

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-339-356

Приближение $\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ¹

В. Х. Салихов, Е. С. Золотухина

Салихов Владислав Хасанович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики, Брянский государственный технический университет (г. Брянск).

e-mail: svdh@rambler.ru

Золотухина Екатерина Сергеевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Брянский государственный технический университет (г. Брянск).

eszolotukhina@mail.ru

Аннотация

В данной работе продолжено исследование интегральной конструкции, впервые рассмотренной В. Х. Салиховым и В. А. Андросенко в 2015 г. в работе [1]. Эта конструкция является модификацией интеграла, введенного Р. Марковеккио в 2009 г. в [2] для нахождения новой оценки меры иррациональности числа $\ln 2$.

С помощью нее В. А. Андросенко в [1] была усилена оценка меры иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Отметим, что прежние результаты принадлежали Л. В. Данилову [3], К. Алади и М. Л. Робинсон [4], Г. В. Чудновскому [5], А. К. Дубицкому [6], М. Хата [7], [8], Дж. Рину [9].

Другое направление исследования этой интегральной конструкции — получение оценок приближения некоторых констант числами из квадратичных полей. В 2016 г. М. Ю. Лучин и В. Х. Салихов в [10] улучшили оценку приближения числа $\ln 2$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Прежние оценки были найдены в работах Ф. Аморозо и К. Виолы [11] и Е. С. Золотухиной [12].

Цель работы — получить новую оценку приближения логарифма "золотого сечения" числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Предыдущая оценка принадлежит В. Х. Салихову и Е. С. Золотухиной [13].

Ключевые слова: показатель иррациональности, квадратичные иррациональности, симметризованные интегралы.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:

В. Х. Салихов, Е. С. Золотухина. Приближение $\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 339–356.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00296 А

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-339-356

Approximation of $\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ by numbers of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})^2$

V. H. Salikhov, E. S. Zolotukhina

Salikhov Vladislav Khasanovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Docent, Professor of department “Higher mathematics”, Bryansk State technical university (Bryansk).

e-mail: svdh@rambler.ru

Zolotukhina Ekaterina Sergeevna — candidate of Physico-mathematical Sciences, docent of department “Higher mathematics”, Bryansk State technical university (Bryansk).

e-mail: eszolotukhina@mail.ru

Abstract

The article continues the study of the integral construction, which was first considered by V. H. Salikhov and V. A. Androsenko in 2015 [1]. This construction is a modification of the integral that was introduced by R. Marcovecchio in 2009 to find the irrationality measure of $\ln 2$.

With the help it V. A. Androsenko improved the estimate of irrationality measure of $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ in [1]. The previous results belonged to the L.V. Danilov [3], K. Aladi and M. Robinson [4], G. V. Chudnovsky [5], A. K. Dubickas [6], M. Hata [7], [8], G. Rhin [9].

Another direction of the study of this integral construction is to obtain estimates of the approximation of some constants by numbers from quadratic fields. In 2016 M.Y. Luchin and V. H. Salikhov improved the estimate of the approximation of $\ln 2$ by the numbers of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Previous estimates were found by F. Amoroso F. and C. Viola [11] and E. S. Zolotukhina [12].

The aim of this article is to obtain a new estimate of the approximation of logarithm of "Golden section" by the number of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Previous estimates were found by V. H. Salikhov and E. S. Zolotukhina [13].

Keywords: Irrationality measure, quadratic irrationalities, symmetrized integrals.

Bibliography: 19 titles.

For citation:

V. H. Salikhov, E. S. Zolotukhina, 2019, "Approximation of $\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ by numbers of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 339–356.

1. Введение

В работе будет получена следующая оценка.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mu > 9.627339\dots$, числа $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{Z}$, $(p_3, p_4) \neq (0, 0)$, $P = \max_{1 \leq i \leq 4} |p_i|$, $P > P_0(\mu)$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{p_1\sqrt{5}+p_2}{p_3\sqrt{5}+p_4} \right| > P^{-\mu}.$$

²The work was carried out with the financial support of the RFBR, grant № 18-01-00296 A

Предыдущий результат $\mu > 10.0204 \dots$ был найден В. Х. Салиховым и Е. С. Золотухиной в [13].

При $p_1 = 0, p_3 = 0$ теорема 1 дает оценку для показателя иррациональности логарифма "золотого сечения":

$$\mu \left(\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) \leq 9.627339 \dots$$

Наиболее близкий результат $\mu \left(\sqrt{5} \ln \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \leq 3.71331 \dots$ найден М. Г. Башмаковой в [14]. Предыдущие аналогичные оценки принадлежат А. К. Дубицкому [15], М. Хата [16], К. Ваананену, А. Хеймонену и Т. Матала-ахо [17], Е. С. Золотухиной [18].

Ключевое значение при доказательстве теоремы 1 играет следующая лемма, доказанная в работе М. Ю. Лучина и В. Х. Салихова [10], где была получена новая оценка приближения числа $\ln 2$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

ЛЕММА 1. Пусть $n, d \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}, \sqrt{d} \notin \mathbb{N}$,

$$L_n = \left(\Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n) \right) \theta + \Lambda_3(n)\sqrt{d} + \Lambda_4(n),$$

где все $\Lambda_i \in \mathbb{Z}; \Lambda(n) = \max_{1 \leq i \leq 4} |\Lambda_i(n)|$. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln \left| \Lambda_1(n)\sqrt{d} + \Lambda_2(n) \right| \right) = \gamma_1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda(n)| \leq \gamma_2;$$

для некоторой константы $\gamma_3 > \gamma_2$ и любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, что для любого $n \geq N$ и хотя бы одного из значений $m \in \{n, n+1\}$ выполняются неравенства

$$e^{-(\gamma_3+\varepsilon_1)m} \leq |L_m| \leq e^{-(\gamma_3-\varepsilon_2)m}.$$

Пусть далее $\gamma_1 + \gamma_2 > 0, \mu > 2(\gamma_1 + \gamma_3)/(\gamma_3 - \gamma_2); p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{Z}, (p_3, p_4) \neq (0, 0), P = \max_{1 \leq i \leq 4} |p_i|, P > P_0(\mu)$. Тогда

$$\left| \theta - \frac{p_1\sqrt{d} + p_2}{p_3\sqrt{d} + p_4} \right| > P^{-\mu}.$$

Дальнейшие рассуждения в целом подобны доказательству результата работы [10], поэтому рассмотрим подробно лишь некоторые моменты.

2. Интегральная конструкция. Арифметическая часть

Будем работать с интегралом, впервые рассмотренным в работе [1], и отличающимся от интеграла, введенного Р. Марковекки в работе [2] лишь множителем $\sqrt{s/(s-1)}$ в знаменателе подынтегральной функции.

Пусть $h, j, k, l, m, q \in \mathbb{Z}^+, h+j+q = k+l+m, h+j-k \geq 0, k+l-j \geq 0, k+m-h \geq 0; x \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} x > 0, x \neq 1$. Рассмотрим интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \int_{-\infty}^{i\infty} \frac{s^h t^j dt}{\sqrt{s/(s-1)}(1-s)^{k+l-j+1}(s-t)^{h+j-k+1}(t-x)^{k+m-h+1}}. \quad (1)$$

Результат теоремы 1 получается при

$$x = \frac{\sqrt{5}+2}{4}, \quad (2)$$

$$h = 7n, j = 38n, k = 25n, l = 32n, m = 38n, q = 50n, n \in \mathbb{N}, n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Приведем краткую схему некоторых преобразований этого интеграла (см. [1, с.484, 485]). Подынтегральную функцию интеграла (1) обозначим через $G(s, t)$. Тогда

$$J = - \int_0^{-\infty} \operatorname{res}_{t=x} G(s, t) ds. \quad (4)$$

$$\operatorname{res}_{t=x} G(s, t) ds \equiv R(z) dz, \quad s = \frac{z^2}{z^2 - 1}, \quad (5)$$

где

$$R(z) = 2(-1)^{j-k} \sum_{l_1=\max(0, q-l)}^{k+m-h} (-1)^{l_1} \binom{j}{k+m-h-l_1} \frac{x^{l-q+l_1}}{(x-1)^{h+j-k+l_1+1}} \times \binom{h+j-k+l_1}{l_1} R_{l_1}(z), \quad (6)$$

$$R_{l_1}(z) = \frac{z^{2h}(1-z^2)^{l+l_1}}{(x/(x-1)-z^2)^{h+j-k+l_1+1}} = \frac{z^{2h}(1-z^2)^{l+l_1}}{((\sqrt{5}+2)^2-z^2)^{h+j-k+l_1+1}}. \quad (7)$$

Выбирая для $s \in [0, -\infty)$ значение $z \in [0, 1)$, получаем из (4) и (5)

$$J = - \int_0^1 R(z) dz. \quad (8)$$

Обозначим

$$w(l_1) = \binom{h+j-k+l_1}{l_1} \int_0^1 R_{l_1}(z) dz, \quad (9)$$

K – кольцо чисел вида $a + b\sqrt{5}$, где $a, b \in \mathbb{Z}$; для натуральных чисел $M \in \mathbb{N}$ будем писать $q_M = \text{НОК}(1, 2, \dots, M)$, $q_0 = 1$.

ЛЕММА 2. Пусть $M_0 = \max(2k+2l-2j, h+j-k, k+m-h)$, $m \geq q$. Тогда для всех $l_1 \leq k+m-h$ справедливо представление

$$2q_{M_0} w(l_1) = 2^{-2(m-q)-2} \left(a(l_1) \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} + b(l_1) \right), \quad (10)$$

где все $a(l_1), b(l_1) \in K$.

Доказательство. Обозначим для $N \in \mathbb{Z}^+$

$$D_N(f(z)) = \frac{1}{N!} f^{(N)}(2 + \sqrt{5})$$

Для подынтегральной функции (7) интеграла в (9) ввиду ее четности имеем следующее разложение в сумму простейших дробей:

$$\begin{aligned} R_{l_1}(z) &= \frac{(-1)^{q-m-1} z^{2h} (z^2 - 1)^{l+l_1}}{(z^2 - (2 + \sqrt{5})^2)^{h+j-k+l_1+1}} \\ &= P(z) + \sum_{\nu=1}^{h+j-k+l_1+1} \left(\frac{(-1)^\nu k_\nu}{(z-2-\sqrt{5})^\nu} + \frac{k_\nu}{(z+2+\sqrt{5})^\nu} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $P(z) \in \mathbb{K}[z]$, $\deg P(z) = 2k + 2l - 2j - 2$, а кроме того,

$$(-1)^\nu k_\nu = D_{h+j-k+l_1+1-\nu}(R_{l_1}(z)(z-2-\sqrt{5})^{h+j-k+l_1+1}).$$

По формуле Лейбница имеем из (11)

$$\begin{aligned} 2k_\nu &= (-1)^{q-m+\nu-1} D_{h+j-k+l_1+1-\nu} \left(\frac{z^{2h}(z-1)^{l+l_1}(z+1)^{l+l_1}}{(z+2+\sqrt{5})^{h+j-k+l_1+1}} \right) = (-1)^{q-m+\nu-1} \\ &\times \sum_{\bar{m} \in M_\nu} D_{m_1} \left(z^{2h} \right) D_{m_2} \left((z-1)^{l+l_1} \right) D_{m_3} \left((z+1)^{l+l_1} \right) D_{m_4} \left((z+2+\sqrt{5})^{-(h+j-k+l_1+1)} \right), \end{aligned}$$

где

$$M_\nu = \left\{ \bar{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4) \in (\mathbb{Z}^+)^4 \mid \begin{array}{l} m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = h + j - k + l_1 + 1 - \nu, \\ m_1 \leq 2h; m_2, m_3 \leq l + l_1 \end{array} \right\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2k_\nu &= 2(-1)^{q-m+\nu-1} \sum_{\bar{m} \in M_\nu} \binom{2h}{m_1} \binom{l+l_1}{m_2} \binom{l+l_1}{m_3} \binom{h+j-k+l_1+m_4}{m_4} (-1)^{m_4} (\sqrt{5}+2)^{2h-m_1} \\ &\times (\sqrt{5}+1)^{l+l_1-m_2} (3+\sqrt{5})^{l+l_1-m_3} (2(\sqrt{5}+2))^{-(h+j-k+l_1+1+m_4)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим $\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ – корень уравнения $t^2 - t - 1 = 0$. По индукции легко показать, что $\varepsilon_1^m = A_m \varepsilon_1 + B_m$, $A_m, B_m \in \mathbb{Z}$. Значит, $2\varepsilon_1^m \in \mathbb{K}$ ($m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$). Тогда

$$\begin{aligned} 2k_\nu &= 2(-1)^{q-m+\nu-1} \sum_{\bar{m} \in M_\nu} \binom{2h}{m_1} \binom{l+l_1}{m_2} \binom{l+l_1}{m_3} \binom{h+j-k+l_1+m_4}{m_4} (-1)^{m_4} (\sqrt{5}+2)^{2h-m_1} \\ &\times (2\varepsilon_1)^{l+l_1-m_2} (2(\varepsilon_1+1))^{l+l_1-m_3} (2(\sqrt{5}+2))^{-(h+j-k+l_1+1+m_4)} \\ &= \sum_{\bar{m} \in M_\nu} k_\nu(\bar{m}) 2^{2l+l_1-h-j+k-1-m_2-m_3-m_4}, \text{ где все } k_\nu(\bar{m}) \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Так как $2l+l_1-h-j+k-1-m_2-m_3-m_4 \geq 2l+l_1-h-j+k-1-(h+j-k+l_1+1-\nu) = 2(q-m)-2+\nu$, то

$$2k_\nu = 2^{-2(m-q)+\nu-2} k'_\nu, \text{ где } k'_\nu \in \mathbb{K}, \nu = 1, \dots, h+j-k+l_1+1. \quad (12)$$

Имеем из (11)

$$\begin{aligned} \int_0^1 R_{l_1}(z) dz &= \int_0^1 P(z) dz + \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_1+1} -\frac{k_\nu}{\nu-1} \left(\frac{1}{(3+\sqrt{5})^{\nu-1}} - \frac{1}{(1+\sqrt{5})^{\nu-1}} \right) \\ &\quad + k_1 \ln \frac{\sqrt{5}+2+z}{\sqrt{5}+2-z} \Big|_0^1. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть $\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, тогда $2\varepsilon_2^m \in \mathbb{K}$ ($m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$). Очевидно,

$$\frac{1}{(3+\sqrt{5})^{\nu-1}} = 2^{-\nu+1}(1-\varepsilon_2), \quad \frac{1}{(1+\sqrt{5})^{\nu-1}} = 2^{-\nu+1}\varepsilon_2^{\nu-1},$$

$$\ln \frac{\sqrt{5}+2+z}{\sqrt{5}+2-z} \Big|_0^1 = \ln \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Из определения M_0 следует, что $q_{M_0} \int_0^1 P(z) dz \equiv A_1 \in \mathbb{K}$, а также несложно проверить, что

$$q_{M_0} \binom{h+j-k+l_1}{l_1} \frac{1}{\nu-1} \equiv A_\nu \in \mathbb{N}$$

для всех $\nu = 2, \dots, h+j-k+l_1+1$. Но тогда из (12) и (13) следует

$$\begin{aligned} 2q_{M_0} w(l_1) &= 2q_{M_0} \binom{h+j-k+l_1}{l_1} \int_0^1 R_{l_1}(z) dz = 2 \binom{h+j-k+l_1}{l_1} A_1 \\ &+ 2^{-2(m-q)-2} \sum_{\nu=2}^{h+j-k+l_1+1} (A_\nu k'_\nu 2(\varepsilon_2^{\nu-1} - (1-\varepsilon_2)^{\nu-1})) + 2^{-2(m-q)-1} k'_1 \ln \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \end{aligned}$$

откуда ввиду $m \geq q$ следует (10).

СЛЕДСТВИЕ 1. Для интеграла (1) при $m \geq q$ справедливо следующее представление

$$2^{-2q+1} q_{M_0} J = a \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} + b, \quad a, b \in \mathbb{K}. \quad (14)$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{x^{l-q+l_1}}{(x-1)^{h+j-k+l_1+1}} = (\sqrt{5}+2)^{l-q+l_1} (\sqrt{5}+2)^{h+j-k+l_1+1} 2^{2(h+j-k-l+q+1)} = 2^{2(m+1)} C(l_1),$$

где $C(l_1) \in \mathbb{K}$. Применяя лемму 2, из (6) и (8) получаем

$$\begin{aligned} 2^{-2q+1} q_{M_0} J &= -2(-1)^{j-k} \sum_{l_1=\max(0, q-l)}^{k+m-h} (-1)^{l_1} \binom{j}{k+m-h-l_1} 2^{2(m+1)-2q} C(l_1) 2^{-2(m-q)-2} \\ &\times \left(a(l_1) \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} + b(l_1) \right) = a \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} + b, \end{aligned}$$

где $a, b \in \mathbb{K}$, и следствие 1 доказано.

Наряду с набором параметров (3) нам будет полезна и более общая ситуация, когда

$$(h, j, k, l, m, q) = n(h', j', k', l', m', q'), \quad (15)$$

где $h', j', k', l', m', q' \in \mathbb{Z}^+$. Интеграл (1) для параметров, имеющих вид (15), и для x , имеющего вид (2), будет удобно обозначать в виде

$$J \equiv J_n \equiv J_n(h', j', k', l', m', q'). \quad (16)$$

Обозначим для набора параметров (15)

$$M_n = \max\{2(k+l-j), 2h, 2k, h+j-k, k+m-h, l, m, j, q\}. \quad (17)$$

Пусть p – простое число, $p > \sqrt{Mn}$, $w = \{n/p\}$ – дробная доля числа n/p . Рассмотрим неравенства

$$\begin{aligned} &[2k'w] + [(l' + k' - j')w] + [m'w] + [l'w] - [k'w] - [2(l' + k' - j')w] \\ &\quad - [(h' + j' - k')w] - [(k' + m' - h')w] > 0, \\ &[2h'w] + [(l' + k' - j')w] + [j'w] + [q'w] - [h'w] - [2(l' + k' - j')w] \end{aligned}$$

$$-[(h' + j' - k')w] - [(k' + m' - h')w] > 0, \quad (18)$$

$$[j'w] + [m'w] - [(h' + j' - k')w] - [(k' + m' - h')w] > 0,$$

$$[2k'w] + [(l' + k' - j')w] + [q'w] - [k'w] - [2(l' + k' - j')w] - [(k' + m' - h')w] > 0,$$

$$[2h'w] + [(l' + k' - j')w] + [l'w] - [h'w] - [2(l' + k' - j')w] - [(h' + j' - k')w] > 0.$$

Обозначим через Δ_n произведение всех простых чисел $p > \sqrt{Mn}$ таких, что $w = \{n/p\}$ удовлетворяет хотя бы одному из неравенств (18). Следующая лемма уточняет результат, полученный в следствии 1.

ЛЕММА 3. При $t \geq q$ для интеграла (16) справедливо представление

$$\frac{qMn}{\Delta_n} 2^{-2q+1} J_n = A_n \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} + B_n, \quad (19)$$

где $A_n, B_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Представление (19) следует из (14) с помощью стандартной процедуры уточнения знаменателя. Впервые для интеграла (1) неравенства (18) были получены в работе [1, с. 491, неравенства (11)]. Неравенства (18) несколько отличаются от рассмотренных с той же целью Р. Марковеккио в работе [2, равенства (31)].

В следующей лемме мы приведем окончательную версию линейной формы вида (19), с помощью которой и будет доказана теорема 1.

ЛЕММА 4. Справедливо представление (см. (16))

$$\begin{aligned} L_n &\equiv \left(\sqrt{5}-2\right)^{140n} 2^{-100n+1} \frac{q_{56n}}{\Delta_n} J_n(7, 38, 25, 32, 38, 50) \\ &\equiv \left(\Lambda_1(n)\sqrt{5} + \Lambda_2(n)\right) \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \left(\Lambda_3(n)\sqrt{5} + \Lambda_4(n)\right), \end{aligned} \quad (20)$$

где все $\Lambda_i(n) \in \mathbb{Z}$, Δ_n определено неравенствами (18) для набора параметров (3).

Доказательство. В работе [1, равенство (9)] доказано, что (см. (16))

$$J_n(h', j', k', l', m', q') = x^{l-q} J_n(k', m', h', q', j', l'),$$

т.е.

$$J_n(7, 38, 25, 32, 38, 50) = \frac{(\sqrt{5}+2)^{-18n}}{4^{-18n}} J_n(25, 38, 7, 50, 38, 32).$$

Имеем для набора параметров (3) из (17)

$$M_n = n \max\{38, 14, 50, 20, 56, 32, 38, 38, 50\} = 56n.$$

Но тогда

$$L_n = \left(\sqrt{5}-2\right)^{158n} 2^{-64n+1} \frac{q_{56n}}{\Delta_n} J_n(25, 38, 7, 50, 38, 32).$$

По лемме 3

$$2^{-64n+1} \frac{q_{56n}}{\Delta_n} J_n(25, 38, 7, 50, 38, 32) = A_n \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} + B_n,$$

где $A_n, B_n \in \mathbb{K}$, откуда следует (20), и лемма доказана.

3. Асимптотики

Для доказательства теоремы 1 мы применим лемму 1 к линейной форме (20). В этом разделе мы вычислим константы γ_1 и γ_3 , а в следующем – константу γ_2 . Для вычисления обеих констант γ_1 и γ_3 применим метод перевала. Имеем (см. (16) и (20))

$$J_n \equiv J_n(7, 38, 25, 32, 38, 50) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \int_{-i\infty}^{i\infty} G(s, t) dt,$$

где

$$G(s, t) = \varphi(s, t)(f(s, t))^n,$$

$$f(s, t) = \frac{s^7 t^{38}}{(1-s)^{19}(s-t)^{20}(t-x)^{56}}, \quad (21)$$

$$\varphi(s, t) = \frac{1}{\sqrt{s/(s-1)}(1-s)(s-t)(t-x)}.$$

Точками перевала являются решения системы $f'_s(s, t) = 0$, $f'_t(s, t) = 0$, отличные от нулей функции $f(s, t)$. Для выписанной выше функции $f(s, t)$ имеем три точки перевала:

$$(s_1, t_1) = (1.011603 \dots, 1.023871 \dots), \quad (22)$$

$$(s_2, t_2) = (-0.016548 \dots + i0.337977 \dots, -0.679454 \dots + i0.293303 \dots), \quad (23)$$

$(s_3, t_3) = (\overline{s_2}, \overline{t_2})$ комплексно-сопряжена точке (s_2, t_2) . Обозначим $\xi = (s, t) \in \mathbb{C}^2$.

ЛЕММА 5. Пусть ξ^0 – невырожденная точка перевала функции $S(\xi)$, γ – двумерное гладкое комплексное многообразие с краем, ξ^0 – внутренняя точка γ , функции $\varphi(\xi)$ и $S(\xi)$ голоморфны в точке ξ^0 , пусть также $\max_{\xi \in \gamma} \operatorname{Re} S(\xi)$ достигается в точке ξ^0 ,

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} \varphi(\xi) \exp(\lambda S(\xi)) d\xi,$$

$S''_{\xi\xi}(\xi^0) = \begin{pmatrix} S''_{ss}(\xi^0) & S''_{st}(\xi^0) \\ S''_{st}(\xi^0) & S''_{tt}(\xi^0) \end{pmatrix}$ – матрица Гессе, $\det S''_{\xi\xi}(\xi^0) \neq 0$. Тогда при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$F(\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda} \exp(\lambda S(\xi^0)) (\det S''_{\xi\xi}(\xi^0))^{-1/2} (\varphi(\xi^0) + O(\lambda^{-1})). \quad (24)$$

Доказательство. Это утверждение доказано в монографии М. В. Федорюка [19, с. 259, предложение 1.1].

ЛЕММА 6. Для линейной формы (20) имеет место равенство

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln \left| \Lambda_1(n) \sqrt{5} + \Lambda_2(n) \right| \right) \\ &= 140 \ln(\sqrt{5} - 2) - 100 \ln 2 + 56 - \Delta + \ln |f(s_1, t_1)|, \\ \gamma_1 &= 112.169784 \dots, \text{ где } \Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \Delta_n = 33.573984 \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(\delta, \tau) \equiv f\left(\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\tau}\right) = -\frac{x^{-56}\delta^{32}\tau^{38}}{(1-\delta)^{19}(\delta-\tau)^{20}(\tau-1/x)^{56}}.$$

Пусть L_1 – окружность $|\tau-1/x| = 1/t_1 - 1/x$, L_2 – окружность $|\delta-1/x| = 1/s_1 - 1/x$. Заметим, что из (2) и (22) следует, что $1/x < 1/t_1 < 1/s_1 < 1$. Очевидно, $\max_{(\delta, \tau) \in (L_2 \times L_1)} \ln |g(\delta, \tau)|$ достигается только в точке $(1/s_1, 1/\tau_1)$. Обозначим L_1^* – образ окружности L_1 при отображении $t = 1/\tau$, L_2^* – образ окружности L_2 при отображении $s = 1/\delta$. Но тогда из определения функции $g(\delta, \tau)$ следует, что $\max_{(s, t) \in (L_2^* \times L_1^*)} \ln |f(s, t)|$ достигается только в точке (s_1, t_1) . Для интеграла J_n из (21) имеем

$$J_n = A_n \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} + B_n, \quad (26)$$

где $A_n, B_n \in \mathbb{Q} \cdot \sqrt{5} \oplus \mathbb{Q}$ (см. следствие 1).

Покажем, что

$$A_n = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_2^*} ds \int_{L_1^*} G(s, t) dt, \quad (27)$$

где окружности L_1^* и L_2^* проходятся в положительном направлении.

В доказательстве леммы 2 для интеграла в (9) имеем из (11) и (13)

$$\int_0^1 R_{l_1}(z) dz = A(l_1) \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} + B(l_1),$$

где $A(l_1), B(l_1) \in \mathbb{Q} \cdot \sqrt{5} \oplus \mathbb{Q}$, $A(l_1) = k_1 = -\text{res}_{z=z_0} R_{l_1}(z)$, $z_0 = \sqrt{5} + 2$, а тогда из (6), (8) и (26) следует, что $A_n = \text{res}_{z=z_0} R(z)$. Применяя (5), получаем

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_l R(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2^*} \text{res}_{t=x} G(s, t) ds = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_2^*} ds \int_{L_1^*} G(s, t) dt,$$

где l – контур, обходящий точку z_0 в положительном направлении и переходящий при отображении $s = z^2/(z^2 - 1)$ в окружность L_2^* . Итак, формула (27) доказана.

Пусть γ_1 – малая дуга окружности L_1^* с центром в точке t_1 , γ_2 – малая дуга окружности L_2^* с центром в точке s_1 , $\gamma = \gamma_2 \times \gamma_1$, $\Gamma = (L_2^* \times L_1^*) \setminus \gamma$; $\xi^0 = (s_1, t_1)$, $\max_{\xi \in \Gamma} |f(\xi)| = F < |f(\xi^0)|$. На множестве γ можно определить некоторую голоморфную в точке ξ^0 ветвь $\ln f(\xi) = \ln |f(\xi)| + ih(\xi)$.

Из (21) и (22) следует, что $f(\xi^0) = -|f(\xi^0)|$, поэтому можно выбрать $h(\xi^0) = \pi$. Далее функция $\varphi(\xi)$ голоморфна в точке ξ^0 ввиду $\text{Res} > 1$, $s \in \gamma_2$. Очевидно, что $\varphi(\xi^0) \neq 0$. Имеем из (27)

$$A_n = \frac{1}{(2\pi i)^2} \left(\int_{\gamma} \varphi(\xi) \exp(n(\ln |f(\xi)| + ih(\xi))) d\xi + \int_{\Gamma} \varphi(\xi) (f(\xi))^n d\xi \right). \quad (28)$$

Применим к первому интегралу в (28) лемму 5 при $\lambda = n$, $S(\xi) = \ln f(\xi)$. Все условия леммы 5 выполнены, так как оставшееся условие невырожденности точки перевала ξ^0 легко проверяется: $\det S''_{\xi\xi}(\xi^0) = 10^{10} \cdot 3.116663 \dots \neq 0$. Тогда из (24) получим

$$\int_{\gamma} \varphi(\xi) \exp(n(\ln |f(\xi)| + ih(\xi))) d\xi = \frac{2\pi}{n} (-1)^n \exp(n \ln |f(\xi^0)|) (\det S''_{\xi\xi}(\xi^0))^{-1/2} \left(\varphi(\xi^0) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Второй интеграл в (28) оценим тривиально

$$\left| \int_{\Gamma} (\varphi(\xi)(f(\xi))^n d\xi) \right| < CF^n$$

для некоторой положительной константы C . Но тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |A_n| = \ln |f(s_1, t_1)|$.

Для завершения доказательства леммы осталось вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{q_{56n}}{\Delta_n} \right)$.

Отметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(q_{56n}) = 56$, а

$$\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \Delta_n = 33.573984 \dots \quad (29)$$

был вычислен в работе [10, см. с. 118–119].

Таким образом, лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть для линейной формы (20)

$$\gamma_3 = 140 \ln(2 + \sqrt{5}) + 100 \ln 2 - 56 + \Delta - \ln |f(s_2, t_2)| = 299.316009 \dots, \quad (30)$$

где функция $f(s, t)$ определена в (21), точка (s_2, t_2) имеет вид (23), $\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \Delta_n$ вычислен в (29).

Пусть далее $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Тогда существует такое $N \in \mathbb{N}$, $N = N(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, что при всех $n \geq N$ хотя бы для одного из значений $m \in \{n, n+1\}$ выполняются неравенства

$$e^{-(\gamma_3 + \varepsilon_1)m} < |L_m| < e^{-(\gamma_3 - \varepsilon_2)m}.$$

Доказательство леммы 7 аналогично доказательству леммы 7 работы [10].

4. Вычисление константы γ_2 . Завершение доказательства теоремы 1

Для интеграла (1) рассмотрим функцию

$$g(x, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{a(\alpha)} ds \int_{l_t} \frac{s^k t^{h-k} dt}{\sqrt{s/(s-1)}(1-s)^{k+l-j+1}(s-t)(t-x)}, \quad (31)$$

где $a(\alpha) = \alpha/(\alpha-1)$, $\alpha \in (0, 1)$, l_t – окружность, в комплексной плоскости t диаметром которой является отрезок вещественной оси $[x/2, 2x]$; интегрирование по l_t проходит в отрицательном направлении.

Пусть далее

$$D_N(f(x, \alpha)) = \frac{1}{N!} \frac{\partial^N f(x, \alpha)}{\partial x^N}, \quad D_N(f(x)) = \frac{1}{N!} f^{(N)}(x), \quad N \in \mathbb{Z}^+.$$

Приведем леммы 8–13, доказанные в работе [10] и необходимые для дальнейших рассуждений.

ЛЕММА 8. Для интеграла (1) и функции (31) выполняется соотношение

$$J = \lim_{\alpha \rightarrow 1-0} T(g(x, \alpha)),$$

где оператор $T = D_{k+m-h} x^j D_{h+j-k}$.

ЛЕММА 9. Для функции (31) выполняется соотношение

$$g(x, \alpha) = \frac{2(-1)^{k+l-j} x^{h-k}}{x-1} \int_0^{\sqrt{\alpha}} \frac{z^{2k} (z^2-1)^{l-j} dz}{z^2 - x/(x-1)}.$$

ЛЕММА 10. Пусть $l \leq j$. Тогда для интеграла (1) имеет место соотношение

$$\begin{aligned} J &= 2(-1)^{k+l-j} T \left(\sum_{\nu=0}^{k+l-j-1} \frac{1}{2k+2l-2j-2\nu-1} \frac{x^{m-q+\nu}}{(x-1)^{\nu+1}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^{h-1/2}}{(x-1)^{k+l-j+1/2}} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) \right). \end{aligned} \quad (32)$$

ЛЕММА 11. Пусть $M \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

$$D_M \left(\frac{x^a}{(x-1)^b} \right) = (-1)^M \sum_{r=0}^M \binom{a}{r} \binom{b-a+M-1}{M-r} \frac{x^{a-r}}{(x-1)^{b+M}}. \quad (33)$$

ЛЕММА 12. Для любого $N \in \mathbb{N}$ и произвольных аналитических функций $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеет место равенство

$$D_N(uv) = v D_N(u) + \sum_{\lambda=0}^{N-1} \frac{\lambda!(N-1-\lambda)!}{N!} D_{N-1-\lambda}(D_\lambda(u)v').$$

Введем при $x \in \mathbb{R}$ функцию

$$x^* = \begin{cases} x \ln x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ x \ln(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

ЛЕММА 13. Пусть $N \in \mathbb{N}$, $n \rightarrow +\infty$, $b = b_0 n + O(1)$, $b_0, r_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}^+$, $\binom{b}{r} \neq 0$. Тогда верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \binom{b}{r} \right| = b_0^* - r_0^* - (b_0 - r_0)^*.$$

Полученные результаты применим к линейной форме (20). Вычислим сначала интеграл J_n из (21) по формуле (32):

$$\begin{aligned} J_n &= 2(-1)^n T \left(\sum_{\nu=0}^{19n-1} \frac{1}{38n-2\nu-1} \frac{x^{-12n+\nu}}{(x-1)^{\nu+1}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^{7n-1/2}}{(x-1)^{19n+1/2}} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) \right), \end{aligned} \quad (34)$$

где оператор $T = D_{56n} x^{38n} D_{20n}$.

Обозначим $A = (\sqrt{5} + 2)^{-140n} 2^{-100n}$,

$$\sum_{1, \nu} = AT \left(\frac{1}{x^{12n-\nu}} (x-1)^{\nu+1} \right), \quad \nu = 0, 1, \dots, 12n-1, \quad (35)$$

$$\sum_{2,\nu} = AT \left(\frac{x^\nu}{(x-1)^{12n+\nu+1}} \right), \quad \nu = 0, 1, \dots, 7n-1, \quad (36)$$

$$\sum_3 = AT \left(\frac{x^{7n-1/2}}{(x-1)^{19n+1/2}} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) \right). \quad (37)$$

Тогда из (20), (34)–(37) получим

$$L_n = \frac{q_{56n}}{\Delta_n} 2(-1)^n * \left(\sum_{\nu=0}^{12n-1} \frac{1}{38n-2\nu-1} \sum_{1,\nu} + \sum_{\nu=0}^{7n-1} \frac{1}{14n-2\nu-1} \sum_{2,\nu} - \sum_3 \right). \quad (38)$$

Будем комбинировать вычисление операторов D_M по формуле Лейбница и по формуле (33). В последнем случае оператор D_M обозначим D'_M .

Начнем с вычисления $\sum_{1,\nu}$. Имеем, как и в [10],

$$D_{20n} \left(\frac{1}{x^{12n-\nu}(x-1)^{\nu+1}} \right) = \sum_{r_1=0}^{20n} \binom{12n-\nu+r_1-1}{r_1} \binom{20n-r_1+\nu}{20n-r_1} \frac{1}{x^{12n-\nu+r_1}(x-1)^{\nu+20n-r_1+1}}.$$

По лемме 11

$$\begin{aligned} D'_{56n} \left(x^{38n} \frac{1}{x^{12n-\nu+r_1}(x-1)^{\nu+20n-r_1+1}} \right) &= D'_{56n} \left(\frac{x^{26n+\nu-r_1}}{(x-1)^{20n+\nu-r_1+1}} \right) \\ &= \sum_{r_2=0}^{56n} \binom{26n+\nu-r_1}{r_2} \binom{50n}{56n-r_2} \frac{x^{26n+\nu-r_1-r_2}}{(x-1)^{76n+\nu-r_1+1}}. \end{aligned}$$

Ненулевые слагаемые в последней сумме получаются лишь при $r_2 \in [6n, 26n+\nu-r_1]$. Далее из (2) имеем

$$\begin{aligned} \frac{x^{26n+\nu-r_1-r_2}}{(x-1)^{76n+\nu-r_1+1}} &= \left(\frac{\sqrt{5}+2}{4} \right)^{26n+\nu-r_1-r_2} ((\sqrt{5}+2)4)^{76n+\nu-r_1+1} \\ &= (\sqrt{5}+2)^{102n+2\nu-2r_1-r_2+1} 4^{50n+r_2+1} \\ &= A^{-1}(\sqrt{5}-2)^{38n-2\nu+2r_1+r_2-1} 4^{r_2+1}. \end{aligned}$$

Поэтому из (35) имеем для $\nu = 0, 1, \dots, 12n-1$

$$\begin{aligned} \sum_{1,\nu} &= \sum_{r_1=0}^{20n} \sum_{r_2=6n}^{26n+\nu-r_1} \binom{12n-\nu+r_1-1}{r_1} \binom{20n-r_1+\nu}{20n-r_1} \binom{26n+\nu-r_1}{r_2} \binom{50n}{56n-r_2} \\ &\times (\sqrt{5}-2)^{38n-2\nu+2r_1-r_2+1} 4^{r_2+1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Теперь вычислим $\sum_{2,\nu}$, $\nu = 0, 1, \dots, 7n-1$. Заменяем

$$D_{20n} = \frac{\Lambda!(20n-\Lambda)!}{(20n)!} D'_{20n-\Lambda} D_\Lambda,$$

где $\Lambda = \Lambda_0 n + O(1)$, $\Lambda \in \mathbb{Z}^+$, выберем позднее с целью оптимизации оценки γ_2 .

Имеем, как и в [10],

$$D_\Lambda \left(\frac{x^\nu}{(x-1)^{12n+\nu+1}} \right) = \sum_{r_1=0}^{\min(\Lambda, \nu)} (-1)^{\Lambda-r_1} \binom{\nu}{r_1} \binom{12n+\nu+\Lambda-r_1}{\Lambda-r_1} \frac{x^{\nu-r_1}}{(x-1)^{12n+\nu+\Lambda-r_1+1}},$$

$$D'_{20n-\Lambda} \left(\frac{x^{\nu-r_1}}{(x-1)^{12n+\nu+\Lambda-r_1+1}} \right) = (-1)^\Lambda \sum_{r_2=0}^{\nu-r_1} \binom{\nu-r_1}{r_2} \binom{32n}{20n-\Lambda-r_2} \frac{x^{\nu-r_1-r_2}}{(x-1)^{32n+\nu-r_1+1}},$$

$$D'_{56n} \left(\frac{x^{38n+\nu-r_1-r_2}}{(x-1)^{32n+\nu-r_1+1}} \right) = \sum_{\rho=0}^{38n+\nu-r_1-r_2} \binom{38n+\nu-r_1-r_2}{\rho} \binom{50n+r_2}{56n-\rho} \frac{x^{38n+\nu-r_1-r_2-\rho}}{(x-1)^{88n+\nu-r_1+1}}.$$

Как при вычислении $\sum_{1,\nu}$, имеем

$$\frac{x^{38n+\nu-r_1-r_2-\rho}}{(x-1)^{88n+\nu-r_1+1}} = A^{-1}(\sqrt{5}-2)^{14n-2\nu+2r_1+r_2+\rho-1} 4^{r_2+\rho+1}.$$

Поэтому из (36) получим

$$\begin{aligned} \sum_{2,\nu} &= \frac{\Lambda!(20n-\Lambda)!}{(20n)!} \sum_{r_1=0}^{\min(\Lambda,\nu)} \sum_{r_2=0}^{\nu-r_1} \sum_{\rho=\max(0,6n-r_2)}^{38n+\nu-r_1-r_2} (-1)^{r_1} \binom{\nu}{r_1} \binom{12n+\nu+\Lambda-r_1}{\Lambda-r_1} \\ &\times \binom{\nu-r_1}{r_2} \binom{32n}{20n-\Lambda-r_2} \binom{38n+\nu-r_1-r_2}{\rho} \binom{50n+r_2}{56n-\rho} \\ &\times (\sqrt{5}-2)^{14n-2\nu+2r_1+r_2+\rho-1} 4^{r_2+\rho+1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Теперь вычислим значение $\sum_3$ с помощью леммы 11. Положим, как и в [10],

$$u = \frac{x^{7n-1/2}}{(x-1)^{19n+1/2}}, \quad v = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}), \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}.$$

Тогда

$$D_{20n}(uv) = v D_{20n}(u) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{20n-1} \frac{\lambda!(20n-1-\lambda)!}{(20n)!} D_{20n-1-\lambda} \left(D_\lambda(u) \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \right).$$

Аналогично

$$\begin{aligned} T(uv) &= vT(u) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1=0}^{56n-1} \frac{\lambda_1!(56n-1-\lambda_1)!}{(56n)!} D_{56n-1-\lambda_1} \left(D_{\lambda_1}(x^{38n} D_{20n}(u)) \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{20n-1} \frac{\lambda!(20n-1-\lambda)!}{(20n)!} D_{56n} \left(x^{38n} D_{20n-1-\lambda} \left(D_\lambda(u) \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \right) \right). \end{aligned}$$

$$\sum_3 = AT(uv) \equiv AT(u)v + \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1=0}^{56n-1} S_3(\lambda_1) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{20n-1} S_3^*(\lambda). \quad (41)$$

Первое слагаемое суммы (41) вычисляется аналогично $\sum_{2,\nu}$, где $\nu = 7n - 1/2$. Полуцелое значение ν позволяет расширить пределы изменения r_1 , r_2 , ρ . Вместо (40) получим

$$\sum_3 = AT(uv) \equiv AT(u)v + \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1=0}^{56n-1} S_3(\lambda_1) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{20n-1} S_3^*(\lambda).$$

$$\begin{aligned}
AvT(u) &= \frac{\Lambda!(20n-\Lambda)!}{(20n)!} \sum_{r_1=0}^{\Lambda} \sum_{r_2=0}^{20n-\Lambda} \sum_{\rho=\max(0,6n-r_2)}^{56n} (-1)^{r_1+1} \binom{7n-1/2}{r_1} \\
&+ \binom{19n+\Lambda-r_1-1/2}{\Lambda-r_1} \binom{7n-r_1-1/2}{r_2} \binom{32n}{20n-\Lambda-r_2} \binom{45n-r_1-r_2-1/2}{\rho} \\
&\times \binom{50n+r_2}{56n-\rho} (\sqrt{5}-2)^{2r_1+r_2+\rho} 4^{r_2+\rho+1} \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{42}
\end{aligned}$$

Вычислим теперь слагаемые $S_3(\lambda_1)$ суммы в (41). Как и выше, пусть

$$D_{20n} = \frac{\Lambda!(20n-\Lambda)!}{(20n)!} D'_{20n-\Lambda} D_{\Lambda}.$$

Последовательно получаем

$$\begin{aligned}
D_{\Lambda}(u) &= \sum_{r_1=0}^{\Lambda} \binom{7n-1/2}{r_1} \binom{19n+\Lambda-r_1-1/2}{\Lambda-r_1} (-1)^{\Lambda-r_1} \frac{x^{7n-r_1-1/2}}{(x-1)^{19n+\Lambda-r_1+1/2}}, \\
D'_{20n-\Lambda} \left(\frac{x^{7n-r_1-1/2}}{(x-1)^{19n+\Lambda-r_1+1/2}} \right) &= (-1)^{\Lambda} \sum_{r_2=0}^{20n-\Lambda} \binom{7n-r_1-1/2}{r_2} \binom{32n}{20n-\Lambda-r_2} \\
&\times \frac{x^{7n-r_1-r_2-1/2}}{(x-1)^{39n-r_1+1/2}}, \\
D'_{\lambda_1} \left(\frac{x^{45n-r_1-r_2-1/2}}{(x-1)^{39n-r_1+1/2}} \right) &= (-1)^{\lambda_1} \sum_{\rho_1=0}^{\lambda_1} \binom{45n-r_1-r_2-1/2}{\rho_1} \binom{-6n+r_2+\lambda_1}{\lambda_1-\rho_1} \\
&\times \frac{x^{45n-r_1-r_2-\rho_1-1/2}}{(x-1)^{39n+\lambda_1-r_1+1/2}}, \\
D'_{56n-\lambda_1-1} \left(\frac{x^{45n-r_1-r_2-\rho_1-1/2}}{(x-1)^{39n+\lambda_1-r_1+1/2}} \right) &= (-1)^{\lambda_1+1} \sum_{\rho_2=0}^{56n-\lambda_1-1} \binom{45n-r_1-r_2-\rho_1-1/2}{\rho_2} \\
&\times \binom{50n+r_2+\rho_1}{56n-\lambda_1-\rho_2-1} \frac{x^{45n-r_1-r_2-\rho_1-\rho_2-1/2}}{(x-1)^{95n-r_1}}, \\
\frac{x^{45n-r_1-r_2-\rho_1-\rho_2-1/2}}{(x-1)^{95n-r_1}} &= A^{-1} (\sqrt{5}-2)^{2r_1+r_2+\rho_1+\rho_2+1} 4^{r_2+\rho_1+\rho_2+1}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
S_3(\lambda_1) &= \frac{\Lambda!(20n-\Lambda)!}{(20n)!} \frac{\lambda_1!(56n-1-\lambda_1)!}{(56n)!} \sum_{r_1=0}^{\Lambda} \sum_{r_2=0}^{20n-\Lambda} \sum_{\rho_1=0}^{\lambda_1} \sum_{\rho_2=0}^{56n-\lambda_1-1} (-1)^{r_1+1} \\
&\times \binom{7n-1/2}{r_1} \binom{19n+\Lambda-r_1-1/2}{\Lambda-r_1} \binom{7n-r_1-1/2}{r_2} \binom{32n}{20n-\Lambda-r_2} \\
&\times \binom{45n-r_1-r_2-1/2}{\rho_1} \binom{-6n+r_2+\lambda_1}{\lambda_1-\rho_1} \binom{45n-r_1-r_2-\rho_1-1/2}{\rho_2} \\
&\times \binom{50n+r_2+\rho_1}{56n-\lambda_1-\rho_2-1} (\sqrt{5}-2)^{2r_1+r_2+\rho_1+\rho_2+1} 4^{r_2+\rho_1+\rho_2+1} \tag{43}
\end{aligned}$$

Осталось вычислить $S_3^*(\lambda)$. Пусть

$$D_{\lambda} = \frac{(\lambda-\Lambda)!\Lambda!}{\lambda!} D'_{\lambda-\Lambda} D_{\Lambda}.$$

Имеем, как и в [10],

$$\begin{aligned}
 D_{\Lambda} \left(\frac{x^{7n-1/2}}{(x-1)^{19n+1/2}} \right) &= \sum_{r_1=0}^{\Lambda} (-1)^{\Lambda-r_1} \binom{7n-1/2}{r_1} \binom{19n+\Lambda-r_1-1/2}{\Lambda-r_1} \frac{x^{7n-r_1-1/2}}{(x-1)^{19n+\Lambda-r_1+1/2}}, \\
 D'_{\lambda-\Lambda} \left(\frac{x^{7n-r_1-1/2}}{(x-1)^{19n+\Lambda-r_1+1/2}} \right) &= \sum_{r_2=0}^{\lambda-\Lambda} (-1)^{\lambda-\Lambda} \binom{7n-r_1-1/2}{r_2} \binom{12n+\lambda}{\lambda-\Lambda-r_2} \frac{x^{7n-r_1-r_2-1/2}}{(x-1)^{19n+\lambda-r_1+1/2}}, \\
 D'_{20n-1-\lambda} \left(\frac{x^{7n-r_1-r_2-1}}{(x-1)^{19n+\lambda-r_1+1}} \right) &= (-1)^{\lambda+1} \sum_{r_3=0}^{20n-1-\lambda} \binom{7n-r_1-r_2-1}{r_3} \binom{32n+r_2}{20n-1-\lambda-r_3} \\
 &\quad \times \frac{x^{7n-r_1-r_2-r_3-1}}{(x-1)^{39n-r_1}}, \\
 D'_{56n} \left(\frac{x^{45n-r_1-r_2-r_3-1}}{(x-1)^{39n-r_1}} \right) &= \sum_{\rho=\max(0,6n-r_2-r_3)}^{45n-r_1-r_2-r_3-1} \binom{45n-r_1-r_2-r_3-1}{\rho} \binom{50n+r_2+r_3}{56n-\rho} \\
 &\quad \times \frac{x^{45n-r_1-r_2-r_3-\rho-1}}{(x-1)^{95n-r_1}}, \\
 \frac{x^{45n-r_1-r_2-r_3-\rho-1}}{(x-1)^{95n-r_1}} &= A^{-1}(\sqrt{5}-2)^{2r_1+r_2+r_3+\rho+1} 4^{r_2+r_3+\rho+1}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, во втором случае имеем

$$\begin{aligned}
 S_3(\lambda) &= \frac{\lambda!(20n-1-\lambda)!}{(20n)!} \frac{(\lambda-\Lambda)! \Lambda!}{\lambda!} \sum_{r_1=0}^{\Lambda} \sum_{r_2=0}^{\lambda-\Lambda} \sum_{r_3=0}^{20n-1-\lambda} \sum_{\rho=\max(0,6n-r_2-r_3)}^{45n-r_1-r_2-r_3-1} (-1)^{r_1+1} \\
 &\quad \times \binom{7n-1/2}{r_1} \binom{19n+\Lambda-r_1-1/2}{\Lambda-r_1} \binom{7n-r_1-1/2}{r_2} \binom{12n+\lambda}{\lambda-\Lambda-r_2} \\
 &\quad \times \binom{7n-r_1-r_2-1}{r_3} \binom{32n+r_2}{20n-1-\lambda-r_3} \binom{45n-r_1-r_2-r_3-1}{\rho} \\
 &\quad \times \binom{50n+r_2+r_3}{56n-\rho} (\sqrt{5}-2)^{2r_1+r_2+r_3+\rho+1} 4^{r_2+r_3+\rho+1}.
 \end{aligned} \tag{44}$$

Слагаемые в (38), вычисленные по формулам (39), (40), (43), (44), имеют вид $(\sqrt{5}-2)^N R$ или $(\sqrt{5}-2)^N \sqrt{5} R$, а в формуле (42) – вид $(\sqrt{5}-2)^N R \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ или $(\sqrt{5}-2)^N R \sqrt{5} \ln \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, где $R \in \mathbb{Q}$, $N \in \mathbb{Z}^+$. Заметим, что для $N \in \mathbb{N}$ $(\sqrt{5}+2)^N = A_N + B_N \sqrt{5}$, $(\sqrt{5}-2)^N = A_N - B_N \sqrt{5}$, где $A_N, B_N \in \mathbb{N}$. Соответственно, $\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)^N = -5B_N + A_N \sqrt{5}$.

Очевидно, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln A_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln B_N = \sqrt{5} + 2$.

Общее количество слагаемых в L_n оценивается как $O(n^5)$. Таким образом, имеем для γ_2 оценку $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \Lambda \leq 56 - \Delta + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |S|$, где S – максимальное по модулю слагаемое из всех вышеуказанных сумм после замены $\sqrt{5}-2$ на $\sqrt{5}+2$. Асимптотика биномиальных коэффициентов вычисляется с помощью леммы 13.

Вычисления на компьютере показывают, что соответствующее максимальное слагаемое достигается в сумме (43) при следующих значениях параметров: $\Lambda = \Lambda' n + O(1)$, $r_1 = r'_1 n + O(1)$, $r_2 = r'_2 n + O(1)$, $\rho_1 = \rho'_1 n + O(1)$, $\rho_2 = \rho'_2 + O(1)$, $\lambda_1 = \lambda'_1 + O(1)$ где

$$(\Lambda'; r'_1; r'_2; \rho'_1; \rho'_2; \lambda'_1) = (0; 0; 4.849092 \dots; 0.575453 \dots; 35.744108 \dots; 0.575453 \dots).$$

Следовательно, из (42) по лемме 13 получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \Lambda \leq & 56 - \Delta + \lambda_1'^* + (56 - \lambda_1)^{I*} - 56^* + (7 - r_1)^{I*} - r_2'^* - (7 - r_1 - r_2)^{I*} + 32^* \\ & - (20 - r_2)^{I*} - (12 + r_2)^{I*} + (45 - r_2)^{I*} - \rho_1'^* - (45 - r_2 - \rho_1)^{I*} + (45 - r_2 - \rho_1)^{I*} - \rho_2'^* \\ & - (45 - r_2 - \rho_1 - \rho_2)^{I*} + (50 + r_2 + \rho_1)^{I*} - (56 - \lambda_1 - \rho_2)^{I*} - (r_2 + \rho_1 + \lambda_1 + \rho_2 - 6)^{I*} \\ & + (2r_1 + r_2 + \rho_1 + \rho_2) \ln(\sqrt{5} + 2) + (r_2 + \rho_1 + \rho_2) \ln 4 = 213.833247 \dots \equiv \gamma_2. \end{aligned} \quad (45)$$

Таким образом, по лемме 1 из (25), (30) и (45) имеем

$$\mu > \frac{2(\gamma_1 + \gamma_3)}{\gamma_3 - \gamma_2} = 9.627339 \dots$$

И теорема 1 доказана.

5. Заключение

“Золотое сечение” хорошо известно в теории диофантовых приближений, как число “плохо приближаемое” рациональными дробями. Выясняется, что и логарифм “золотого сечения” достаточно плохо приближается рациональными числами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андросенко В. А., Салихов В. Х. Симметризованная версия интеграла Марковеккио в теории диофантовых приближений // Математические заметки. 2015. Т. 97, № 4. С. 483-492.
2. Marcovecchio R. The Rhin-Viola method for $\ln 2$ // Acta Arithm. 2009. Vol. 139.2. P. 147-184.
3. Данилов Л. В. Рациональные приближения некоторых функций в рациональных точках // Математические заметки. 1978. Т. 24, № 4. С. 449-458.
4. Aladi K. Robinson M. Legendre polynomials and irrationality // J.Reine Angew. Math. 1980. Vol. 318. P. 137-155.
5. Chudnovsky G. V. Recurrences Pade approximations and thei applications // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 92.
6. Дубицкас А. К. Приближение $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ рациональными дробями // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1987. Т. 6. С. 73-76.
7. Hata M. Legendre type polynomials and irrationality measures // J. Reine Angew. Math. 1990. Vol. 407, № 1. P. 99-125.
8. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arith. 1993. Vol. LXIII. № 4. P. 325-349.
9. Rhin G. Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité // Progr. in Math. 1987. Vol. 71. P. 155-164.
10. Лучин М. Ю., Салихов В. Х. Приближение $\ln 2$ числами из поля $Q(\sqrt{2})$ // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2018. Т. 82, № 3. С. 108-135.

11. Amoroso F., Viola C. Approximation measures for logarithms of algebraic numbers // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 2001. Vol. 30, № 1. P. 225-249.
12. Сальникова Е. С. Приближения некоторых логарифмов числами из полей $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}\sqrt{d}$ // Фундамент. и прикл. матем. 2010. Том 16. № 6. С. 139-155.
13. Салихов В. Х., Сальникова Е. С. Диофантовы приближения логарифма “золотого сечения” // Вестник Брянского государственного технического университета. 2007. № 1. С. 111-119.
14. Башмакова М. Г. Оценка мер иррациональности логарифма “золотого сечения” // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, № 1. С. 47-53.
15. Дубицкас А. К. Приближения логарифмов некоторых чисел // Диофантовы приближения. Ч.2. М.:Изд-во Московского университета. 1986. С. 23-34.
16. Hata M. Irrationality measures of the values of hypergeometric functions // Acta Arith. 1992. Vol. LX. P. 335-347.
17. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures // Bull. Austral. Math. Soc. 1994. Vol. 50, № 2. P. 225-243.
18. Сальникова Е. С. О мерах иррациональности некоторых значений функции Гаусса // Чебышевский сборник. 2007. Том 8, № 2. С. 88-96.
19. Федорюк М. В. Метод перевала // Наука, М. 1997. С. 368.

REFERENCES

1. Androsenko, V. A. 2015., “Symmetrized version of the Marcovecchio integral in the theory of diophantine approximations”, Math. Notes, vol. 97, № 4, pp. 483-492. (Russian)
2. Marcovecchio R., 2009, “The Rhin-Viola method for $\ln 2$ ”, Acta Arithm., vol. 139.2, pp. 147-184.
3. Danilov I. V., 1978, “Rational aproximations of some funcrions in rational points”, Math. Notes, vol. 24, № 4 pp. 449-458. (Russian)
4. Aladi K., Robinson M., 1980, “Legendre polynomials and irrationality”, J.Reine Angew. Math., vol. 318, pp. 137-155.
5. Chudnovsky G. V., “Recurrences Pade approximations and thei applications”, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 92.
6. Dubickas, A. K. 1987, “Approximation of $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ by rational fractions”, Publishing Moscow University Bulletin, Math., Mech., vol. 6, pp. 73-76. (Russian)
7. Hata M., 1990, “Legendre type polynomials and irrationality measures”, J. Reine Angew. Math., vol. 407, № 1, pp. 99-125.
8. Hata M., 1993, “Rational approximations to π and some other numbers”, Acta Arith., vol. LXIII, № 4, pp. 325-349.
9. Rhin G., 1987, “Approximants de Padé et mesures effectives d’irrationalité”, Progr. in Math., vol. 71, pp. 155-164.
10. Luchin M. Y., 2018, “Aproximating $\ln 2$ by numbers in the field $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ”, Izv. Math., vol. 82, № 3, pp. 108-135. (Russian)

11. Amoroso F., Viola C., 2001, "Approximation measures for logarithms of algebraic numbers", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., vol. 30, № 1, pp. 225-249.
12. Salnikova E., S. 2010, "Approximations of some logarithms by numbers from the fields $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{Q}\sqrt{d}$ ", Journal of Mathematical Sciences, vol. 16, № 6, pp. 139-155. (Russian)
13. Salikhov, V. H., Salnikova E., S., 2007, "Diophantine approximations of logarithm of "Golden section", The Bryansk State University Herald, № 1, pp. 111-119. (Russian)
14. Bashmakova M. G., 2010, "The estimate of the irrationality measures of logarithm of "Golden section", Chebyshevskii Sbornik, vol. 11, no. 1, pp. 47-53. (Russian)
15. Dubickas, A. K. 1986, "Approximation of logarithms of some numbers", Publishing Moscow State University Diophantine approximations, 2, pp. 23-34.
16. Hata M., 1992, "Irrationality measures of the values of hypergeometric functions", Acta Arith., vol. LX., pp. 335-347.
17. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K., "An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures", Bull. Austral. Math. Soc., vol. 50, № 2, pp. 225-243.
18. Salnikova, E. 2007, "On irrationality measures of some values of the Gauss function", Chebyshevskii Sbornik, vol. 8, № 2, pp. 88-96. (Russian)
19. Fedoryuk M. V., 1997, "Pass method", Moscow: Science, pp. 368. (Russian)

Получено 25.06.2019 г.

Принято в печать 20.12.2019 г.