ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-357-370

О нулях функции Харди и её производных, лежащих на критической прямой

Ш. А. Хайруллоев

Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич —кандидат физико-математических наук, докторант кафедры алгебры и теории чисел, Таджикского национального университета (г. Душанбе).
e-mail: shamsullo@rambler.ru

Аннотация

Функция Харди $Z(t)$ принимает вещественные значения при вещественных значениях t, и вещественные нули $Z(t)$ являются нулями $\zeta(s)$, лежащими на критической прямой.

Первым результатом о нулях дзета-функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой является теорема Г.Харди. В 1914 г. он доказал, что $\zeta(1/2+it)$ *имеет бесконечно много вещественных нулей.* Затем Харди и Литтлвуд в 1921 г. доказали, что промежуток $(T, T+H)$ при $H \geqslant T^{1/4+\varepsilon}$ содержит нуль нечётного порядка $\zeta(1/2+it)$. Ян Мозер в 1976 г. доказал, что это утверждение имеет место при $H \geqslant T^{1/6}\ln^2 T$. В 1981 г. А.А.Карацуба доказал теорему Харди–Литллвуда уже при $H \geqslant T^{5/32}\ln^2 T$.

В 2006 г. З.Х.Рахмонов, Ш.А.Хайруллоев задачу о величине промежутка $(T, T+H)$ критической прямой, в которой содержится нуль нечётного порядка дзета-функции, свели к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм.

В 2009 г. З.Х.Рахмонов, Ш.А.Хайруллоев нашли нижнюю грань величины $\theta_1(k,l)$ по $\mathcal{P}$ — множеству всех экспоненциальных пар (k,l), отличных от $(1/2,1/2)$ и имеющих вид

$$\inf_{(k,l)\in\mathcal{P}} \theta_1(k;l) = R+1,$$

где $R = 0.8290213568591335924092397772831120\ldots$ – постоянная Ранкина.

В 1981 г. А.А.Карацуба вместе с задачей о соседних нулях функции $Z(t)$ также изучил задачу о соседних точках экстремума или точках перегиба функции $Z(t)$ или в более общей подстановке – о соседних нулях функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geqslant 1$. Он показал, что с увеличением j длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль $Z^{(j)}(t)$, уменьшается.

Основным результатом этой работы является сведение задачи о величине промежутка $(T, T+H)$ критической прямой, в которой заведомо лежит нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$ $(j \geq 1)$, к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальной тригонометрической суммы и уточнение теоремы А.А.Карацубы при $j=1$.

Ключевые слова: функция Харди, экспоненциальная пара, критическая прямая, дзета-функция Римана.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Ш. А. Хайруллоев. О нулях функции Харди и её производных, лежащих на критической прямой // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 371–384.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-357-370

On the functions of Hardy zeros and its derivatives lying on the critical line

Sh. A. Khayrulloev

Khayrulloev Shamsullo Amrulloevich —candidate of physical and mathematical Sciences, doctoral candidate of the Department of algebra and number theory, Tajik national University (Dushanbe).

e-mail: shamsullo@rambler.ru

Abstract

Hardy function $Z(t)$ takes real values for real values of t and real zeros of $Z(t)$ are the zeros of $\zeta(s)$, that are on the critical line.

The first result of the zeros of the Riemann zeta function on the critical line is the G.Hardy theorem. In 1914 he proved that $\zeta(1/2+it)$ has infinitely many real zeros. Then Hardy and Littlewood in 1921 proved that the interval $(T, T+H)$ when $H \geqslant T^{1/4+\varepsilon}$ contains odd order zero of function $\zeta(1/2+it)$. Jan Moser in 1976 proved that this assertion holds for $H \geqslant T^{1/6}\ln^2 T$. In 1981 A.A.Karatsuba proved Hardy-Litllvud theorem already for $H \geqslant T^{5/32}\ln^2 T$.

In 2006 Z.Kh.Rahmonov, Sh.A.Khayrulloev have reduced a problem of the magnitude of the interval $(T, T+H)$ of the critical line, which contains an odd order zero of the zeta function to the problem of finding an exponential pairs for estimating the special trigonometric sums.

In 2009 Z.H.Rahmonov, Sh.A.Khayrulloev find the lower bound of $\theta_1(k,l)$ on $\mathcal{P}$ – the set of all exponential pairs (k,l) of different from (1/2, 1/2) and having the form:

$$\inf_{(k,l)\in\mathcal{P}} \theta_1(k;l) = R+1,$$

where $R = 0.8290213568591335924092397772831120\ldots$ – Rankin constant.

In 1981 A.A.Karatsuba has studied the problem of neighboring zeros of the function $Z(t)$ together with the problem of the neighboring extremum points or of inflection points of the function $Z(t)$ or in a more general substitution – of the neighboring zeros of functions $Z^{(j)}(t)$, $j \geqslant 1$.

The main result of our work is to reduce the problem of the magnitude of the interval $(T, T+H)$ of the critical line, which is known to be a odd order zero of the function $Z^{(j)}(t)$, $(j \geqslant 1)$ to the problem of finding the exponential pairs for estimating the special trigonometric sum and to improve the A.A.Karatsuby theorem for $j = 1$.

Keywords: Hardy function, exponential pair, critical line, the Riemann zeta function.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Sh. A. Khayrulloev, 2019, “On the functions of Hardy zeros and its derivatives lying on the critical line”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 371–384.

1. Введение

Функция Харди $Z(t)$ задаётся равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \quad e^{i\theta(t)} = \pi^{-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|^{-1},$$

принимает вещественные значения при вещественных значениях t, и вещественные нули $Z(t)$ являются нулями $\zeta(s)$, лежащими на критической прямой.

Первым результатом о нулях дзета-функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой является теорема Г.Харди [1]. В 1914 г. он доказал, что $\zeta(1/2+it)$ *имеет бесконечно много вещественных нулей.* Затем Харди и Литтлвуд [2] в 1921 г. доказали, что промежуток $(T, T+H)$ при $H \geqslant T^{1/4+\varepsilon}$ содержит нуль нечётного порядка $\zeta(1/2+it)$. Ян Мозер [3] в 1976 г. доказал, что это утверждение имеет место при $H \geqslant T^{1/6}\ln^2 T$. В 1981 г. А.А.Карацуба [4] доказал теорему Харди–Литллвуда уже при $H \geqslant T^{5/32}\ln^2 T$.

В работе [9] задача о величине промежутка $(T, T+H)$ критической прямой, в которой содержится нуль нечётного порядка дзета-функции была сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм, то есть *пусть* (k, l) *– произвольная экспоненциальная пара, отличная от* $(1/2, 1/2)$,

$$\theta(k;l) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2-\theta_1^{-1}(k;l)}\right), \qquad \theta_1(k;l) = \frac{l}{0,5-k}, \tag{1}$$

тогда промежуток $(T, T+H)$*, при* $T \geqslant T_0 > 0$*,* $H \geqslant T^{\theta(k,l)}\ln^2 T$ *содержит нуль нечётного порядка дзета-функции Римана.*

Заметим, что минимизация $\theta(k,l)$ равносильна минимизации $\theta_1(k,l)$, и теорема А.А. Карацубы с $H \geqslant T^{5/32}\ln^2 T$ является следствием соотношения (1) при

$$(k,l) = \left(\frac{1}{14}, \frac{11}{14}\right) = AAB(0,1), \quad \theta_1\left(\frac{1}{14}, \frac{11}{14}\right) = \frac{11}{6} = 1,8(3),$$

$$\theta\left(\frac{1}{14}, \frac{11}{14}\right) = \frac{5}{32} = 0.15625.$$

В работе [10] найдена нижняя грань величины $\theta_1(k,l)$ по $\mathcal{P}$ — множеству всех экспоненциальных пар (k,l), отличных от $(1/2, 1/2)$ и имеющих вид:

$$\inf_{(k,l)\in\mathcal{P}} \theta_1(k;l) = R+1,$$

где $R = 0.8290213568591335924092397772831120\ldots$ – постоянная Ранкина.

А.А.Карацуба [4, 5, 6, 8] вместе с задачей о соседних нулях функции $Z(t)$ также изучил задачу о соседних точках экстремума или точках перегиба функции $Z(t)$ или в более общей подстановке – о соседних нулях функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geqslant 1$. Он показал, что с увеличением j длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль $Z^{(j)}(t)$, уменьшается, и доказал следующее.

Теорема 1. *Пусть j – натуральное число, $T \geqslant T_0(j) > 0$. Тогда промежуток $(T, T+H)$ при*

$$H \geqslant cT^{\frac{1}{6j+6}}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}, \qquad c = c(j) > 0$$

содержит нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$.

Основным результатом настоящей работы является сведение задачи о величине промежутка $(T, T+H)$ критической прямой, в которой заведомо лежит нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$ $(j \geq 1)$, к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальной тригонометрической суммы и уточнение теоремы 1 при $j = 1$.

Теорема 2. *Пусть (k,l) – произвольная экспоненциальная пара, j– натуральное число,*

$$\theta_j(k,l)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2-\delta_j^{-1}(k,l)}\right), \qquad \delta_j(k,l)=\frac{l+j}{0,5-k+j}.$$

Тогда при $H\gg T^{\theta_j(k;l)}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}$, $T\geq T_0(j)>0$ промежуток $(T,T+H)$ содержит нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$.

Заметим, что

$$\theta_j\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6j+6},$$

то есть теорема А.А.Карацубы является следствием теоремы 2 при

$$(k,l)=AB(0,1)=\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right).$$

Метод оптимизации экспоненциальных пар позволяет найти нижнюю гран величины $\delta_j(k,l)$ при $j=1$.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{P}_1$ – множество всех экспоненциальных пар (k,l), тогда*

$$\inf_{(k,l)\in\mathcal{P}_1}\delta_1(k,l)=\delta_1\left(\frac{13}{106},\frac{75}{106}\right)=1\frac{35}{146},$$

где

$$\left(\frac{13}{106},\frac{75}{106}\right)=ABA^2BA^2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{P}_1$ – множество всех экспоненциальных пар (k,l), тогда*

$$\inf_{(k,l)\in\mathcal{P}_1}\theta_1(k,l)=\theta_1\left(\frac{13}{106},\frac{75}{106}\right)=\frac{35}{432}=\frac{1}{12}-\frac{1}{432}.$$

Отметим, что этот результат является уточнением теоремы 1 при $j=1$. Доказательство теорем 2 и 3 проводится методом оценки специальных тригонометрических сумм Вандер Корпута и методом оптимизации экспоненциальных пар [11] в сочетании с методами работ [7, 10, 12, 13].

2. Известные леммы

Лемма 1. *При $t\geq 2\pi$ для функции $\theta(t)$, справедлива формула*

$$\theta(t)=t\ln\sqrt{\frac{t}{2\pi}}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}+\Delta(t),$$

где

$$\Delta(t)=\frac{t}{4}\ln\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2t}-\frac{t}{2}\int\limits_0^\infty\frac{\rho(u)du}{\left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{t^2}{4}}, \quad \rho(u)=\frac{1}{2}-\{u\}.$$

Лемма 2. *(Приближенное функциональное уравнение j — й производной функции Харди)* [14]. *При любом целом числе $j \geq 0$ и $t \geq 2\pi$ справедливы следующие равенства*

$$Z^{(j)}(t) = 2\sum_{n\leq\sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{(\theta'(t)-\ln n)^j}{\sqrt{n}}\cos(\theta(t) - t\ln n + \frac{\pi j}{2}) + O(t^{-\frac{1}{4}}\ln^{j+1} t),$$

$$(\theta'(t)-\ln n)^j = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \ln n\right)^j + O\left(\frac{\ln T}{t}\right),$$

причем постоянная в знаке O зависит только от j.

Лемма 3. *(О замене тригонометрических сумм более короткой)* [15]. *Пусть вещественные функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют на отрезке $[a,b]$ следующим условиям:*

1) $f^{(4)}(x)$ и $\varphi''(x)$ непрерывны;

2) существуют числа H, U, A, $0<H$, $1 \ll A \ll U$, $0 < b-a \leq U$, такие, что

$$f''(x) \asymp A^{-1}, \quad f^{(3)}(x) \ll A^{-1}U^{-1}, \quad f^{(4)}(x) \ll A^{-1}U^{-2},$$

$$\varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \quad \varphi''(x) \ll HU^{-2}.$$

Тогда, определяя числа x_n из уравнения $f'(x_n) = n$, будем иметь

$$\sum_{a<x\leq b}\varphi(x)e(f(x)) = \sum_{f'(a)\leq n\leq f'(b)} c(n)Z(n) + R,$$

где

$$R = O\left(H(A(b-a)^{-1} + T_a + T_b + \ln(f'(b)-f'(a)+2))\right),$$

$$T_\mu = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если} } f'(\mu)\text{\textit{–целое число,}} \\ \min\left(\|f'(\mu)\|^{-1}, \sqrt{A}\right), & \text{\textit{если} } \|f'(\mu)\| \neq 0; \end{cases}$$

$$c(n) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если}} \quad f'(a) < n < f'(b), \\ 1/2, & \text{\textit{если}} \quad n = f'(a) \quad \text{\textit{или}} \quad n = f'(b), \end{cases}$$

$$Z(n) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{\varphi(x_n)}{\sqrt{f''(x_n)}} exp(2\pi i(f(x_n) - nx_n)).$$

Лемма 4. [14]. *Пусть $f(x)$ комплекснозначная непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$, c_n-произвольные комплексные числа, тогда*

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = -\int_a^b C(x)f'(x)dx + C(b)f(b),$$

где

$$C(x) = \sum_{a<n\leq x} c_n.$$

Определение 1. *Если* $B \geq 1$, $0 < h \leq B$, $F(u) \in C^{\infty}(B, 2B)$, $A \geq 1$,

$$AB^{1-r} \ll |F^{(r)}(u)| \ll AB^{1-r}, \; r = 1, 2, 3, \dots,$$

где постоянные под знаком $\ll$ *зависят только от* r, *и имеет место оценка*

$$\sum_{B \leq n \leq B+h} e(F(n)) \ll A^k B^l, \quad 0 \leq k \leq 0,5 \quad 0,5 \leq l \leq 1,$$

то пара (k, l) *называется экспоненциальной парой.*

Тривиальная оценка показывает, что (0,1) является экспоненциальной парой. E. Phillips [11] показал, что если (k, l) экспоненциальная пара, то

$$\mathcal{A}(k,l) = \left(\frac{k}{2k+2}, \; \frac{1}{2} + \frac{l}{2k+2}\right) \qquad (\mathcal{A} - \text{процесс}),$$

$$\mathcal{B}(k,l) = \left(l - \frac{1}{2}, \; k + \frac{1}{2}\right) \qquad (\mathcal{B} - \text{ процесс})$$

также являются экспоненциальными парами.

Множество всех экспоненциальных пар получавшиеся из $(0, 1)$ при помощи $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — процессов обозначается символом $\mathcal{P}$. Пусть

$$\theta(k,l) = \frac{ak + bl + c}{dk + el + f}, \tag{2}$$

и числа u, v, w определяются следующим образом:

$$u = bf - ce, \quad v = af - cd, \quad w = ae - bd. \tag{3}$$

Нахождения нижнего грана функции $\inf \theta(k,l)$ по множеству $\mathcal{P}$ проводится методом оптимизации экспоненциальных пар [11], состоящих из следующих трёх лемм 5, 6, 7.

Лемма 5. [11]. *Пусть* $\theta(k,l)$ *определяется формулой (2) и* $dk + el + f > 0$. *Пусть* u, v, w *определяется формулой (3),* r *произвольное действительное число такое что*

$$r \leqslant \inf_{\mathcal{P}}(k + l).$$

Пусть

$$Y = \max(wr + v - u, \; w + v - u),$$
$$Z = \min(wr + v - u, \; w + v - u).$$

Тогда если $Z \geqslant 0$, *то* $\inf \theta = \inf \theta\mathcal{A}$, *если же* $Y \leqslant 0$, *то* $\inf \theta = \inf \theta\mathcal{BA}$.

Эта лемма не даёт ответа в случае $Y > 0$ и $Z < 0$. На такой случай нам частично даст ответ лемма 6.

Лемма 6. [11]. *Пусть* $\theta(k,l)$ *и* r *определяется как лемма 5. Пусть* $\mathcal{C}$ *являются некоторые произведение состоявшихся из конечного количество* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *процессов, такое что*

$$\inf \theta\mathcal{BA} = \inf \theta\mathcal{BAC}.$$

Пусть далее

$$\sup\{k + l : \; (k,l) \in \mathcal{CAP}\} = r_1.$$

Если $\min(rw + v - u, r_1 w + v - u) \geqslant 0$, *тогда* $\inf \theta_1 = \inf \theta_1 A$.

Лемма 7. [11]. *Пусть* θ, u, v, w *такие, как в лемме 5. Тогда следующие условия эквивалентны:*

a. $\inf \theta = \inf \theta\mathcal{A}^q \; \forall q \geqslant 0$;

b. $\inf \theta = \theta(0, 1)$;

c. $w + v \geqslant u$, $u \leqslant 0$.

3. Оценка специальная тригонометрическая сумма

Лемма 8. *Пусть (k,l)– произвольная экспоненциальная пара и*

$$t \geq t_0 > 0, \quad \sqrt{P_1} \leq M \leq \frac{P_1}{10}, \quad M_1 \leq 2M, \quad P_1 = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right].$$

Тогда для тригонометрической суммы

$$C(u,M) = \sum_{M<m\leq M_1} e\left(\frac{t\ln(P_1-m)}{2\pi}\right),$$

справедлива следующая оценка

$$|C(u,M)| \ll P_1^{\frac{1}{2}-l} M^{-\frac{1}{2}+k+2l}.$$

Доказательство. Из определение P_1 следует, что

$$t = 2\pi(P_1+\theta)^2, \quad 0 \leq \theta < 1. \tag{4}$$

Применяя формулу Тейлора и пользуясь (4), имеем

$$t\ln(P_1-m) = t\ln P_1 - 2\pi P_1 m - \frac{2\pi(2P_1\theta+\theta^2)m}{P_1} - \pi m^2 - \\ - \frac{2\pi(2P_1\theta+\theta^2)m^2}{2P_1^2} - t\left(\frac{m^3}{3P_1^3} + \frac{m^4}{4P_1^4} + \dots\right).$$

Разбивая суммирование в $C(u,M)$ по четным и нечетным m, приходим к неравенству

$$|C(u,M)| \leq |V_1| + |V_2|,$$

где

$$V_1 = \sum_{0,5M<m\leq 0,5M_1} e(f(m)), \quad V_2 = \sum_{0,5(M-1)<m\leq 0,5(M_1-1)} e(g(m)),$$

причем

$$f(m) = \alpha_1(2m) + \alpha_2(2m)^2 + t_1\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(2m)^k}{kP_1^k},$$

$$g(m) = \alpha_1(2m+1) + \alpha_2(2m+1)^2 + t_1\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(2m+1)^k}{kP_1^k},$$

$$\alpha_1 = (2\theta P_1+\theta^2)P_1^{-1}, \quad \alpha_2 = (2\theta P_1+\theta^2)P_1^{-2}, \quad t_1 = \frac{t}{2\pi}.$$

Суммы V_1 и V_2 оценивается одинаковым образом. Оценим например V_1. Для этого преобразуем V_1, пользуясь леммой о замене тригонометрической суммы более короткой (лемма 3). Положим в этой лемме

$$\varphi(x) = 1, \quad H = 1, \quad U = M, \quad a = 0,5M, \quad b = 0,5M_1.$$

Из уравнения $f'(x_n) = n$ находим x_n:

$$x_n = \frac{1}{8}\left(\sqrt{n^2+8P_1(2\alpha_1-n)} - n\right).$$

Обозначим n_1, n_2, $\Phi(n)$ соответствующие величины

$$n_1 = f'(0,5M), \quad n_2 = f'(0,5M_1), \quad \Phi(n) = \sqrt{|f''(x_n)|}.$$

Легко видеть, что $1 \ll M^2 P_1^{-1} \ll n_1 < n_2 \ll M_2 P_1^{-1}$. Применяя лемму 3, находим

$$|V_1| \ll \left| \sum_{n_1 < n < n_2} \Phi^{-1}(n) e(f(x_n) - n x_n) \right| + \sqrt{P_1 M^{-1}}.$$

К сумме по n применим частное суммирование (лемма 4) и пользуясь монотонностью $\Phi(n)$, найдем

$$|V_1| \ll \sqrt{P_1 M^{-1}} \left| \sum_{n_1 < n < n_2} e(f(x_n) - n x_n) \right| + \sqrt{P_1 M^{-1}}.$$

Последнюю сумму оценим, применяя метод экспоненциальных пар

$$F(n) = f(x_n) - n x_n, \quad F'(x_n) = f'(x_n) \cdot x_n' - x_n - n x_n' = -x_n.$$

$$x_n = \frac{1}{8} \left(\sqrt{n^2 + 8P_1(2\alpha_1 - n)} - n \right), \quad |x_n| \ll \sqrt{P_1 n} \ll \sqrt{P_1 \cdot \frac{M^2}{P_1}} = M,$$

$$A = M,\ B = \frac{M^2}{P_1}. \quad |V_1| \ll \sqrt{P_1 M^{-1}} \cdot A^k B^l = P_1^{\frac{1}{2} - k} M^{-\frac{1}{2} + k + 2l}.$$

Таким образом получим оценку

$$|C(u, M)| \ll P_1^{\frac{1}{2} - l} M^{-\frac{1}{2} + k + 2l}.$$

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Пусть $T \le t \le T + H$, $H \le T^{\frac{1}{6}}$, j–четное число, тогда приближенное функциональное уравнение для $Z^{(j)}(t)$ (лемма 2) принимает вид

$$Z^{(j)}(t) = (-1)^{\frac{j}{2}} \cdot 2 \sum_{n \le \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{(\theta'(t) - \ln n)^j}{\sqrt{n}} \cos(\theta(t) - t \ln n) + O(t^{-\frac{1}{4}} \ln^{j+1} t).$$

Граница изменения в сумме зависит от t. Освободимся от такой зависимости путем замены величины $\sqrt{\frac{t}{2\pi}}$, величиной $P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}$. От такой замены правая часть изменится на величину порядка не выше $T^{-\frac{1}{4}} \ln^j T$. Действительно, пользуясь леммой 2, найдем

$$\left| (\theta'(t) - \ln n)^j \right| \ll \left| \left(\ln \sqrt{\frac{T+H}{2\pi}} - \ln \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \right)^j + \frac{\ln T}{T} \right| \ll$$

$$\ll \left(\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{H}{T} \right) \right)^j + \frac{\ln T}{T} \ll \left(\frac{H}{T} \right)^j,$$

поэтому

$$\left| \sum_{\sqrt{\frac{T}{2\pi}} < n \le \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{(\theta'(t) - \ln n)^j}{\sqrt{n}} \right| \ll T^{-\frac{1}{4}} \left(\sqrt{\frac{T+H}{2\pi}} - \sqrt{\frac{T}{2\pi}} + 1 \right) \cdot \left(\frac{H}{T} \right)^j \ll T^{-\frac{1}{4}} \ln^j T.$$

Пользуясь асимптотическим поведением $\Delta(t)$, $\Delta'(t)$, $\theta(t)$, $\theta'(t)$ можно показать, что(см. [14])

$$Z^j(t) = (-1)^{\frac{j}{2}} 2 \sum_{n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^j \frac{P}{n} \cos\left(t \ln P - \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8} - t \ln n\right) + O(T^{-\frac{1}{4}} \ln^{j+1} T).$$

Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\frac{T}{2} + \frac{\pi}{8} = 2\pi K$, K–целое число. Поэтому приходим к формуле

$$Z^j(t) = (-1)^{\frac{j}{2}} 2 \sum_{n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^j \frac{P}{n} \cos\left(t \ln \frac{P}{n}\right) + O(T^{-\frac{1}{4}} \ln^{j+1} T), \quad P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}.$$

Проводя аналогичные рассуждения при нечетном j и предполагая, опять не ограничивая общности, что $\frac{T}{2} + \frac{\pi}{8} = 2\pi K + \frac{\pi}{2}$, приходим к формуле

$$Z^j(t) = (-1)^{\frac{j+1}{2}} 2 \sum_{n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^j \frac{P}{n} \cos\left(t \ln \frac{P}{n}\right) + O(T^{-\frac{1}{4}} \ln^{j+1} T).$$

Таким образом, в обоих случаях, то есть как при чётном, так и при нечётном j можно рассматривать функцию

$$\Phi(t) = \Phi_j(t) = \sum_{n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^j \frac{P}{n} \cos\left(t \ln \frac{P}{n}\right) + O(T^{-\frac{1}{4}} \ln^{j+1} T)$$

и доказывать существование у нее нечётного нуля на промежутке $(T, T+H)$. Повторяем рассуждения работы [9]. Определим числа t_ν из уравнения $t_\nu \ln P = \pi\nu$ и будем рассматривать ν такие , что выполнялись неравенства

$$T \le \frac{\pi\nu}{\ln P} < T + H.$$

Для этого возьмем

$$\nu_0 = \left[\frac{T \ln P}{\pi}\right] + 1, \quad r = [\ln T], \quad H_1 = \left[\frac{H \ln P}{\pi r}\right],$$

и определим числа ν равенством

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 + ... + \nu_r, \quad 0 \le \nu_1, ..., \nu_r \le H_1 - 1,$$

в котором ν_0 – постоянное число, а числа $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_r$ могут принимать значение любых целых чисел из промежутка $[0, H_1]$.

Рассмотрим две суммы S_1 и S_2.

$$S_1 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1} ... \sum_{\nu_r=0}^{H_1-1} \Phi(t_\nu), \quad S_2 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1} ... \sum_{\nu_r=0}^{H_1-1} (-1)^\nu \Phi(t_\nu),$$

и будем доказывать неравенство $|S_2| > |S_1|$.

В силу определение t_ν имеем

$$S_1 = \sum_{\nu_1=0}^{H_1-1} ... \sum_{\nu_r=0}^{H_1-1} \sum_{n \le P} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^j \frac{P}{n} \cos\left(\frac{\pi\nu}{\ln P} \ln \frac{P}{n}\right) + O(H_1^r T^{-\frac{1}{4}} \ln^{j+1} T),$$

$$S_2=\sum_{\nu_1=0}^{H_1-1}\ldots\sum_{\nu_r=0}^{H_1-1}\sum_{n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln^j\frac{P}{n}\cos\left(\frac{\pi\nu}{\ln P}\ln n\right)+O(H_1^rT^{-\frac14}\ln^{j+1}T).$$

Оценим снизу $|S_2|$. Для этого выделим в сумме, которой задается S_2, слагаемое с $n=1$, оно будет равно числу $H_1^r(\ln P)^j$. Оставшуюся часть суммы S_2 оценим сверху величиной R, подобно тому как это было сделано в работе [9].

$$R\le\sum_{2\le n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{\nu=0}^{H_1-1}e\left(\frac{\nu\ln n}{2\ln P}\right)\right|^r(\ln P)^j\le$$
$$\le\sum_{2\le n\le P}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\ln n}{2\ln P}\right)^{-r}(\ln P)^j<T^{\frac14}(4\ln P)^r(\ln P)^j,$$

то есть для $|S_2|$ получаем следующую оценку

$$S_2=H_1^r\ln^jP\left[1+O(T^{\frac14}(4H_1^{-1}\ln P)^r)+O(T^{-\frac14}\ln T)\right].$$

Оценим сверху $|S_1|$. Интервал суммирования по n в сумме $|S_1|$ разобьем на два интервала вида

$$1\le n\le(1-\Delta)P\quad\text{и}\quad(1-\Delta)P<n\le P,\quad\text{где}\quad\Delta=8H_1^{-1}\ln P.$$

Соответственно этому разбиению, S_1 представится суммою двух слагаемых:

$$S_1=S_3+S_4.$$

Сумма S_3 оценивается так:

$$|S_3|\ll4^{-r}H_1^rT^{\frac14}\ln^jT\ll H_1^rT^{-\frac14}\ln^{j+1}T.$$

Для суммы S_4 получаем такое неравенство

$$|S_4|\ll H_1^r\left|\sum_{P_1(1-\Delta)<n\le P_1}n^{-\frac12}\ln^j\frac{P}{n}e\left(\frac{t\ln n}{2\pi}\right)\right|+H_1^rT^{-\frac14}\ln^{j+1}T,$$

где

$$P_1=[P],\quad\Delta=8H_1^{-1}\ln P.$$

Сумму по n обозначим через S_5 и пологая $n=P_1-m$ найдем

$$S_5=\sum_{0\le m<\Delta P_1}\frac{\ln^j\frac{P}{P_1-m}}{\sqrt{P_1-m}}e\left(\frac{t\ln(P_1-m)}{2\pi}\right).$$

Промежуток суммирование по m разобьем на $\ll\ln T$ промежутков вида

$$M<m\le M_1\le2M<\Delta P_1;$$

найдем

$$|S_5|\ll\left|\sum_{M<m\le M_1}(P_1-m)^{-\frac12}\ln^j\frac{P}{P_1-m}e\left(\frac{t\ln(P_1-m)}{2\pi}\right)\right|\ln T.$$

Применяя частное суммирование, получим

$$|S_5|\ll M^jP^{-j-\frac12}\left|\sum_{M<m\le M_1}e\left(\frac{t\ln(P_1-m))}{2\pi}\right)\right|\ln T.$$

Сумму по m обозначим через $C(u,M)$. Если $M \le \sqrt[3]{P}$ то сумму $C(u,M)$ оценим тривиально, числом слагаемых:

$$|S_5| \ll M^{j+1}P^{-j-\frac{1}{2}} \cdot \ln T \ll P^{\frac{j+1}{3}} \cdot P^{-j-\frac{1}{2}} \ln T \ll P^{-\frac{1}{6}} \ln T \ll T^{-\frac{1}{12}} \ln^j T.$$

Если $\sqrt[3]{P} < M \le \Delta P_1$, то для оценки суммы $C(u,M)$ воспользуемся методом экспоненциальных пар. Находим

$$|S_5| \ll M^{j+k+2l-\frac{1}{2}}P^{-j-l} \ln T \ll P^{k+l-\frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2}-j-k-2l} (\ln T)^{j+k+2l+\frac{1}{2}}$$
$$\ll T^{\frac{k+l}{2}-\frac{1}{4}} H^{\frac{1}{2}-j-k-2l} (\ln T)^{j+3}.$$

Следовательно, для S_1 получим окончательную оценку:

$$S_1 \ll H_1^r \ln^j P \left(T^{-\frac{1}{12}} + T^{\frac{k+l}{2}-\frac{1}{4}} H^{\frac{1}{2}-j-k-2l} \ln^2 T \right).$$

Сравнивая эту оценку для S_1 с ранее найденной асимптотической формулой для S_2, видим, что для выполнения неравенства $|S_2| > |S_1|$ достаточно, чтобы выполнялись следующее неравенства:

$$T^{-\frac{1}{12}} \ll 1; \qquad T^{\frac{k+l}{2}-\frac{1}{4}} H^{\frac{1}{2}-j-k-2l} \ln^2 T \ll 1, \qquad T^{\frac{1}{4}} (4H_1^{-1} \ln P)^r \ll 1.$$

Первое неравенство выполняется при $T \gg 1$. Второе и третье неравенства выполняются соответственно, если

$$H \gg T^{\theta_j(k;l)} (\ln T)^{\frac{2}{j+1}}, \qquad \theta_j(k;l) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2 - \delta_j^{-1}(k;l)} \right),$$

$$\delta_j(k;l) = \frac{l+j}{0,5-k+j}, \quad H_1 \ge 4T^{\frac{1}{4r}} \ln P \gg \ln P.$$

Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 3

Для доказательства теоремы 3 применяем алгоритм определения оптимальных экспоненциальных пар [8], который состоит из следующих шагов:

1. Проверяем для $\theta = \dfrac{ak+bl+c}{dk+el+f}$, условие $dk+el+f > 0$.

2. Вычисляем $\xi(\theta)$.

3. Применяя лемму 7 к θ, проверяем, выполняется ли условие $\inf\theta = \theta(0,1)$. Если это выполняется, процесс закончен. В противном случае, переходим к следующему шагу.

4. Используя лемму 7 к θB, проверяем, выполняется ли условие $\inf\theta = \theta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. При выполнении процесс закончен. Если иначе, продолжаем.

5. Используем лемму 5 для проверки равенства $\inf\theta = \inf\theta A$, либо $\inf\theta = \inf\theta BA$. Если лемма 5 неприменима, применяем лемму 6. Если и лемма 6 неприменима, то завершаем алгоритм, ибо он в этом случае не работает.

6. Если $\inf\theta = \inf\theta A$, заменяем $\xi(\theta)$ на $\xi(\theta A)$.

   Если $\inf\theta = \inf\theta BA$, заменяем $\xi(\theta)$ на $\xi(\theta BA)$.

   В противном случае возвращаемся к шагу 5.

Применяем этот алгоритм для

$$\delta_j(k;l)=\frac{l+j}{0,5-k+j},$$

при $j=1$, то есть

$$\delta_1(k,l)=\frac{l+1}{-k+1,5}.$$

После некоторого количества итераций получим, что

$$\delta_1ABA^2BA^2=\frac{139k+25l+99}{112k+20l+80}.$$

Применим лемму 5, так как $Y>0$ и $Z<0$ то в этом случае используем лемму 6. Согласно утверждению леммы, $\sup\{k+l:\ (k,l)\in CA\mathcal{P}\}=r_1$. Проверяем условие

$$\min(rw+v-u,r_1w+v-u)\geqslant 0.$$

Оказывается, что

$$\min(rw+v-u,r_1w+v-u)=-20r_1+12<0,$$

то есть условие леммы 6 не выполняется. Значит, согласно алгоритму минимизации, процесс завершен. Тогда

$$\inf_{(k,l)\in\mathcal{P}_1}\delta_1(k;l)=\delta_1\left(\frac{13}{106},\frac{75}{106}\right)=1\frac{35}{146}=1,239726\ldots,$$

где

$$\left(\frac{13}{106},\frac{75}{106}\right)=ABA^2BA^2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Теорема доказана.

6. Заключение

Работа посвящена сведению задачи о величине промежутка $(T,T+H)$ критической прямой, в которой содержится нуль нечётного порядка функции Харди и её производной, к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм.

Найдена нижняя грань длины промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечётного порядка производной первого порядка функции Харди.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G.H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt.Rend. Acad.Sci. 1914. v.158. pp. 1012 – 1014.

2. Hardy G.H., Littlewood J.E. The zeros of Riemann's zeta–function on the critical line // Math.Z. 1921. v. 10. pp. 283 – 317.

3. Мозер Я. Об одной сумме в теории дзета-функции Римана // Acta arith. 1976. 31. pp. 31 – 43.

4. Карацуба А.А. О расстоянии между соседними нулями дзета–функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН. 1981. Т. 157. С. 49 – 63.

5. Карацуба А.А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем., 48:3 1984. С. 569–584.

6. Карацуба А.А. Распределение нулей функции $\zeta(1/2+it)$ // Изв. АН СССР. Сер. матем., 48:6 1984. С. 1214–1224.

7. Карацуба А.А. Плотностная теорема и поведение аргумента дзета-функции Римана // Матем. заметки, 60:3 1996. С.448–449.

8. Карацуба А.А. Zeros of the Riemann zeta function // Докл. АН СССР, 276:3 1984. С. 535–539.

9. Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2006. Т. 49. № 5. С. 393 – 400.

10. Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2009. Т. 52. № 5. С. 331 – 337.

11. Graham S.W., Kolesnik G. Vander Corput's Method of Exponential sums. Cambridge university press. 1991. Cambridge. New York. Port Chester. Melbourne. Sydney.

12. Рахмонов З.Х. Оценка плотности нулей дзета-функции Римана // Успехи математических наук. 1994. Т. 49. № 2. С. 161 – 162.

13. Рахмонов З.Х. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой // Чебышёвский сборник. 2006. Т. 7. В. 1. С. 263 – 279.

14. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета–функция Римана. М.: Физматлит. 1994. 376 с.

15. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. Наука, М., 1975, 183 с.

REFERENCES

1. Hardy, G. H. 1914, "Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", *Compt.Rend. Acad.Sci.,* vol. 158, pp. 1012 – 1014.

2. Hardy, G.H. & Littlewood, J.E. 1921, "The zeros of Riemann's zeta–function on the critical line", *Math.Z.,* vol. 10, pp. 283 – 317.

3. Moser, J. 1976, "On a certain sum in the theory of the Riemann zeta-function", *Acta Arith.,* pp. 31 – 43. (Russian).

4. Karatsuba, A. A. 1983, "On the distance between consecutive zeros of the Riemann zeta function that lie on the critical line", *Proc. Steklov Inst. Math.,* vol. 157, pp. 51 — 66.

5. Karatsuba, A. A. 1984, "Zeros of the function $\zeta(s)$ on short intervals of the critical line", *Izv. Akad. Nauk SSSR ,* Ser. Mat. 48, no. 3, pp. 523 – 537.

6. Karatsuba, A. A. 1984, "Distribution of zeros of the function $\zeta(\frac{1}{2}+it)$", *Izv. Akad. Nauk SSSR* Ser. Mat. 48, no. 6, pp. 1214–1224.

7. Karatsuba, A. A. 1996, "A density theorem and the behavior of the argument of the Riemann zeta function", *Mat. Zametki,* 60, no. 3, pp. 448–449.

8. Karatsuba, A. A. 1984, "Zeros of the Riemann zeta function", (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 276, no. 3, pp. 535–539.

9. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A. 2006, "Distance between the next zeros of Riemann's zeta-function in the critical line", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 49, no. 5, pp. 393 – 400.

10. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A. 2009, "The neibour zero of the Riemann's zeta-function laying on a critical line", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 52, no. 5, pp. 331 – 337.

11. Graham, S. W. & Kolesnik, G. 1991, "Van Der Corput's Method of Exponential Sums", *Cambridge University Press.* Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney, 119 p.

12. Rakhmonov, Z. Kh. 1994, "Estimate of the density of the zeros of the Riemann zeta function", *Russian Mathematical Surveys,* vol. 49, no. 2, pp. 161 – 162. doi: 10.1070/RM1994v049n02ABEH002225.

13. Rakhmonov, Z. Kh. 2006, "The zeros of the Riemann zeta function on short intervals of the critical line", *Chebyshevskiy Sbornik,* vol. 7, no. 1, pp. 263 – 279.

14. Voronin, S.M. & Karatsuba, A.A. 1994, "The Riemann zeta function", 376 p.

15. Karatsuba, A. A. "Osnovy analiticheskoi teorii chisel". (Russian) Izdat. "Nauka", Moscow, 1975. 183 pp.

Получено 15.11.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.