ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-330-338

О показателе иррациональности $\ln\frac{5}{3}$[1]

В. Х. Салихов, Е. С. Золотухина, Е. Б. Томашевская

Салихов Владислав Хасанович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики, Брянский государственный технический университет (г. Брянск).
e-mail: svdh@rambler.ru

Золотухина Екатерина Сергеевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Брянский государственный технический университет (г. Брянск).
eszolotukhina@mail.ru

Томашевская Елена Брониславовна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Брянский государственный технический университет (г. Брянск).
tomele@mail.ru

Аннотация

В данной работе уточнена оценка меры иррациональности числа $\ln\frac{5}{3}$.

К настоящему времени установлено достаточно много оценок мер иррациональности значений аналитических функций, в частности, логарифмов рациональных чисел.

Диофантовы приближения логарифмов рациональных чисел рассматривались в работах К. Вааненена, А. Хеймонена и Т. Матала-Ахо [1], Д. Рина [2], Е. А. Рухадзе [3], М. Хата [4]-[6] и др. В трудах этих авторов использовались интегральные конструкции, дающие малые линейные формы от рассматриваемых чисел, имеющие "хорошие"оценки знаменателей коэффициентов. Асимптотика интегралов и коэффициентов линейных форм вычислялась с помощью теоремы Лапласа, метода перевала. Обзор некоторых конструкций из теории диофантовых приближений логарифмов рациональных чисел был представлен в статье В. В. Зудилина [7]. Отметим, что в 2009 г. Р. Марковеккио в [8] с помощью двукратного комплексного интеграла получил лучшую на данный момент оценку меры иррациональности числа $\ln 2$.

В последнее время широко применяются симметрии функций, участвующих в интегральных конструкциях.

Использование симметризованных интегралов позволило Е. С. Золотухиной в [9] и Е. Б. Томашевской в [10] получить новые оценки показателей иррациональности некоторых логарифмов рациональных чисел. Впервые подобный интеграл был рассмотрен В. Х. Салиховым при получении оценки меры иррациональности числа $\ln 3$ в [11], а затем числа π в [12].

В 2014 г. в [13] К. Ву и Л. Ванг получили оценку меры иррациональности числа $\ln 3$, улучшающую результат В. Х. Салихова. В их работе впервые были применены общие симметризованные многочлены первой степени вида $At - B$, где $t = (x-d)^2$.

В 2017 г. В. Х. Салихов, М. Ю. Лучин и И. В. Бондарева в [14] улучшили результат К. Ву (см. [15]) о мере иррациональности $\ln 7$. Здесь впервые были рассмотрены квадратичные симметризованные многочлены.

В настоящей работе также используются квадратичные симметризованные многочлены, но будет рассмотрен комплексный интеграл.

Ключевые слова: показатель иррациональности, симметризованные интегралы, симметризованные многочлены.

Библиография: 15 названий.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00296 А

Для цитирования:
В. Х. Салихов, Е. С. Золотухина, Е. Б. Томашевская. О показателе иррациональности $\ln\frac{5}{3}$ // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 330–338.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-330-338

On irrationality measure of $\ln\frac{5}{3}$

V. H. Salikhov, E. S. Zolotukhina, E. B. Tomashevskay

Salikhov Vladislav Khasanovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Docent, Professor of department "Higher mathemathics", Bryansk State technical university (Bryansk).
e-mail: svdh@rambler.ru
Zolotukhina Ekaterina Sergeevna — candidate of Physico-mathematical Sciences, docent of department "Higher mathemathics", Bryansk State technical university (Bryansk).
e-mail: eszolotukhina@mail.ru
Tomashevskaya Elena Bronislavovna — candidate of Physico-mathematical Sciences, docent of department "Higher mathemathics", Bryansk State technical university (Bryansk).
e-mail: tomele@mail.ru

Abstract

In this paper the estimation of irrationality measure of $\ln\frac{5}{3}$ is refined.

To date, a lot of estimates of irrationality measures for the values of analytic functions have been established, in particular, logarithms of rational numbers.

Diophantine approximations of logarithms of rational numbers were considered in the papers of K. Vaananen, A. Heimonen, T. Matala-aho [1], G. Rhin [2], E. A. Rukhadze [3], M. Hata [4]-[6] and other. These authors used integral constructions that give small linear forms from the numbers and have good estimates of the denominators of the coefficients. Asymptotics of integrals and the coefficients of the linear forms computed by using theorem of Laplace and the method of the pass. An overview of some constructions from the theory of Diophantine approximations of logarithms of rational numbers was presented in the article by V. V. Zudilin. Note that in 2009 R. Marcovecchio with the help of the double complex integral has received the best estimate of the irrationality measure of $\ln 2$.

Recently, the symmetries of functions involved in integral constructions are often used. The use of symmetrized integrals allowed E. Zolotukhina in [9] and E. Tomashevskay in [10] to obtain new estimates of irrationality measures of some logarithms of rational numbers. For the first time such an integral was considered by V. H. Salikhov in obtaining an estimate of the irrationality measure of $\ln 3$ in [11] and π in [12].

In 2014, Q. Wu and L. Wang in [13] received an estimate of the irrationality measure of $\ln 3$, which improved V. H. Salikhov's result. For the first time in their work, general symmetrized polynomials of the first degree of the form $At - B$, $t = (x-d)^2$, were applied.

In 2017, V. H. Salikhov, I. Bondareva and M. Luchin in [14] improved Q. Wu's result on the irrationality measure of $\ln 7$ (see [15]). Here was first considered the quadratic symmetrized polinomials.

In this paper, quadratic symmetrized polynomials are also used, but a complex integral will be considered.

Keywords: Irrationality measure, symmetrized integrals, symmetrized polinomials.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
V. H. Salikhov, E. S. Zolotukhina, E. B. Tomashevskay, 2019, "On irrationality measure of $\ln\frac{5}{3}$", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 330–338.

1. Введение

Напомним, что показатель иррациональности или мера иррациональности $\mu(\gamma)$ вещественного числа γ определяется как нижняя граница чисел μ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $q_0(\varepsilon) > 0$, такое, что неравенство $\left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq q^{-\mu-\varepsilon}$ выполняется для всех целых чисел p, q при $q \geq q_0(\varepsilon)$.

В 1993 г. К. Ваананен, А. Хеймонен и Т. Матала-Ахо в [1], используя аппроксимации Паде для гипергеометрической функции Гаусса, доказали общую теорему об оценках мер иррациональности логарифмов рациональных чисел. В частности, была приведена оценка $\mu\left(\ln\frac{5}{3}\right) \leq 9.7571\ldots$.

Позднее Е. С. Золотухина в [9] получила результат $\mu\left(\ln\frac{5}{3}\right) \leq 5.6514\ldots$, который затем был улучшен Е. Б. Томашевской и составил $\mu\left(\ln\frac{5}{3}\right) \leq 5.5120\ldots$.

В настоящей работе эта оценка будет уточнена. Улучшение связано с использованием модифицированного комплексного интеграла Е. Б. Томашевской.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\mu\left(\ln\frac{5}{3}\right) \leq 5.5119417\ldots.$$

2. Основные конструкции

Пусть везде далее $d = 31$, $t = (x-31)^2$, $A,\ B,\ C \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(t) &= At^2 - Bt + C = A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0, \\ \text{где } A_4 = A, A_3 &= -4dA, A_2 = 6d^2A - B, A_1 = -2d\left(2d^2A - B\right), A_0 = Ad^4 - Bd^2 + C. \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим для несократимой дроби a/b, где $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{N}$, показатель $\nu_p = \nu_p(a/b) \in \mathbb{Z}$ простого числа p так, что $a/b = p^{\nu_p}a_1/b_1$, где $a_1 \in \mathbb{Z}$, $b_1 \in \mathbb{N}$, $(a_1, p) = (b_1, p) = 1$.

Пусть $K = \mathbb{Z}\left[\sqrt{15}i\right]$. Также для $a \in K$ определим

$$\nu^*(a) = \max\left\{\nu | a = \left(\sqrt{15}i\right)^{\nu} a_1,\ a_1 \in K\right\}.$$

Пусть для аналитической в точке $x = 0$ функции $f(x)$

$$D_0(f(x)) = f(0),\ D_N(f(x)) = \frac{f^{(N)}(0)}{N!},\ N \in \mathbb{N}.$$

Определим для многочлена P из (1)

$$\begin{aligned} \nu_{31}(P) &= \min\left(4, \nu_{31}\left(A_0\right), \nu_{31}\left(A_1\right) + 1, \nu_{31}\left(A_2\right) + 2\right), \\ \nu_2(P) &= \min\left(6, \nu_2\left(A_0\right), \nu_2\left(A_1\right) + 2, \nu_2\left(A_2\right) + 4\right), \\ \nu^*(P) &= \min\left(2, \nu^*\left(A_0\right), \nu^*\left(A_1\right) + 1\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{Z}^+$, $N \le 4m$. Тогда выполняются следующие оценки*

$$\begin{aligned}\nu_{31}\left(D_N\left(P^m\right)\right) &\geq m\nu_{31}(P)-N,\\ \nu_2\left(D_N\left(P^m\right)\right) &\geq m\nu_2(P)-2N,\\ \nu^*\left(D_N\left(P^m\right)\right) &\geq m\nu^*(P)-N.\end{aligned}$$

Доказательство. Пусть далее $\overline{m}=(m_0,m_1,...,m_4)\in\left(\mathbb{Z}^+\right)^5$, $|\overline{m}|=m_0+m_1+...+m_4$,

$$\gamma\left(\overline{m}\right)=\frac{|\overline{m}|!}{m_0!m_1!\cdots m_4!}.$$

Тогда из (1) имеем

$$P^m=\sum_{|\overline{m}|=m}\gamma\left(\overline{m}\right)\prod_{i=0}^{4}\left(A_ix^i\right)^{m_i},$$

$$D_N\left(P^m\right)=\sum_{\substack{|\overline{m}|=m,\\ \sum_{i=1}^4 im_i=N}}\gamma\left(\overline{m}\right)\prod_{i=0}^{4}A_i^{m_i}.$$

Рассмотрим ряд случаев:

1) $\nu_{31}\left(D_N\left(P^m\right)\right)\geq\sum_{i=1}^4 m_i\nu_{31}\left(A_i\right)\geq m\nu_{31}(P)-\sum_{i=1}^4 im_i=m\nu_{31}(P)-N$, так как $\nu_{31}\left(A_i\right)+i\geq\nu_{31}(P)$, $i=0,1,...,4$; для $i\in\{0;1;2\}$ это следует из определения $\nu_{31}(P)$ в (2), при $i=3$ $\nu_{31}\left(A_3\right)+3\geq 4\geq\nu_{31}(P)$, при $i=4$ $\nu_{31}\left(A_4\right)+4\geq 4\geq\nu_{31}(P)$;

2) $\nu_2\left(D_N\left(P^m\right)\right)\geq\sum_{i=1}^4 m_i\nu_2\left(A_i\right)\geq m\nu_2(P)-2\sum_{i=1}^4 im_i=m\nu_2(P)-2N$, так как $\nu_2\left(A_i\right)+2i\geq\nu_2(P)$, $i=0,1,...,4$; для $i\in\{0;1;2\}$ это следует из определения $\nu_2(P)$ в (2), при $i=3$ $\nu_2\left(A_3\right)+6\geq 6\geq\nu_2(P)$, при $i=4$ $\nu_2\left(A_4\right)+8>\nu_2(P)$;

3) $\nu^*\left(D_N\left(P^m\right)\right)\geq\sum_{i=1}^4 m_i\nu^*\left(A_i\right)\geq m\nu^*(P)-\sum_{i=1}^4 im_i=m\nu^*(P)-N$, так как $\nu^*\left(A_i\right)+i\geq\nu^*(P)$, $i=0,1,...,4$; для $i\in\{0;1\}$ это следует из определения $\nu^*(P)$ в (2), при $i\in\{2;3;4\}$ $\nu^*\left(A_i\right)+i\geq 2\geq\nu^*(P)$, так как $A_i\in\mathbb{Z}$, $\nu^*\left(A_i\right)\geq 0$.

Таким образом, лемма доказана.

Рассмотрим многочлены

$$\begin{aligned}P_1 &= x^4-124x^3+5764x^2-119040x+922560=t^2-2t+961,\\ P_2 &= 3x^4-372x^3+17294x^2-357244x+2767680=3t^2-4t+961.\end{aligned}$$

Положим $\Pi_k=31^{\nu_{31}(P_k)}2^{\nu_2(P_k)}\left(\sqrt{15}i\right)^{\nu^*(P_k)}$. Тогда из (2) для P_1 и P_2 имеем

$$\Pi_1=31^2 2^6\left(\sqrt{15}i\right)^2, \tag{3}$$

$$\Pi_2=31^2 2^4\left(\sqrt{15}i\right)^1. \tag{4}$$

Пусть $\alpha_1=0.9998784$, $\alpha_2=0.4998784$, $\alpha_3=0.0001824$, $\alpha_4=0.0000304$.

Рассмотрим рациональную функцию

$$R(x)=\frac{(x-31)^{\alpha_1 n}\left(P_1(x)\right)^{\alpha_2 n}\left(P_2(x)\right)^{\alpha_3 n}15^{\alpha_4 n}}{x^{n+1}(62-x)^{n+1}}, \tag{5}$$

где $n\in\mathbb{N}$, n кратно 10^7.

Определим интеграл

$$\omega = 124 \int\limits_{31}^{35+i\sqrt{15}} R(x)dx, \tag{6}$$

Подынтегральная функция (5) обладает свойством симметрии $R(x) = R(62-x)$, ввиду которого справедливо следующее разложение $R(x)$ в сумму простейших дробей

$$R(x) = Q_{\alpha n-2}(x) + \sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{a_j}{x^j} + \frac{a_j}{(62-x)^j}\right), \tag{7}$$

где $\alpha = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3 - 2 = 1.0001216$, $Q_{\alpha n-2}(x) = \sum_{k=0}^{\alpha n-2} b_k x^k$, $b_k \in \mathbb{Z}$, $a_j \in \mathbb{Q}$ $(j = \overline{1, n+1})$.

3. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим коэффициенты a_j разложения (7).

Лемма 2. *Для всех $j = 1, ..., n+1$ имеет место представление*

$$62a_j = 31^{j-1}2^{2j-2}\left(\sqrt{15}i\right)^{j-1}A_j, \ A_j \in K. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$, $m_i \in \mathbb{Z}^+$, $|\overline{m}| = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$. Тогда из (5) и (7) получим

$$\begin{aligned} a_j &= D_{n+1-j}\left(R_n(x)x^{n+1}\right) = \sum_{|\overline{m}|=n+1-j} D_{m_1}\left((x-31)^{\alpha_1 n}\right) D_{m_2}\left(P_1(x)^{\alpha_2 n}\right) \\ &\times D_{m_3}\left(P_2(x)^{\alpha_3 n}\right) D_{m_4}\left((62-x)^{-n-1}\right) 15^{\alpha_4 n}. \end{aligned}$$

Имеем

$$D_{m_1}\left((x-31)^{\alpha_1 n}\right) = \frac{\alpha_1 n \cdots (\alpha_1 n - m_1 + 1)}{m_1!}31^{\alpha_1 n - m_1};$$
$$D_{m_4}\left((62-x)^{-n-1}\right) = \frac{(n+1)\cdots(n+m_4)}{m_4!}31^{-n-1-m_4}2^{-n-1-m_4}.$$

Оценим снизу показатели $\nu(a_j)$. Применим лемму 1 и равенства (3) и (4). Имеем

$$\begin{aligned} \nu_{31}(a_j) &\geq \alpha_1 n - m_1 + 2\alpha_2 n - m_2 + 2\alpha_3 n - m_3 - n - 1 - m_4 = \\ &= n - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) - 1 = n - (n+1-j) - 1 = j - 2, \\ \nu_2(a_j) &\geq 6\alpha_2 n - 2m_2 + 4\alpha_3 n - 2m_3 - n - 1 - m_4 = \\ &= 2n - (2m_2 + 2m_3 + m_4) - 1 \geq 2n - 2(n+1-j) - 1 = 2j - 3, \\ \nu^*(a_j) &\geq 2\alpha_2 n - m_2 + \alpha_3 n - m_3 + 2\alpha_4 n = n - (m_2 + m_3) \\ &\geq n - (n+1-j) = j - 1. \end{aligned}$$

Таким образом, выполняется (8). Лемма доказана.
Обозначим $d_n = \text{НОК}(1, 2, ..., n)$.

Лемма 3. *Справедливо представление вида*

$$\Omega \equiv d_{\alpha n}\omega = B\left(\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3} + i\arctan\frac{1}{\sqrt{15}}\right) + B_0,$$

где $B = 124 d_{\alpha n} a_1$, $B_0 \in K$.

Доказательство. Вычислим инетеграл (6) и применим лемму 2:

$$\begin{aligned}
d_{\alpha n}\omega &= d_{\alpha n}124\left(a_1\ln\frac{x}{62-x}\Bigg|_{31}^{35+i\sqrt{15}}+\sum_{j=2}^{n+1}\frac{a_j}{j-1}\left(\frac{1}{(27-i\sqrt{15})^{j-1}}-\frac{1}{(35+i\sqrt{15})^{j-1}}\right)\right.\\
&+\left.\int\limits_{31}^{35+i\sqrt{15}}Q_{\alpha n-2}dx\right)=d_{\alpha n}124\left(a_1\ln\frac{35+i\sqrt{15}}{27-i\sqrt{15}}+\right.\\
&+\sum_{j=2}^{n+1}\frac{a_j}{j-1}\left(\frac{1}{\left(\left(4+i\sqrt{15}\right)\left(3-i\sqrt{15}\right)\right)^{j-1}}-\frac{1}{\left(\left(4+i\sqrt{15}\right)\left(5-i\sqrt{15}\right)\right)^{j-1}}\right)\\
&+\left.\int\limits_{31}^{35+i\sqrt{15}}Q_{\alpha n-2}dx\right)=d_{\alpha n}2\left(A_1\ln\frac{5-i\sqrt{15}}{3-i\sqrt{15}}+\right.\\
&+\sum_{j=2}^{n+1}\frac{A_j}{j-1}\left(\frac{31}{4+i\sqrt{15}}\right)^{j-1}\left(\left(\frac{4\sqrt{15}i}{(3-i\sqrt{15})}\right)^{j-1}-\left(\frac{4\sqrt{15}i}{(5-i\sqrt{15})}\right)^{j-1}\right)\\
&= d_{\alpha n}2\left(A_1\left(\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}+i\arctan\frac{1}{\sqrt{15}}\right)\right.\\
&+\sum_{j=2}^{n+1}\frac{A_j\left(4-i\sqrt{15}\right)^{j-1}}{j-1}\left(\left(\frac{-5+i\sqrt{15}}{2}\right)^{j-1}-\left(\frac{-3+i\sqrt{15}}{2}\right)^{j-1}\right)\\
&+\left.62\int\limits_{31}^{35+i\sqrt{15}}Q_{\alpha n-2}dx\right).
\end{aligned}$$

Очевидно, что $d_{\alpha n}\int\limits_{31}^{35+i\sqrt{15}}Q_{\alpha n-2}dx\in K$.

Также легко по индукции показать, что $2\left(\frac{-5+i\sqrt{15}}{2}\right)^k\in K$, $2\left(\frac{-3+i\sqrt{15}}{2}\right)^k\in K$, где $k\in\mathbb{N}$.

И лемма доказана.

Ключевое значение в дальнейших рассуждениях играет лемма доказанная в статье М. Хата [[6], замечание 2.1].

Лемма 4. *Пусть γ – вещественное иррациональное число, $\varepsilon_n=q_n\gamma-p_n$, где $p_n,\ q_n\in\mathbb{Z}$ для всех $n\in\mathbb{N}$;*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|q_n|=\sigma,\ \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln|\varepsilon_n|\le-\tau,\tau>0.$$

Тогда справедлива оценка $\mu(\gamma)\le 1+\frac{\sigma}{\tau}$.

4. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 сводится к применению леммы 4 для линейной формы

$$\varepsilon_n=\mathrm{Re}\Omega=q_n\ln\frac{5}{3}-p_n,$$

где $q_n=62d_{\alpha n}a_1\in\mathbb{Z}$, $p_n=-\mathrm{Re}B_0\in\mathbb{Z}$ (см. леммы 2 и 3).

Асимптотику линейной формы ε_n, асимптотику $|q_n|$ вычислим с помощью метода перевала. Учитывая стандартность данной процедуры (см., например, работы [6], [11], [15]), ограничимся лишь некоторыми комментариями.

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{f}(x) = \frac{(x-31)^{\alpha_1}\,(P_1(x))^{\alpha_2}\,(P_2(x))^{\alpha_3}\,15^{\alpha_4}}{x(62-x)}.$$

С помощью замены $t=(x-31)^2$ функция $\widetilde{f}(x)$ может быть приведена к виду

$$f(t) = \frac{t^{\frac{\alpha_1}{2}}\left(t^2-2t+961\right)^{\alpha_2}\left(3t^2-4t+961\right)^{\alpha_3}15^{\alpha_4}}{961-t}.$$

Найдем корни уравнения $\frac{d}{dt}\ln f(t)=0$:

$$t_{1,2}=0.5517696\ldots\pm i17.7275714\ldots,\ t_{3,4}=0.5595199\ldots\pm i18.0536875\ldots,\ t_5=2881.8773105.$$

Имеем

$$\begin{aligned} -\tau &= 1.0001216+ln|f(t_{3,4})|=-1.1944653\ldots; \\ \sigma &= 1.0001216+ln|f(t_5)|=5.3893579\ldots, \end{aligned}$$

и мы использовали очевидное неравенство $|\varepsilon_n|\le|\Omega|$.

Из леммы 4 следует

$$\mu\left(\ln\frac{5}{3}\right)\le 1+\frac{\sigma}{\tau}=5.5119417\ldots,$$

и теорема 1 доказана.

5. Заключение

Улучшение оценки меры иррациональности числа $\ln\frac{5}{3}$ по сравнению с результатом Е. Б. Томашевской стало возможным за счет введения нового квадратичного симметризованного многочлена. Дальнейшее усовершенствование конструкции интеграла может привести к лучшему результату.

Замечание. Применяя лемму 4 для линейной формы $\overline{\varepsilon_n}=\frac{i}{\sqrt{15}}\mathrm{Im}\Omega=\overline{q_n}\frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\frac{1}{\sqrt{15}}-\overline{p_n}$, где $\overline{q_n}\in\mathbb{Z}$, $\overline{p_n}\in\mathbb{Z}$, получим оценку

$$\mu\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\frac{1}{\sqrt{15}}\right)\le 5.5119417\ldots.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function // Manuscripta Math. 1993. Vol. 81. P. 183-202.

2. Rhin G. Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité // Progr. in Math. 1987. Vol. 71. P. 155-164.

3. Рухадзе Е. А. Оценка снизу приближения $\ln 2$ рациональными числами // Вестник Московского университета. Сер.1, Математика, механика. 1987. № 6. С. 25-29.

4. Hata M. Irrationality measures of the values of hypergeometric functions // Acta Arith. 1992. Vol. LX. P. 335-347.

5. Hata M. Legendre type polynomials and irrationality measures // J. Reine Angew. Math. 1990. Vol. 407. № 1. P. 99-125.

6. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arith. 1993. Vol. LXIII. № 4. P. 325-349.

7. Зудилин В. В. Эссе о мерах иррациональности π и других логарифмов // Чебышевский сборник. 2004. Том 5. № 2. С. 49-65.

8. Marcovecchio R. The Rhin-Viola method for $\ln 2$ // Acta Aritm. 2009. Vol. 139.2. P. 147-184.

9. Сальникова Е. С. Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов // Математические заметки. 2008. Том 83. № 3. С. 428-438.

10. Томашевская Е. Б. О диофантовых приближениях значений функции $\log x$ // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Том 16. № 6. С. 157-166.

11. Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 3$ // Доклады Академии наук. 2007. Том 417. № 6. С. 753-755.

12. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π // Успехи математических наук. 2008. Том 63. № 3. С. 163-164.

13. Wu Q, L. Wang. On the irrationality measure of $\log 3$ // Journal of Number Theory. 2014. Vol. 142. P. 264-273.

14. Бондарева И. В., Лучин М. Ю., Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 7$ // Математические заметки (в печати).

15. Wu Q. On the linear independence measure of logarithms of rational numbers // Math. Comput. 2002. Vol. 72. № 242. P. 901-911.

REFERENCES

1. Heimonen, A., Matala-aho, T., Väänänen, K. 1993, "On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function", Manuscripta Math., vol. 81, pp. 183-202.

2. Rhin, G. 1987, "Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité", Progr. in Math., vol. 71, pp. 155-164.

3. Rukhadze E. 1987, "A lower bound for the approximation of $\ln 2$ by rational numbers", Вестник Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., № 6. С. 25-29. (Russian)

4. Hata, M. 1992, "Irrationality measures of the values of hypergeometric functions", Acta Arith., vol. LX, pp 335-347.

5. Hata, M. 1990, "Legendre type polynomials and irrationality measures", J. Reine Angew. Math., vol. 407, № 1, pp. 99-125.

6. Hata M. 1993, "Rational approximations to π and some other numbers", Acta Arith., vol. LXIII, № 4, pp. 325-349.

7. Zudilin W. 2004, "An essay on irrationality measures of π and other logarithms", Chebyshevskii Sbornik, vol. 5, № 2. pp. 49-65. (Russian)

8. Marcovecchio, R. 2009, "The Rhin-Viola method for $\ln 2$", Acta Aritm., vol. 139.2, pp. 147-184.

9. Salnikova E. 2008, "Diophantine approximations of $\log 2$ and other logarithms", Mathematical Notes, vol. 83, № 3, pp. 428-438. (Russian)

10. Tomashevskaya E. 2010, "On Diophantine approximations to $\log x$", Journal of Mathematical Sciences, vol. 16, № 6, pp. 157-166. (Russian)

11. Salikhov, V. H. 2007, "On the irrationality measures of $\ln 3$", Doklady Mathematics, vol. 417, № 6, pp. 753-755. (Russian)

12. Salikhov, V. H. 2008, "On the irrationality measures of π", Russian Mathematical Surveys, vol. 63, № 3, pp. 163-164. (Russian)

13. Wu Q, L. Wang. 2014, "On the irrationality measure of $\log 3$", Journal of Number Theory, vol. 142, pp. 264-273.

14. Bondareva I., Luchin M., Salikhov, V. H. "On the irrationality measure of $\ln 7$", Mathematical Notes (in print) (Russian)

15. Wu Q. 2002, "On the linear independence measure of logarithms of rational numbers", Math. Comput., vol. 72, № 242, pp. 901-911.

Получено 25.06.2018 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.