moduli of smoothness. N Y: Springer-Verlag, 1987. (Springer Ser. Comput. Math.; vol.9). doi:10.1007/978-1-4612-4778-4. 227 p.
2. Руновский К. В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p , $(0 < p < 1)$ // Мат. сб. 1994. Т. 185. № 8. С. 81–102.
3. Васильев С. Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденными произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 1. С. 11–14.
4. Козко А. И., Рождественский А. В. О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности // Мат. заметки. 2003. Т. 73. № 5. С. 783–788.
5. Иванов А. В., Иванов В. И. Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Мат. заметки. 2013. Т. 94, вып. 3. С. 338–348.
6. Потапов М. К. О свойствах и о применении в теории приближений одного свойства операторов обобщенного сдвига // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 412–426.
7. Пустовойтов Н. П. Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усредненные разности и многомерная теорема Джексона // Мат. сб. 1997. Т. 188. № 10. С. 95–108.
8. Абилов В. А., Абилова Ф. В. Некоторые вопросы приближения 2π -периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Мат. заметки. 2004. Т. 76. № 6. С. 803–811.
9. Вакарчук С. Б., Забутная В. И. Неравенства типа Джексона—Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки. 2012. Т. 92. № 4. С. 497–514.
10. Шабозов М. Ш., Тухлиев К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 // Мат. заметки. 2013. Т. 94. № 6. С. 908–917.
11. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52. № 6. С. 1414–1427.
12. Тухлиев К. Наилучшие приближения и поперечники некоторых классов сверток в L_2 // Труды Института математики и механики, УрО РАН. 2016. Т. 22. № 4. С. 284–294.
13. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976, 320 с.
14. Вакарчук С. Б., Забутная В. И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Мат. заметки. 2016. Т. 99. № 2. С. 215–238.

15. Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p ($0 < p < 1$) // Мат. сб. 1975. Т. 98(140). № 3(11). С. 395–415.
16. Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 513–522.
17. Тайков Л. В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки. 1976. Т. 20. № 3. С. 433–438.
18. Тайков Л. В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Мат. заметки. 1977. Т. 22. № 4. С. 535–542.
19. Тайков Л. В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки. 1979. Т. 25. № 2. С. 217–223.
20. Лигун А. А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1978. Т. 24. № 6. С. 785–792.
21. Айнуллоев Н. О поперечниках дифференцируемых функций в L_2 // Докл. АН ТаджССР. 1985. Т. 28. № 6. С. 309–313.
22. Шалаев В. В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43. № 1. С. 125–129.
23. Юссеф Х. О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в L_2 , *Применение функционального анализа в теории приближений* // Сб. научн. трудов. Калининский гос. ун-т. Калини. 1988. С. 100–114.
24. Вакарчук С. Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точных значениях их n -поперечников // Мат. заметки. 2001. Т. 70. № 3. С. 334–345.
25. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. 2011. Т. 90. № 5. С. 764–775.
26. Шабозов М. Ш., Вакарчук С. Б., Забутная В. И. Точные неравенство типа Джексона–Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций // ДАН России. 2013. Т. 451. № 6. С. 625–628.
27. Шабозов М. Ш., Шабозова А. А. Некоторые точные неравенства типа Джексона–Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в L_2 // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 4. С. 255–264.
28. Weyl H. Bemerkungen zum Begriff der differential quotienten gebrochener Ordnung, Vierteljahresschr. Natursch. Ges. Zurich. 1917. Vol. 62. P. 296–302.
29. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A., Temurbekova S.D. N -widths of certaing function classes defined by the modulus of continuity // J. of Approximation Theory. 2017. V. 2015. P. 145–162.

REFERENCES

1. Ditzian Z., Totik V. Moduli of smoothness. N Y: Springer-Verlag, 1987.

2. Runovskiy K. V., 1995, "On approximation by families of linear polynomial operators in L_p , ($0 < p < 1$) spaces", Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics, vol. 82, № 2.
3. Vasilev S. N., 2002, "Sharp Jackson-Stechkin inequality in L_2 with the modulus of continuity generated by an arbitrary finite-difference operator with constant coefficients" Dokl. Math., vol. 66, № 1, pp. 5–8.
4. Kozko A. I., Rozhdestvenskiy A. V. 2003, "On Jackson's inequality with a generalized modulus of continuity", Mat. Zametki, vol. 73, № 5, pp. 783–788.
5. Ivanov A. V., Ivanov V. I. 2013, "Optimal arguments in Jackson's inequality in the power-weighted space $L_2(\mathbb{R}^d)$ ", Math. Notes, vol. 94, № 3–4, pp. 320–329.
6. Potapov M. K., 2001, "On the properties and application in approximation theory of a family of generalized shift operators", Math. Notes, vol. 69, № 3–4, pp. 373–386.
7. Pustovoytov N. P., 1997, "An estimate for the best approximations of periodic functions by trigonometric polynomials in terms of averaged differences, and the multidimensional Jackson theorem" Sb. Math. vol.188, № 10, pp. 1507–1520.
8. Abilov V. A., Abilova F. V., 2004, "Some problems of the approximation of 2π -periodic functions by Fourier sums in the space $L_2(2\pi)$ ", Math. Notes, vol.76, № 5–6, pp. 749–757.
9. Vakarchuk S. B., Zabutnaya V. I., 2012, "Jackson-Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space L_2 ", Math. Notes, vol. 92, № 3–4, pp. 458–472.
10. Shabozov M. Sh., Tukhliev K., 2013, "Best polynomial approximations and the widths of function classes in L_2 ", Math. Notes, vol. 94, № 5–6, pp. 930–937.
11. Shabozov M. Sh., Yusupov G. A., 2011, "Exact constants in Jackson-type inequalities and exact values of the widths of some classes of functions in L_2 ", Sib. Math. J., vol. 52, № 6, pp. 1124–1136.
12. Tukhliev K., 2016, "Best approximations and widths of some convolution classes in L_2 " Tr. Inst. Mat. Mekh., vol. 22, № 4, pp. 284–294.
13. Korneichuk N. P. Extremal problems in theory of approximation. Moscow, 1976.
14. Vakarchuk S. B., Zabutnaya V. I., 2016, "Inequalities between best polynomial approximations and some smoothness characteristics in the space L_2 and widths of classes of functions" Math. Notes, vol. 99, № 1–2, pp. 222–242.
15. Storojenko E. A., Krotov V. G., Osvald P., 1975, "Direct and inverse theorems of Jackson type in the spaces L^p , $0 < p < 1$ ", Mat. Sb. (N.S.), vol. 98(140), № 3(11), pp. 395–415.
16. Chernih N. I., 1967, "The best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2 ", Mat. Zametki, 2, pp. 513–522.
17. Taykov L. V., 1976, "Inequalities containing best approximations, and the modulus of continuity of functions in L_2 ", Mat. Zametki, vol. 20, № 3, pp. 433–438.
18. Taykov L. V., 1977, "Best approximations of differentiable functions in the metric of the space L_2 " Mat. Zametki, vol. 22, № 4, pp. 535–542.

19. Taykov L. V., 1979, "Structural and constructive characteristics of functions from L_2 ", Mat. Zametki, vol. 25, № 2, pp. 217–223.
20. Ligon A. A., 1978, "Some inequalities between best approximations and moduli of continuity in the space L_2 ", Mat. Zametki, vol. 24, № 6, pp. 785–792.
21. Айнуллоев Н. О поперечниках дифференцируемых функций в L_2 // Докл. АН ТаджССР. 1985. Т. 28. № 6. С. 309–313.
22. Shalaev V. V., 1991, "Widths in L_2 of classes of differentiable functions, defined by higher-order moduli of continuity", Ukrainian Math. J., vol. 43, issue 1, pp. 104–107.
23. Yussef Kh., 1988, "On best approximation of functions and values of widths of classes of functions in L_2 " / Application of functional analyses in theory of approximation // Proceeding of Kalinskiy state university, pp. 100–114.
24. Vakarchuk S. B., 2001, "On the best polynomial approximations in L_2 of some classes of 2π -periodic functions and of the exact values of their n -widths", Math. Notes, vol. 70, № 3–4, pp. 300–310.
25. Shabozov M. Sh., Yusupov G. A., 2011, "Best polynomial approximations in L_2 of some classes of 2π -periodic functions and the exact values of their widths", Math. Notes, vol. 90, № 5–6, pp. 748–757.
26. Shabozov M. Sh., Vakarchuk S. B., Zabutnaya V. I., 2013, "Sharp inequalities of Jackson-Stechkin type for periodic functions in L_2 and values of widths of classes of functions", Dokl. RAN, vol. 451, № 6, pp. 625–628.
27. Shabozov M. Sh., Shabozova A. A., 2019, "Some sharp inequalities of Jackson-Stechkin type for periodic differentiable functions in Weyl sense in L_2 ", Tr. Inst. Mat. Mekh., vol. 25, № 4, pp. 255–264.
28. Weyl H., 1917, "Bemerkungen zum Begriff der differential quotienten gebrochener Ordnung", Vierteljahresschr. Natursch. Ges. Zurich., vol. 62, pp. 296–302.
29. Shabozov M. Sh., Yusupov G. A., Temurbekova S. D., 2017, " N -widths of certain function classes defined by the modulus of continuity" J. of Approximation Theory, pp. 145–162.

Получено 18.10.2019 г.

Принято в печать 20.12.2019 г.