ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-306-329

Нули функции Дэвенпорта–Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой

З. Х. Рахмонов, Ш. А. Хайруллоев, А. С. Аминов

Рахмонов Зарулло Хусенович — доктор физико-математических наук, профессор, академик АН Республики Таджикистан, директор Института математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru
Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич — кандидат физико-математических наук, докторант кафедры алгебры и теории чисел, Таджикского национального университета (г. Душанбе).
e-mail: shamsullo@rambler.ru
Аминов Асламбек Собирович — научный сотрудник Института математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: aminov.as@bk.ru

Аннотация

Дэвенпорт и Хейльбронн ввели функцию $f(s)$ и показали, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа, однако для $f(s)$ гипотеза Римана не выполняется, и более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\,s > 1$, $0 < Im\,s \leq T$ превосходит cT, $c > 0$ — абсолютная постоянная. С.М. Воронин доказал, что тем не менее, критическая прямая $Res = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, то есть для $N_0(T)$ — числа нулей $f(s)$ на отрезке $Res = 1/2$, $0 < Ims \leqslant T$ имеет место оценка $N_0(T) > cT\exp\left(0,05\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right)$, где $c > 0$ — абсолютная постоянная, $T \geqslant T_0 > 0$. А.А.Карацуба исследуя количество нулей функции $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой доказал: если ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0.001; $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ и $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, то выполняется соотношение

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

В работе доказано, что для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках вида $[T, T+H]$ критической прямой последнее соотношение справедливо при $H \geqslant T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$. Этот результат в частности является приложением новых равномерных по параметрам оценок специальных тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$ в терминах экспоненциальных пар, в котором задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра H сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар.

Ключевые слова: функция Дэвенпорта-Хейльбронна, экспоненциальная пара, гипотеза Римана, успокаивающие множители Сельберга.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

З. Х. Рахмонов, Ш. А. Хайруллоев, А. С. Аминов Нули функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 306–329.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-306-329

Zeros of the Davenport–Heilbronn function in short intervals of the critical line

Z. Kh. Rakhmonov, Sh. A. Khayrulloev, A. S. Aminov

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru
Khayrulloev Shamsullo Amrulloevich — candidate of physical and mathematical Sciences, doctoral candidate of the Department of algebra and number theory, Tajik national University (Dushanbe).
e-mail: shamsullo@rambler.ru
Aslambek Sobirovich — Researcher A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: aminov.as@bk.ru

Abstract

Davenport and Heilbronn introduced the function $f(s)$ and showed that $f(s)$ satisfies the Riemannian type functional equation, however, the Riemann hypothesis fails for $f(s)$, and moreover, the number of zeros of $f(s)$ in the region $Re\,s > 1$, $0 < Im\,s\ leT$ exceeds cT, where $c > 0$ is an absolute constant. S.M. Voronin proved that, nevertheless, the critical line $Re\,s = \frac{1}{2}$ is an exceptional set for the zeros of $f(s)$, i.e. for $N_0(T)$, where $N_0(T)$ is the number of zeros of $f(s)$ on the interval $Re\,s = \frac{1}{2}$, $0 < Im\,s \leqslant T$, we have the estimate $N_0(T) > cT\exp\left(0.05\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right)$, where $c > 0$ is an absolute constant, $T \geqslant T_0 > 0$. While studying the number of zeros of the function $f(s)$ in short intervals of the critical line, A.A. Karatsuba, proved: if ε and ε_1 are arbitrarily small fixed positive numbers not exceeding 0.001; $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$ and $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, then we have

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

This paper demonstrates that for the number of zeros of the Davenport-Heilbronn function $f(s)$ in short intervals of the form $[T, T+H]$ of the critical line the last relationship holds for $H \geqslant T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$. In particular, this result is an application of a new, in terms of exponential pairs, estimates of special exponential sums $W_j(T)$, $j = 0, 1, 2$ which are uniform across parameters, where the problem of the non-triviality of estimates for these sums with respect to the parameter H is reduced to the problem of finding the exponential pairs..

Keywords: Davenport-Heilbronn function, exponential pair, Riemann hypothesis, Selberg soothing factors.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

Z. Kh. Rakhmonov, Sh. A. Khayrulloev, A. S. Aminov, 2019, “Zeros of the Davenport-Heilbronn function in short intervals of the critical line”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 306–329.

1. Введение

Пусть $\chi(n)$ комплексный характер по модулю 5 такой, что $\chi(2) = i$,

$$æ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1}, \qquad 0 < æ < 1.$$

Функцией *Дэвенпорта-Хейльбронна* называется функция, которая определяется равенством

$$f(s) = \frac{1-iæ}{2}L(s,\chi) + \frac{1+iæ}{2}L(s,\bar{\chi}),$$

где $L(s,\chi)$ — функция Дирихле. Функцию $f(s)$ ввели и исследовали Дэвенпорт и Хейльбронн [1] , (см. также [2] с. 283 – 287). Они показали, что $f(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению римановского типа

$$\left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)f(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{(1-s)+1}{2}\right)f(1-s), \tag{1}$$

однако для $f(s)$ гипотеза Римана, (все комплексные нули $f(s)$ лежат на прямой $Re\,s = 0.5$), не выполняется и, более того, число нулей $f(s)$ в области $Re\,s > 1$, $0 < Im\,s \le T$ превосходит cT, $c > 0$ — абсолютная постоянная.

В 1984 г. С. М. Воронин [3] доказал, что при $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ справедливо неравенство $N(\sigma_2,T) - N(\sigma_1,T) > c_2T$, где $c_2 = c_2(\sigma_1,\sigma_2) > 0$. В 1980 г. С. М. Воронин [4] доказал, что, тем не менее, *критическая прямая* то есть $Res = \frac{1}{2}$ является исключительным множеством для нулей $f(s)$, то есть для $N_0(T)$ — числа нулей $f(s)$ на отрезке $Res = 1/2$, $0 < Ims \leqslant T$ имеет место оценка

$$N_0(T) > cT\exp\left(\frac{1}{20}\sqrt{\ln\ln\ln\ln T}\right),$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная, $T \geqslant T_0 > 0$.

Количество нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой впервые исследовал А. А. Карацуба. Он в 1989 году доказал [5, 6], что если ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0.001, и $T \ge T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ и $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$, то выполняется соотношение

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \tag{2}$$

В 1993 г. А. А. Карацуба [7, 8] получил более точную оценку: множитель $(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ в неравенстве (2) он заменил на $(\ln T)^{\frac{1}{2}}\exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T})$, следствием чего явилось неравенство

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}}\exp(-c_3\sqrt{\ln\ln T}).$$

В 2017 г. С. А. Гриценко [9] усилил последнюю оценку и получил неравенство

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Затем он [10] получил новые верхние и нижние оценки дробных моментов успокоенных рядов Дирихле, из которых следует

$$N_0(T) > T(\ln T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Основным результатом настоящей работы является доказательство неравенства (2) для промежутков, имеющих более короткую длину.

Теорема 1. *Пусть ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$, c_4, c_5, c_g *- абсолютные положительные постоянные, превосходящие* 1,

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\,2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}\,c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}\,c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

Тогда при $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant c_7 H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}\ln\ln T.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $T_0 = T_0(\varepsilon,\varepsilon_1)$ - такое, что выполняется соотношение

$$c_7(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}\ln\ln T_0 = \frac{(\ln T_0)^{\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}\ln\ln T_0\cdot\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\,2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}\,c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}\,c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}} \geqslant 1.$$

Поэтому из теоремы 1 следует

Следствие 1. *Пусть ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$. *Тогда при* $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Теорема 1 доказывается методом работы [5] в соединение с идеями и методами работ [11, 12, 13, 14, 15, 16]. Основным утверждением, позволившим доказать неравенства (2) для промежутков, имеющих более короткую длину является лемма 4 о новых равномерных по параметрам оценок специальных тригонометрических сумм $W_j(T)$, $j = 0,1,2$ в терминах экспоненциальных пар, в котором задача о нетривиальности оценки этих сумм относительно параметра H сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар.

Обозначения. Всюду ниже будем считать, что ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие $0,001$; $T \leq t \leq T+H$, $T \geqslant T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$; $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$; $P = \sqrt{5T(2\pi)^{-1}}$; $\mathscr{L} = \ln P$; $X = T^{0,01\varepsilon_1}$; $c_1,\ c_2,\ \ldots$ — абсолютные положительные постоянные;

$$r(n) = \frac{1-i\text{æ}}{2}\chi(n) + \frac{1+i\text{æ}}{2}\bar{\chi}(n).$$

2. Вспомогательные утверждения

Пусть вещественные числа $\alpha(\nu)$ при $Re\, s > 1$ находятся из соотношения

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha(\nu)}{\nu^s} = \prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\frac{1}{2}} = \prod_{p\equiv\pm1(mod\,5)}\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)\,p^{ks}}\right) = \prod_p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(p^k)}{p^{ks}},$$

$$\alpha(p^k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k=0;\\ -\dfrac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k-1)}, & \text{если } k\geqslant 1 \text{ и } p\equiv\pm1(mod\,5).\\ 0, & \text{если } k\geqslant 1 \text{ и } p\not\equiv\pm1(mod\,5),\end{cases}$$

где $(2k-1)!! = 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)$. Из определения чисел $\alpha(\nu)$ следует мультипликативность функции $\alpha(\nu)$ и $|\alpha(\nu)| < 1$ при любом $\nu > 1$. Отсюда и из соотношения $\chi(p^k) = (\pm 1)^k$, $p \equiv \pm 1 (mod\, 5)$ следует, что $\beta(\nu)\chi(\nu) = \beta(\nu)\overline{\chi}(\nu) \equiv h(\nu)$ и $|h(\nu)| \leqslant 1$. Пусть далее

$$\varphi(s) = \sum_{\nu<X} \frac{\beta(\nu)\chi(\nu)}{\nu^s} = \sum_{\nu<X} \frac{h(\nu)}{\nu^s},$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu)\left(1 - \dfrac{\ln\nu}{\ln X}\right), & 1 \le \nu < X, \\ 0, & \nu \ge X, \end{cases} \tag{3}$$

Определение 1. *Функции $F(t)$ и $\theta(t)$ задаются равенствами*

$$F(t) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-\frac{it}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|} f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 = e^{i\theta(t)} f\left(\frac{1}{2}+it\right)\left|\varphi\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2.$$

Лемма 1. *Пусть T такое, что $T - \dfrac{\pi}{4} = 4\pi k$, k — целое число. Тогда при $T \le t \le T+H$ справедлива следующая формула:*

$$F(t) = 2\sum_{\lambda\le P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \cos t \ln\frac{P}{\lambda} + O(T^{-0{,}01}),$$

где λ — положительные рациональные числа, знаменатель которых не превосходит X,

$$A(\lambda) = \sum_{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)r(n)}{\nu_2}. \tag{4}$$

Доказательство см. [6], стр. 226.

Определение 2. *Суммами А. Сельберга вида $W(\theta)$ и вида $S(Y)$ называются соответственно суммы*

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4}, \qquad S(Y) = \sum_{\lambda\le Y} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}},$$

где $\beta(\nu)$ и $A(\lambda)$ — функции, определённые соответственно формулами (3) и (4), а λ — положительное рациональное число, знаменатель которого не превосходит X.

Лемма 2. *Пусть $T^{0,1} \leqslant Y \le T$, $\frac{1}{4} \le \theta \le \frac{1}{2}$, тогда справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$S(Y) = \frac{2(1+æ^2)}{5(1-2\theta)} Y^{1-2\theta} W(0) + \left(\frac{c_1}{1-2\theta} + c_2\right) W(1-2\theta) + O\left(Y^{-2\theta} X^2 \ln^2 X\right),$$

$$c_1 = -\frac{7^{1-2\theta} + 13^{1-2\theta} + æ^2(9^{1-2\theta} + 11^{1-2\theta})}{5\cdot 2^{1-2\theta}}, \qquad c_2 = 1 + \frac{1}{4^{2\theta}} + \frac{æ^2}{2^{2\theta}} + \frac{æ^2}{3^{2\theta}} +$$

$$+ 10\theta \int_{0{,}5}^{\infty} \left(\frac{1}{(5u+1)^{2\theta+1}} + \frac{1}{(5u+4)^{2\theta+1}} + \frac{æ^2}{(5u+2)^{2\theta+1}} + \frac{æ^2}{(5u+3)^{2\theta+1}}\right)\rho(u)du.$$

Доказательство см. [6], стр. 227.

Лемма 3. *При $0 \le \theta \le \frac{1}{2}$ для $W(\theta)$ справедлива оценка*

$$W(\theta) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \left(\frac{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} = O\left(\frac{X^{2\theta}}{\sqrt{\ln X}}\right).$$

Доказательство см. [6], стр. 229.

Определение 3. *Если $B \ge 1$, $0 < h \le B$, $F(u) \in C^\infty(B, 2B)$, $A \ge 1$,*

$$AB^{1-r} \ll |F^{(r)}(u)| \ll AB^{1-r},\ r = 1, 2, 3, \dots,$$

где постоянные под знаком $\ll$ зависят только от r, и имеет место оценка

$$\sum_{B\le n\le B+h} e(F(n)) \ll A^k B^l, \quad 0 \le k \le 0,5 \quad 0,5 \le l \le 1,$$

то пара (k, l) называется экспоненциальной парой.

3. Оценка тригонометрических сумм $W_j(T)$

При $j = 0, 1, 2$ определим три вида сумм $W_j(T)$. Для этого кроме уже введённых параметров в конце первого параграфе введём дополнительные параметры, от которых могут зависеть эти суммы: $k = [\ln \mathscr{L}]$; $\eta = c_1 k \mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$. Пользуясь определением чисел $A(\lambda)$ в (4) и обозначениями функций

$$B(\varphi) = \left(\frac{\varphi^{i\eta} - 1}{\ln \varphi}\right)^k, \qquad \overline{B(\psi)} = \left(\frac{\psi^{-i\eta} - 1}{\ln \psi}\right)^k,$$

суммы $W_j = W_j(T)$ определим равенствами

$$W_0 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_1 = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right) \overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)} \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

$$W_2 = \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

А.А. Карацуба [5] при $H \geqslant T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$ для этих сумм получил оценки вида

$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j = 0, 2; \quad W_1(T) \ll \left(\varepsilon_2^{-2k}(\ln T)^{-2k} + \varepsilon_2^{-k}\eta^k(\ln T)^{-k}\right) T^{-\varepsilon_1}.$$

В лемме 4 в сочетании методов работ [11, 12, 13, 14, 15, 16] и метода экспоненциальных пар для тригонометрических сумм $W_j(T)$ подобные оценки получены для параметра H с меньшим порядком роста.

Лемма 4. *Пусть ε_1 и ε_2 - произвольные малые фиксированные положительные числа, не превосходящие $0,001$, k — натуральное число, $0 < \eta < 1$, (κ, λ) — произвольная экспоненциальная пара,*

$$\theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2}, \qquad æ(\kappa, \lambda) = \frac{52 + \kappa - \lambda}{50\kappa + 50}, \qquad \sigma(\kappa) = \frac{\ln \mathscr{L}}{(\kappa + 1)\ln T}.$$

Тогда при $H = T^{\theta(\kappa,\lambda)+æ(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}$ *справедливы оценки*

$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j=0,\ j=2; \qquad W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)T^{-0,5(\lambda-\kappa)\varepsilon_2}\cdot T^{-\varepsilon_1}.$$

Показатель $\theta(\kappa;\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2(\kappa+1)}$ также появляется в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге $x^2+y^2 \leqslant R$ в форме

$$K(R) = \#\left\{(x,y):\ x^2+y^2 \leqslant R,\ x,y\in Z\right\} = \pi R + O\left(R^{\theta(\kappa;\lambda)+\varepsilon}\right),$$

и в оценке остаточного члена в проблеме делителей Дирихле о числе целых точек в гиперболе $xy \leqslant N$, $x>0$, $y>0$. Наилучшая оценка сверху для $\theta(\kappa;\lambda)$ принадлежит М. Хаксли [17]. Он доказал, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\theta(\kappa,\lambda) = \min_{\kappa,\lambda\in\mathcal{P}}\frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2} \leqslant \frac{131}{416} = \frac{1}{3}-\frac{23}{3\cdot 416} \approx 0.31490,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар. Отсюда из леммы 4 получаем следующее.

Следствие 2. *Пусть* ε_1 *и* ε_2 *- произвольные малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$, k *— натуральное число,* $0<\eta<1$. *Тогда при* $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$ *справедливы оценки:*

$$W_j(T) \ll T^{-\varepsilon_1}, \quad j=0,\ j=2; \qquad W_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)T^{-\varepsilon_1}.$$

Доказательство леммы 4 для удобства разобьём на этапы.

1. Оценка части суммы $W_j(T)$, $j=0,1,2$ **с условием** $\lambda_2 > \lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})$**.** Если в суммах $W_j(T)$, $j=0,1,2$ выполняется условие $\lambda_2 > \lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})$, то воспользовавшись известным неравенством $\ln(1+x) > 0,5x$, $0<x\leqslant 0,5$, имеем

$$\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right) < \exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{H}\right)\right)^2\right) < \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right).$$

Обозначая соответствующие части сумм $W_j(T)$, $j=0,1,2$, для которых выполняется условие $\lambda_2-\lambda_1 > \mathscr{L}H^{-1}$, через $W'_j(T)$, $j=0,1,2$, и воспользовавшись при $j=1$ соотношением

$$\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right| = \frac{\left|\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i\eta}-1\right|^k}{\left(\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right)^k} = \frac{\left|2\sin\left(\frac{\eta}{2}\ln\frac{P}{\lambda}\right)\right|^k}{(\ln P-\ln\lambda)^k} \leqslant \frac{2^k}{(\ln P-\ln P^{1-\varepsilon_2})^k} = \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^k, \tag{5}$$

имеем

$$|W'_j(T)| < \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)\left(\sum_{\lambda<P}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\right)^2; \qquad j=0,2;$$

$$|W'_1(T)| < \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right)\left(\sum_{\lambda<P^{1-\varepsilon_2}}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}}\right)^2.$$

Далее из определения суммы $A(\lambda)$ и соотношений $|r(m)|\leqslant 1$ и $|h(\nu)|\leqslant 1$ имеем

$$\sum_{\lambda<P}\frac{|A(\lambda)|}{\sqrt{\lambda}} \leqslant \sum_{\lambda<P}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum_{\substack{\frac{n\nu_1}{\nu_2}=\lambda\\ \nu_1,\nu_2<X}}\frac{|h(\nu_1)||h(\nu_2)||r(n)|}{\nu_2} = \sum_{\nu_1,\nu_2<X}\frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2}}\sum_{n<\frac{P\nu_2}{\nu_1}}\frac{1}{\sqrt{n}} \ll P^{\frac{1}{2}}X\ln X.$$

Следовательно,

$$W'_j(T) \ll \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right) PX^2\ln^2 X, \qquad j=0,2;$$
$$W'_1(T) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right) P^{1-\varepsilon_2}X^2\ln^2 X.$$

Осталось рассмотреть слагаемые с условием $\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})$. Промежутки $0<\lambda_1<P$ в $W_0(T)$, $0<\lambda_1<P^{1-\varepsilon_2}$ в $W_1(T)$, и $P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<P$ в $W_2(T)$, разобьём целыми числами $\Lambda=\Lambda(j)$ на $\ll\mathscr{L}$ промежутков вида $\Lambda<\lambda_1\leqslant\Lambda_1\leq 2\Lambda$. Следовательно для чисел Λ выполняется соотношение

$$2\Lambda=2\Lambda(j)<E_jP, \quad \text{где} \quad E_j=\begin{cases} P^{-\varepsilon_2}, & \text{если } j=1;\\ 1, & \text{если } j=0 \text{ или } j=2.\end{cases} \tag{6}$$

Обозначая через $W_j(\Lambda)$, $j=0,1,2$ максимальную из получившихся таким образом сумм, приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} W_j(T) &\ll \mathscr{L}|W_j(\Lambda)| + \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right) PX^2\ln^2 X, \qquad j=0,2;\\ W_1(T) &\ll \mathscr{L}|W_1(\Lambda)| + \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{16}\right) P^{1-\varepsilon_2}X^2\ln^2 X.\end{aligned} \tag{7}$$

2. Оценка $W_j(\Lambda)$ с условием $\Lambda\leqslant HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$. Если $\Lambda\leqslant HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$, то в силу того, что рациональные числа λ_1 и λ_2 имеют вид

$$\lambda_1<\lambda_2, \qquad \lambda_1=\frac{n_1\nu_1}{\nu_2}, \qquad \lambda_2=\frac{n_2\nu_3}{\nu_4}, \qquad \nu_i<X, \qquad i=1,2,3,4.$$

находим

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=1+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1}\geqslant 1+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2\Lambda}>1+\frac{1}{2\Lambda}\cdot\frac{n_2\nu_3\nu_2-n_1\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_4}>1+\frac{1}{2\nu_2\nu_4\Lambda}\geqslant 1+\frac{\mathscr{L}}{2H},$$

поэтому

$$\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)<\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{2H}\right)\right)^2\right)<\exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right).$$

Оценивая суммы $W_j(\Lambda)$, $j=0,1,2$ при $\Lambda\leqslant HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$, аналогично суммам W'_j, $j=0,1,2$, находим, что

$$\begin{aligned} W_j(\Lambda) &\ll \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right) PX^2\ln^2 X, \qquad j=0,2;\\ W_1(\Lambda) &\ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k} \exp\left(-\frac{\mathscr{L}^2}{64}\right) P^{1-\varepsilon_2}X^2\ln^2 X.\end{aligned} \tag{8}$$

3. Выражение $W_j(\Lambda)$ с условием $\Lambda>HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$ через $C(u,h)$ и $F_j(h,\nu)$. Не ограничивая общности можно считать, что $\Lambda>HX^{-2}\mathscr{L}^{-1}$, $B_0\left(\frac{P}{\lambda}\right)=B_2\left(\frac{P}{\lambda}\right)=1$ и $B_1\left(\frac{P}{\lambda}\right)=B\left(\frac{P}{\lambda}\right)$. Тогда

$$W_j(\Lambda)=\sum_{\Lambda<\lambda_1\leqslant\Lambda_1}\sum_{\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_1(1+\mathscr{L}H^{-1})}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}B_j\left(\frac{P}{\lambda_1}\right)\overline{B_j\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)}\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right),$$

где $\delta = 0$ и $HX^{-2}\mathscr{L}^{-1} < \Lambda < \Lambda_1 \leq 2\Lambda < P^{1-\varepsilon_2}$ при $j = 1$, а $\delta = 1$ и $HX^{-2}\mathscr{L}^{-1} < < \Lambda < \Lambda_1 \leq 2\Lambda < P$ при $j = 0, 2$.

Воспользовавшись определением $A(\lambda)$, и обозначением $\dfrac{\nu_1\nu_4}{\nu_2\nu_3} = \dfrac{a}{b}$, $(a, b) = 1$, представим сумму $W(\Lambda)$ в виде

$$W_j(\Lambda) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X} \frac{h(\nu_1)h(\nu_2)h(\nu_3)h(\nu_4)}{\sqrt{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} W_j(\Lambda,\nu); \quad j = 0, 1.2; \quad \nu = (\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4); \tag{9}$$

$$W_j(\Lambda,\nu) = \sum_{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1}<n_1\leqslant\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}} \sum_{\frac{n_1a}{b}<n_2\leqslant\frac{n_1a}{b}(1+\mathscr{L}H^{-1})} r(n_1)r(n_2)\Phi_j(n_1,n_2,\nu)\left(\frac{n_1a}{n_2b}\right)^{iT},$$

$$\Phi_j(n_1,n_2,\nu) = \frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{n_1a}{n_2b}\right)^2\right)}{\sqrt{n_1n_2}} B_j\left(\frac{P\nu_2}{n_1\nu_1}\right)\overline{B_j\left(\frac{P\nu_4}{n_2\nu_3}\right)}.$$

Записав n_1 и n_2 в виде членов арифметических прогрессий соответственно с разностями $5a$, и $5b$, то есть

$$\begin{aligned} &n_1 = 5bm + b_1, && 0 \leqslant b_1 < 5b, && \frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b} < m \leqslant \frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b}, \\ &n_2 = 5am_1 + a_1, && 0 \leqslant a_1 < 5a, && m + \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a} < m_1 \leqslant m + \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a} + \left(m + \frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H}, \end{aligned}$$

вводя обозначение

$$N = \frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b}, \quad N_1 = \frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b}, \quad \alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a}, \quad \omega(m) = \left(m + \frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H},$$

делая суммирование по b_1 и a_1 внешним, а также имея в виду, что $r(5bm + b_1) = r(b_1)$ и $r(5am_1 + a_1) = r(a_1)$, приходим к следующему соотношению:

$$W_j(\Lambda,\nu) = \sum_{0\leqslant b_1<5b} r(b_1) \sum_{0\leqslant a_1<5a} r(a_1) W_j(\Lambda,\nu,m,m_1), \tag{10}$$

$$W_j(\Lambda,\nu,m,m_1) = \sum_{N<m\leqslant N_1} \sum_{m+\alpha<m_1\leqslant m+\alpha+\omega(m)} \Phi_j(5bm + b_1, 5am_1 + a_1, \nu)\left(\frac{m + \frac{b_1}{5b}}{m_1 + \frac{a_1}{5a}}\right)^{iT}.$$

Переменная суммирования m_1 принимает все значения целых чисел из полуинтервала $m + \alpha < m_1 \leqslant m + \alpha + \omega(m)$, поэтому заменяя m_1 на $m + h$, то есть полагая $m_1 = m + h$, где h принимает значения из полуинтервала $\alpha < h \leqslant \alpha + \omega(m)$, представим сумму W_4 в виде

$$W_j(\Lambda,\nu,m,m_1) = \sum_{N<m\leqslant N_1} \sum_{\alpha<h\leqslant\alpha+\omega(m)} \Phi_j(5bm + b_1, 5a(m + h) + a_1, \nu)\left(\frac{m + \frac{b_1}{5b}}{(m + h) + \frac{a_1}{5a}}\right)^{iT},$$

Заметим, что $h \geqslant 0$, и это следует из соотношения

$$-1 < -1 + \frac{1}{5a} \leqslant \alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a} \leqslant 1 - \frac{1}{5b} < 1.$$

Меняя порядки суммирования по h и m, имея в виду, что условия $h \leqslant \alpha + \omega(m)$ и $m \geqslant (h-\alpha)\frac{H}{\mathscr{L}} - \frac{b_1}{5b}$ равносильны, и вводя обозначения $N_2 = \max\left(N, \dfrac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha) - \dfrac{b_1}{5b}\right)$, найдем

$$W_j(\Lambda, \nu, m, m_1) = \sum_{\alpha < h \leqslant \alpha + \omega(N_1)} \sum_{N_2 < m \leqslant N_1} \Phi_j(5bm + b_1, 5a(m+h) + a_1, \nu) \left(\frac{m + \frac{b_1}{5b}}{m + h + \frac{a_1}{5a}}\right)^{iT},$$

К сумме по m применяя преобразования Абеля, получаем

$$W_j(\Lambda, \nu, m, m_1) = \sum_{\alpha < h \leqslant \alpha + \omega(N_1)} \left(-\int_{N_2}^{N_1} C(u,h) f_j'(u,h)du + C(N_1, h) f_j(N_1, h)\right),$$

$$f_j(u,h) = \Phi_j(5bu + b_1, 5a(u+h) + a_1, \nu), \qquad C(u,h) = \sum_{N_2 < m \leqslant u} \left(\frac{m + \frac{b_1}{5b}}{m + h + \frac{a_1}{5a}}\right)^{iT}.$$

Подставляя правую часть полученной формулы в (10), а затем в (9), и переходя к оценкам, найдём

$$W_j(\Lambda) \leqslant \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 < X} \frac{1}{\sqrt{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}} \sum_{0 \leqslant b_1 < 5b} \sum_{0 \leqslant a_1 < 5a} \sum_{\alpha < h \leqslant \alpha + \omega(N_1)} F_j(h, \nu) \max_{N_2 < u \leqslant N_1} |C(u,h)|, \tag{11}$$

$$F_j(h,\nu) = \int_{N_2}^{N_1} |f_j'(u,h)|du + |f_j(N_1, h)|.$$

Далее оценим $F_j(h,\nu)$, $j = 0, 1, 2$, а затем $|C(u,h)|$. Заметим, что $F_0(h,\nu)$ и $F_2(h,\nu)$ тождественно равны так как $f_2(u,h) = f_0(u,h)$, поэтому достаточно оценить $F_0(h,\nu)$ и $F_1(h,\nu)$.

4. Оценка $F_0(h,\nu)$. Имея в виду, что $f_0(u,h) = \Phi_0(5bu + b_1, 5a(u+h) + a_1, \nu)$, находим

$$f_0'(u,h) = \left(\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{u + \frac{b_1}{5b}}{u + h + \frac{a_1}{5a}}\right)^2\right)}{5\sqrt{ab}\sqrt{\left(u + \frac{b_1}{5b}\right)\left(u + h + \frac{a_1}{5a}\right)}}\right)' = \frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{u + \frac{b_1}{5b}}{u + h + \frac{a_1}{5a}}\right)^2\right)}{5\sqrt{ab}} \times$$

$$\times \frac{2(H+\delta)\ln\left(1 + \frac{h - \frac{b_1}{5b} + \frac{a_1}{5a}}{u + \frac{b_1}{5b}}\right)\left(h - \frac{b_1}{5b} + \frac{a_1}{5a}\right) - 2u - h - \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a}}{2\left(u + \frac{b_1}{5b}\right)^{\frac{3}{2}}\left(u + h + \frac{a_1}{5a}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Знак $f_0'(u,h)$ совпадает со знаком числителя последней дроби, для определения которой, пользуясь последовательно границами изменения переменных $N_2 < m \leqslant N_1$ и $\alpha < h \leqslant \alpha + \omega(N_1)$, то есть соотношениями

$$N_2 = \max\left(N, \frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha) - \frac{b_1}{5b}\right) = \max\left(\frac{\frac{\Lambda\nu_2}{\nu_1} - b_1}{5b}, \frac{H}{\mathscr{L}}\left(h - \frac{b_1}{5b} + \frac{a_1}{5a}\right) - \frac{b_1}{5b}\right),$$

$$\alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a}, \qquad \omega(N_1) = \left(N_1 + \frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H} = \frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1} \cdot \frac{\mathscr{L}}{5bH},$$

имеем

$$
\begin{aligned}
2(H+\delta)\ln\left(1+\frac{h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}}{u+\frac{b_1}{5b}}\right)\left(h-\frac{b_1}{5b}+\frac{a_1}{5a}\right)-2u-h-\frac{b_1}{5b}-\frac{a_1}{5a}<\\
<2(H+\delta)\ln\left(1+\frac{\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}\cdot\frac{\mathscr{L}}{5bH}}{\frac{\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}}\right)\frac{\Lambda_1\nu_2}{\nu_1}\cdot\frac{\mathscr{L}}{5bH}-\frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}=\\
=\frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}\left(\left(1+\frac{\delta}{H}\right)\ln\left(1+\frac{\mathscr{L}}{H}\right)\mathscr{L}-1\right)<\left(\frac{2\mathscr{L}^2}{H}-1\right)\frac{2\Lambda\nu_2}{5\nu_1 b}<0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $f_0'(u,h)<0$, поэтому с учётом условия $f_0(u,h)>0$ найдём

$$
F_0(h,\nu)=-\int_{N_2}^{N_1}f_0'(u,h)du+f_0(N_1,h)\leqslant f_0(N_2,h).
$$

Для оценки сверху $f_0(u,h)$, возвращаясь к переменным n_1 и n_2, затем к λ_1 и λ_2, далее пользуясь соотношением $\Lambda<\lambda_1<\lambda_2$, имеем

$$
F_0(h,\nu)=f_0(u,N_2)=\sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}}\cdot\frac{\exp\left(-\left(\frac{H+\delta}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\leqslant\frac{1}{\Lambda}\sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}}. \tag{12}
$$

5. Оценка $F_1(h,\nu)$. Для оценки $F_1(h,\nu)$ нам нужны оценки $f_1(u,h)$ и $f_1'(u,h)$—её производная по u. Воспользовавшись обозначениями

$$
\varphi=\varphi(u)=\frac{P\nu_2}{(5bu+b_1)\nu_1},\qquad \psi=\psi(u)=\frac{P\nu_4}{(5a(u+h)+a_1)\nu_3},
$$

и соотношением $f_1(u,h)=\Phi_1(5bu+b_1,5a(u+h)+a_1,\nu)$, получим

$$
\begin{aligned}
&f_1(u,h)=f_0(u,h)\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right),\\
&f_1'(u,h)=f_0(u,h)\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right)_u'+f_0'(u,h)B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))},\\
&\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right)_u'=kB(\varphi)\overline{B(\psi)}\left(\frac{1-i\eta\varphi^{i\eta}(B(\varphi))^{-\frac{1}{k}}}{\left(u+\frac{b_1}{5b}\right)\ln\varphi}+\frac{1+i\eta\psi^{-i\eta}(\overline{B(\psi)})^{-\frac{1}{k}}}{\left(u+h+\frac{a_1}{5a}\right)\ln\psi}\right).
\end{aligned}
$$

Пользуясь оценкой (5), найдем

$$
\begin{aligned}
\left|\left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))}\right)_u'\right|\leqslant\frac{2k}{u\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)}\left(\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|^2+\eta\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|^{\frac{2k-1}{k}}\right)\leqslant\\
\leqslant\frac{2k}{u\,\varepsilon_2\mathscr{L}}\left(\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}+\eta\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k-1}\right)=\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}+\eta\right)\frac{k}{u}.
\end{aligned}
$$

Подставляя найденные формулы для $f_1(u,h)$ и $f_1'(u,h)$ в соотношение (11), переходя к оценкам и воспользовавшись оценкой (5) и последней оценкой, затем соотношениями $f_0'(u,h)<0$ и

$f_0(u,h) > 0$, а в конце соотношением (12), последовательно находим

$$F_1(h,\nu) \leqslant \int_{N_2}^{N_1} \left| f_0(u,h) \left(B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))} \right)'_u \right| du + \int_{N_2}^{N_1} \left| f_0'(u,h) \right| \left| B(\varphi(u))\overline{B(\psi(u))} \right| du +$$
$$+ \left| f_0(N_1,h) \right| \left| B(\varphi(N_1))\overline{B(\psi(N_1))} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} \right)^{2k} \left(\left(\frac{2k}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} + k\eta \right) \int_{N_2}^{N_1} \frac{f_0(u,h)}{u} du - \int_{N_2}^{N_1} f_0'(u,h) du + f_0(N_1,h) \right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} \right)^{2k} \left(\frac{2k}{\varepsilon_2} + k\eta\mathscr{L} + 1 \right) f_0(N_2,h) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} \right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathscr{L} \right) \frac{1}{\Lambda} \sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}}.$$

Объединяя эту оценку с оценкой (12), имеем

$$F_j(h,\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4) \ll \frac{D_j}{\Lambda} \sqrt{\frac{\nu_1\nu_3}{\nu_2\nu_4}},$$
$$D_j = \begin{cases} \left(\frac{2}{\varepsilon_2 \mathscr{L}} \right)^{2k} \left(\frac{k}{\varepsilon_2} + \eta k \mathscr{L} \right), & \text{если } j = 1; \\ 1, & \text{если } j = 0 \text{ или } j = 2. \end{cases}$$

Подставляя эту оценку в формулу (11), получим

$$W_j(\Lambda) \ll \frac{D_j}{\Lambda} \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4 < X} \frac{1}{\nu_2\nu_4} \sum_{0 \leqslant b_1 < 5b} \sum_{0 \leqslant a_1 < 5a} \sum_{\alpha < h \leqslant \alpha + \omega(N_1)} \max_{N_2 < u \leqslant N_1} |C(u,h)|, \tag{13}$$

6. Оценка $|C(u,h)|$. Для оценки суммы

$$C(u,h) = \sum_{N_2 < m \leqslant u} e\left(\frac{T}{2\pi} \ln \frac{m + h + \frac{a_1}{5a}}{m + \frac{b_1}{5b}} \right),$$
$$N_2 = \max\left(\frac{\Lambda\nu_2}{5b\nu_1} - \frac{b_1}{5b}, \frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha) - \frac{b_1}{5b} \right), \qquad u \leqslant \frac{\Lambda_1\nu_2}{5b\nu_1} - \frac{b_1}{5b},$$

воспользуемся методом экспоненциальных пар. Положим,

$$f(y) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{y + h + \frac{a_1}{5a}}{y + \frac{b_1}{5b}}, \qquad A = \frac{T|h-\alpha|}{N_2^2} \ll \frac{T|h-\alpha| b^2 \nu_1^2}{\Lambda^2 \nu_2^2},$$
$$B = u - N_2 \leqslant N_1 - N_2 = \frac{\Lambda_1\nu_2}{5b\nu_1} - \frac{b_1}{5b} - \max\left(\frac{\Lambda\nu_2}{5b\nu_1} - \frac{b_1}{5b}, \frac{H}{\mathscr{L}}(h-\alpha) - \frac{b_1}{5b} \right) \ll \frac{\Lambda\nu_2}{b\nu_1}.$$

Для нахождения производной порядка s, $s = 1, 2, \ldots$ функции $f(u)$, представляя её производную первого порядка в виде

$$f'(y) = -\frac{T(h-\alpha)}{2\pi} \cdot f_1(y) f_2(y), \quad f_1(y) = \frac{1}{y + h + \frac{a_1}{5a}}, \quad f_2(y) = \frac{1}{y + \frac{b_1}{5b}}, \quad \alpha = \frac{b_1}{5b} - \frac{a_1}{5a},$$

и имея в виду, что

$$f_1^{(s-1-j)}(y) = \frac{(-1)^{s-1-j}(s-1-j)!}{(y + h + \frac{a_1}{5a})^{s-j}}, \qquad f_2^{(j)}(y) = \frac{(-1)^j j!}{(y + \frac{b_1}{5b})^{j+1}},$$

воспользуемся формулой Лейбница для $s-1$ — ой производной произведения двух функций:

$$f^{(s)}(y) = -\frac{T(h-\alpha)}{2\pi}\left(f_1(y)f_2(y)\right)^{(s-1)} = -\frac{T(h-\alpha)}{2\pi}\sum_{j=0}^{s-1} C_{s-1}^{j} f_1^{(s-1-j)}(y) f_2^{(j)}(y) =$$

$$= \frac{(-1)^s\, s!\, T(h-\alpha)}{2\pi}\sum_{j=0}^{s-1}\frac{1}{(y+h+\frac{a_1}{5a})^{s-j}(y+\frac{b_1}{5b})^{j+1}}.$$

Поэтому

$$AB^{1-s} \ll f^{(s)}(y) \ll AB^{1-s}, \qquad s=1,2,\ldots.$$

Следовательно, для экспоненциальной пары (κ,λ) имеем

$$|C(u,h| \ll \left(\frac{T(h-\alpha)b^2\nu_1^2}{\Lambda^2\nu_2^2}\right)^{\kappa}\left(\frac{\Lambda\nu_2}{b\nu_1}\right)^{\lambda} = \frac{T^{\kappa}b^{2\kappa-\lambda}\nu_1^{2\kappa-\lambda}}{\Lambda^{2\kappa-\lambda}\nu_2^{2\kappa-\lambda}}(h-\alpha)^{\kappa}.$$

7. Оценка $W_j(T)$, $j=0,1,2$. Подставляя оценку для $|C(u,h|$ в (13), имеем

$$W_j(\Lambda) \ll \frac{D_jT^{\kappa}}{\Lambda^{1+2\kappa-\lambda}}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{\nu_1^{2\kappa-\lambda}b^{2\kappa-\lambda}}{\nu_2^{1+2\kappa-\lambda}\nu_4}\sum_{0\leqslant b_1<5b}\;\sum_{0\leqslant a_1<5a}\;\sum_{\alpha<h\leqslant\alpha+\omega(N_1)}(h-\alpha)^{\kappa} \ll$$

$$\ll \frac{D_jT^{\kappa}}{\Lambda^{1+2\kappa-\lambda}}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{\nu_1^{2\kappa-\lambda}ab^{1+2\kappa-\lambda}}{\nu_2^{1+2\kappa-\lambda}\nu_4}(\omega(N_1))^{\kappa+1}.$$

Отсюда имея в виду, что

$$\omega(N_1) = \left(N_1+\frac{b_1}{5b}\right)\frac{\mathscr{L}}{H} = \frac{\Lambda_1\nu_2\mathscr{L}}{5Hb\nu_1}, \qquad a = \frac{\nu_1\nu_4}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)}, \qquad b = \frac{\nu_2\nu_3}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)},$$

получим

$$W_j(\Lambda) \ll \frac{D_jT^{\kappa}\Lambda^{\lambda-\kappa}}{H^{\kappa+1}}\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4<X}\frac{(\nu_1\nu_3)^{\kappa-\lambda}}{(\nu_1\nu_4,\nu_2\nu_3)^{1+\kappa-\lambda}} \ll D_j\,\frac{T^{\kappa}\Lambda^{\lambda-\kappa}X^{4+2\kappa-2\lambda}}{H^{\kappa+1}}.$$

Отсюда пользуясь условиями $\lambda-\kappa\geqslant 0$ и $2\Lambda = 2\Lambda(j) < E_jP$, где E_j определяется формулой (6), а также $X = T^{0,01\varepsilon_1}$, найдём

$$W_j(\Lambda) \ll D_jE_j^{\lambda-\kappa}\cdot T^{-\varepsilon_1}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{T^{\theta(\kappa,\lambda)+æ(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}}{H}\right)^{\kappa+1},$$

где

$$\theta(\kappa,\lambda) = \frac{\kappa+\lambda}{2\kappa+2}, \qquad æ(\kappa,\lambda) = \frac{52+\kappa-\lambda}{50\kappa+50}, \qquad \sigma(\kappa) = \frac{\ln\mathscr{L}}{(\kappa+1)\ln T}.$$

Следовательно, при $H \geqslant T^{\theta(\kappa,\lambda)+æ(\kappa,\lambda)\varepsilon_1+\sigma(\kappa)}$ получим оценку

$$W_j(\Lambda) \ll D_jE_j^{\lambda-\kappa}\cdot T^{-\varepsilon_1}\mathscr{L}^{-1}.$$

Пользуясь определениями параметров D_j и E_j, эту оценку напишем в виде

$$W_j(\Lambda) \ll T^{-\varepsilon_1}\mathscr{L}^{-1}, \qquad j=0, \quad j=2;$$

$$W_1(\Lambda) \ll \left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)T^{-0,5(\lambda-\kappa)\varepsilon_2}\cdot T^{-\varepsilon_1}\mathscr{L}^{-1}.$$

Подставляя эту оценку и оценку (8) в (7), получим утверждение леммы.

4. Доказательство теоремы 1.

Кроме уже введённых параметров в конце первого параграфе введём дополнительные параметры: a — произвольное фиксированное число с условием $0 < a < 1$; $T - \dfrac{\pi}{4} = 4\pi r$, r — целое число; $\eta = c_1\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$; $k = [c\ln\mathscr{L}]$; c и $c_1 > 1$ — постоянные, значения которых определим позднее; всюду ниже краткости функцию $F(t+u_1+\ldots+u_k)$ обозначим через $F(t,u,k)$.

1. Сведение к оценкам интегралов $I_2(T,T+H)$**,** $I_1(T,T+H)$ **и** $J(T,H)$. Из определения 1 функции $F(t)$ и функционального уравнения (1) для функции $f(s)$ следует, что $F(t)$ при вещественных t принимает вещественные значения, а вещественные нули $F(t)$ нечётного порядка являются нулями нечётного порядка $f(s)$, лежащими на критической прямой. Обозначим буквой E подмножество интервала $(T,T+H)$, состоящее из чисел t таких, что

$$\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k > \left|\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta F(t,u,k) du_1 \ldots du_k\right|. \qquad (14)$$

Возводя обе части неравенства в степень a и пользуясь определением E, получаем

$$\int_E dt \left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k\right)^a \geqslant$$
$$\geqslant \int_E dt \left(\left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k\right)^a - \left|\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta F(t,u,k) du_1 \ldots du_k\right|^a.\right)$$

При замене области интегрирования E на интервал $(T,T+H)$ значение интеграла в правой части последнего неравенства не меняется, так как при $t \in (T,T+H)\setminus E$ неравенство (14) превращается в равенство. Поэтому воспользовавшись обозначениями

$$I(E) = \int_E \left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k\right)^a dt,$$
$$I_1(T,T+H) = \int_T^{T+H} \left|\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta F(t,u,k) du_1 \ldots du_k\right|^a dt;$$
$$I_2(T,T+H) = \int_T^{T+H} \left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k\right)^a dt,$$

представим последнее неравенство в виде

$$I(E) \geq I_2(T,T+H) - I_1(T,T+H). \qquad (15)$$

Пользуясь неравенством Гёльдера вида

$$\left(\int_E g(t)dt\right)^{\frac{2}{a}} \leqslant (\mu(E))^{\frac{2}{a}-1} \int_E g^{\frac{2}{a}}(t)dt,$$

получаем

$$(I(E))^{\frac{2}{a}} \leqslant (\mu(E))^{\frac{2}{a}-1} \int_T^{T+H} \left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k\right)^2 dt.$$

Функция $F(t,u,k)$ непрерывна на отрезке $[0,\eta]$ по каждому из аргументов $u_1,\ldots,u_k$, поэтому согласно первой теореме о среднем значение интеграла, найдутся точки $u_1^*,\ldots,u_k^*$, для которых выполняется равенство

$$\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|\, du_1 \ldots du_k = \eta^k \left|F(t+u_1^*+\ldots+u_k^*)\right|.$$

Отсюда с учётом следующего соотношения

$$0 \leqslant u_1^* + \ldots + u_k^* \leqslant \eta k = \frac{c_1[c \ln \mathscr{L}]}{\sqrt{\mathscr{L}}} \leqslant 1,$$

имеем

$$I(E) \leqslant \left((\mu(E))^{\frac{2}{a}-1} \eta^{2k} \int_{T+u_1^*+\ldots+u_k^*}^{T+H+u_1^*+\ldots+u_k^*} |F(t)|^2 dt \right)^{\frac{a}{2}} \leqslant (\mu(E))^{\frac{2-a}{2}} \left(\eta^{2k} J(T,H) \right)^{\frac{a}{2}},$$

$$J(T,H) = \int_T^{T+H+1} |F(t)|^2 \, dt.$$

Отсюда и из (15), найдём

$$(\mu(E))^{\frac{2-a}{2}} \geqslant \frac{I_2(T,T+H) - I_1(T,T+H)}{(\eta^{2k} J(T,H))^{\frac{a}{2}}}. \tag{16}$$

Таким образом, для оценки снизу функции $\mu(E)$ достаточно оценить интеграл $I_2(T,T+H)$ снизу, а интегралы $I_1(T,T+H)$ и $J(T,H)$ сверху.

2. Оценка снизу интеграла $I_2(T,T+H)$. Применяя k – раз неравенство Гёльдера вида

$$\left(\int_0^\eta f(u) du \right)^{\frac{1}{a}} \leqslant \eta^{\frac{1}{a}-1} \int_0^\eta f^{\frac{1}{a}}(u) du,$$

затем возводя обе части получившегося неравенства в степени a, найдём

$$\left(\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)| \, du_1 \ldots du_k \right)^a \geqslant \eta^{k(a-1)} \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta |F(t,u,k)|^a \, du_1 \ldots du_k$$

Отсюда и из определения интеграла $I_2(T,T+H)$, получим

$$I_2(T,T+H) \geqslant \eta^{k(a-1)} \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta \int_{T+u_1+\ldots+u_k}^{T+H+u_1+\ldots+u_k} |F(t)|^a \, dt du_1 \ldots du_k \geqslant$$
$$\geqslant \eta^{k(a-1)} \int_0^\eta \ldots \int_0^\eta \int_{T+k\eta}^{T+H} |F(t)|^a \, dt du_1 \ldots du_k = \eta^{ka} \int_{T+k\eta}^{T+H} |F(t)|^a \, dt.$$

Далее пользуясь определением $F(t)$, это неравенство представим в виде

$$I_2(T,T+H) \geqslant \eta^{ka} \int_0^{H-k\eta} \left| f\left(\frac{1}{2} + i(t+T+k\eta)\right) \varphi^2 \left(\frac{1}{2} + i(t+T+k\eta)\right) \right|^a dt. \tag{17}$$

Для оценки снизу интеграла в правой части (17) воспользуемся теоремой Гэбриэла о выпуклости среднего значения по двум переменным ([6], стр. 366). В этой лемме, полагая $\alpha = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{a}$, $\beta = 2$, $\mu = \frac{1}{2-a}$, $\sigma = 2 - \frac{3a}{4}$, $T_1 = H - k\eta$, $p = \frac{a}{2}$, $q = \frac{2-a}{2}$, и имея в виду, что

$$J\left(2 - \frac{3a}{4}, 1\right) = \int_0^{H-k\eta} \left| f\left(2 - \frac{3a}{4} + i(t+T+k\eta)\right) \varphi^2 \left(2 - \frac{3a}{4} + i(t+T+k\eta)\right) \right| dt,$$

$$J\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{a}\right) = \left(\int_0^{H-k\eta} \left| f\left(\frac{1}{2} + i(t+T+k\eta)\right) \varphi^2 \left(\frac{1}{2} + i(t+T+k\eta)\right) \right|^a dt \right)^{\frac{1}{a}},$$

$$J\left(2, \frac{1}{2-a}\right) = \left(\int_0^{H-k\eta} \left| f\left(2 + i(t+T+k\eta)\right) \varphi^2 \left(2 + i(t+T+k\eta)\right) \right|^{2-a} dt \right)^{\frac{1}{2-a}},$$

с учетом соотношения $p\lambda + q\mu = 1$, найдем

$$J\left(2-\frac{3a}{4},1\right) \leqslant c_g J^{\frac{a}{2}}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right) J^{\frac{2-a}{2}}\left(2,\frac{1}{2-a}\right),$$

где c_g — абсолютная постоянная. Из соотношения (17), определения $J\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right)$ и последнего неравенства, получим

$$I_2(T,T+H) \geqslant \eta^{ka} J^a\left(\frac{1}{2},\frac{1}{a}\right) \geqslant c_g^{-2}\eta^{ka} J^2\left(2-\frac{3a}{4},1\right) J^{-(2-a)}\left(2,\frac{1}{2-a}\right). \tag{18}$$

Таким образом, для оценки снизу интеграла $I_2(T,T+H)$ достаточно оценить интеграл $J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)$ снизу, а интеграл $J\left(2,\frac{1}{2-a}\right)$ сверху.

Для оценки снизу интеграла $J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)$, пользуясь определениями функций $f(s)$ и $\varphi(s)$ при $s = 2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)$, имея в виду, что $2-\frac{3a}{4}>1$, найдём

$$f(s)\varphi^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^s}\sum_{\nu_1<X}\frac{h(\nu_1)}{\nu_1^s}\sum_{\nu_2<X}\frac{h(\nu_2)}{\nu_2^s} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^s}, \quad r_1(m) = \sum_{\substack{m=n\nu_1\nu_2\\ \nu_1,\nu_2<X}} r(n)h(\nu_1)h(\nu_2).$$

Воспользовавшись соотношениями $|r(m)|\leqslant 1$ и $|h(\nu)|\leqslant 1$, имеем

$$|r_1(m)| \leqslant \sum_{\substack{m=n\nu_1\nu_2\\ \nu_1,\nu_2<X}} |r(m)||\alpha(\nu_1)||\alpha(\nu_2)| \leqslant \sum_{\substack{m=n\nu_1\nu_2\\ \nu_1,\nu_2<X}} 1 \leqslant \tau_3(n).$$

Следовательно,

$$\left|f\left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)\right)\varphi^2\left(2-\frac{3a}{4}+i(t+T+k\eta)\right)\right| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau_3(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}} \ll 1.$$

Отсюда, из определения $J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)$ и в виду, что $k\eta<1$, имеем

$$\begin{aligned} J\left(2-\frac{3a}{4},1\right) &= \int_0^{H-k\eta}\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}}m^{-i(t+T+k\eta)}\right|dt \geqslant \left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^{2-\frac{3a}{4}}}\int_0^{H-k\eta} m^{-i(t+T+k\eta)}dt\right| \geqslant \\ &\geqslant H-k\eta-\left|\sum_{m=2}^{\infty}\frac{r_1(m)\left(m^{-ik\eta}-m^{-iH}\right)}{m^{2-\frac{3a}{4}+iT}\ln m}\right| \geqslant H+O(1). \end{aligned} \tag{19}$$

Для оценки сверху интеграла $J\left(2,\frac{1}{2-a}\right)$, поступая аналогично как при оценке $J\left(2-\frac{3a}{4},1\right)$ при $Re\, s>1$, имеем

$$|f(2+i(t+T+k\eta)\varphi^2(2+i(t+T+k\eta)| = \left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_1(m)}{m^{2+i(t+T+k\eta)}}\right| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau_3(n)}{m^2} = \zeta^3(2) = \frac{\pi^6}{216}.$$

Следовательно,

$$J\left(2,\frac{1}{2-a}\right) \leqslant \left(\int_0^H\left(\frac{\pi^6}{216}\right)^{2-a}dt\right)^{\frac{1}{2-a}} = \frac{\pi^6}{216}H^{\frac{1}{2-a}}.$$

Подставляя эту оценку и оценку (19) в (18), получим

$$I_2(T,T+H) \geqslant \left(\frac{216}{\pi^6}\right)^{2-a} c_g^{-2}\left(1+O(H^{-1})\right)H\eta^{ka} \geqslant \left(\frac{200}{10^3}\right)^{2-a} c_g^{-2}H\eta^{ka} = \frac{1}{5^{2-a}c_g^2}\,H\eta^{ka}. \tag{20}$$

3. Оценка сверху интеграла $J(T,H)$. Имея в виду, что $T\le t\le T+H$ и $T-\dfrac{\pi}{4}=4\pi r$, r — целое число, то согласно приближенному функциональному уравнению для функции $F(t)$ (лемма 1), имеем

$$J(T,H)=\int_T^{T+H+1}|F(t)|^2\,dt=\int_T^{T+H+1}\left|2\sum_{\lambda\le P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos t\ln\frac{P}{\lambda}+O(T^{-0{,}01})\right|^2dt.$$

Дважды воспользовавшись неравенством $|a+b|^2\leqslant 2|a|^2+2|b|^2$ и имея в виду что $A(\lambda)$ — вещественнозначная функция, найдём

$$J(T,H)\ll\int_0^{H+1}\left|\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\lambda^{i(T+t)}\right|^2dt+HT^{-0{,}02}.$$

Для оценки последнего интеграла применяя известный приём, получим

$$J(T,H)\ll H\sum_{\lambda_1,\lambda_2\leqslant P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)+HT^{-0{,}02}.$$

Представляя последнюю двойную сумму в виде суммы двух слагаемых, одно из которых получается при $\lambda_1=\lambda_2$, приходим к оценке

$$J(T,H)\ll H\left(|\Sigma_0(T)|+|W_0(T)|\right)+HT^{-0{,}02},\qquad \Sigma_0(T)=\sum_{\lambda\le P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda},\tag{21}$$

$$W_0(T)=\sum_{\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Оценим $\Sigma_0(T)$. Полагая $\theta=\frac12-\frac{1}{2\mathscr{L}}$ и ввиду $X^{-1}\leqslant\lambda\leqslant P$, имеем

$$\Sigma_0(T)=\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}\exp\left(-\frac{\ln\lambda}{\mathscr{L}}\right)\leqslant\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}\exp\left(\frac{\ln X}{\mathscr{L}}\right)\leqslant e\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}.$$

Применяя к последней сумме лемму 2 при $Y=P$ и $\theta=\frac12-\frac{1}{2\mathscr{L}}$, получим

$$\Sigma_0(T)\leqslant\frac{2e(1+æ^2)\mathscr{L}}{5}W(0)+(c_1\mathscr{L}+c_2)\,W\left((\mathscr{L})^{-1}\right)+O\left(P^{-1}X^2\ln^2X\right).$$

Далее пользуясь леммой 3, оценивая суммы $W(0)$ и $W\left((\mathscr{L})^{-1}\right)$, а также учитывая, что $P=\sqrt{\frac{5T}{2\pi}}$ и $X=T^{0{,}01\varepsilon_1}$, последовательно имеем

$$W(0)\ll\frac{1}{\sqrt{\ln X}},\qquad W\left((\mathscr{L})^{-1}\right)\ll\frac{X^{2(\mathscr{L})^{-1}}}{\sqrt{\ln X}}=\frac{1}{\sqrt{\ln X}}\exp\left(\frac{2\ln T^{0{,}01\varepsilon_1}}{\ln\sqrt{5T/(2\pi)}}\right)\ll\frac{1}{\sqrt{\ln X}},$$

$$\Sigma_0(T)\ll W(0)\mathscr{L}+W\left((\mathscr{L})^{-1}\right)\mathscr{L}+\frac{X^2\ln^2X}{P}\ll\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}+\frac{X^2\ln^2X}{P}\ll\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}.\tag{22}$$

Оценим $W_0(T)$. Согласно следствие 2 леммы 4 при $H=T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, имеем

$$W_0(T)=\sum_{\lambda_1<\lambda_2<P}\frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT}\exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)=O\left(T^{-\varepsilon_1}\right).$$

Подставляя эту оценку и оценку для $\Sigma_0(T)$ в (21), затем и воспользовавшись соотношением

$$\ln X = 0,01\varepsilon_1 \ln T = 0,01\varepsilon_1 \ln\frac{2\pi P^2}{5} = 0,01\varepsilon_1(2\mathscr{L} + \ln 2\pi - \ln 5) > 0,02\varepsilon_1\mathscr{L},$$

имеем

$$J(T,H) \ll H\left(\frac{\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{0,02\varepsilon_1}} + T^{-\varepsilon_1}\right) + HT^{-0,02} \ll \frac{H\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{\varepsilon_1}}.$$

Постоянная под знаком $\ll$ в этой оценке является абсолютной. Обозначая эту постоянную символом c_4 и не ограничивая общности считая, что $c_4 > 1$ имеем

$$J(T,H) \leqslant \frac{c_4}{\sqrt{\varepsilon_1}}\, H\sqrt{\mathscr{L}}. \tag{23}$$

4. Оценка сверху интеграла $I_1(T, T+H)$. Применяя неравенство Гёльдера будем иметь

$$(I_1(T,T+H))^{\frac{2}{a}} \leq H^{\frac{2}{a}-1}\int_T^{T+H}\left|\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta F(t+u_1+\ldots+u_k)du_1\ldots du_k\right|^2 dt.$$

Пусть $0 < \varepsilon_2 < 0,01$, точное значение которого определим позднее. Применяя к подинтегральной функции $F(t)$ лемму 4, находим

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) + O\left(T^{-0,01}\right), \qquad T - \frac{\pi}{4} = 4\pi r, \quad r \text{ — целое число},$$

$$F_1(t) = 2\sum_{\lambda\leqslant P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos t\ln\frac{P}{\lambda}, \qquad F_2(t) = 2\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\leqslant P} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\cos t\ln\frac{P}{\lambda},$$

Следовательно будем иметь

$$(I_1(T,T+H))^{\frac{2}{a}} \ll H^{\frac{2}{a}-1}(I_{11}(T,T+H) + I_{12}(T,T+H) + H\eta^{2k}T^{-0,02}), \tag{24}$$

$$I_{11}(T,T+H) = \int_T^{T+H}\left|\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta F_1(t+u_1+\ldots+u_k)du_1\ldots du_k\right|^2 dt,$$

$$I_{12}(T,T+H) = \int_T^{T+H}\left|\int_0^\eta \ldots \int_0^\eta F_2(t+u_1+\ldots+u_k)du_1\ldots du_k\right|^2 dt.$$

Сначала оценим $I_{11}(T,T+H)$. Проинтегрировав $F_1(t+u_1+\ldots+u_k)$ по $u_1, u_2, \ldots, u_k$, найдем

$$I_{11}(T,T+H) \ll \int_0^H \left|\sum_{\lambda\leqslant P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(T+t)} B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|^2 dt.$$

Для оценки последнего интеграла применяя известный приём, получим

$$I_{11}(T,T+H) \ll H\sum_{\lambda_1,\lambda_2\leqslant P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT} B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Представляя последнюю двойную сумму в виде суммы двух слагаемых, одно из которых получается при $\lambda_1 = \lambda_2$, приходим к оценке

$$I_{11}(T,T+H) \ll H\left(|\Sigma_1(T)| + |W_1(T)|\right), \qquad \Sigma_1(T) = \sum_{\lambda\leqslant P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda}\left|B\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right|^2, \tag{25}$$

$$W_1(T) = \sum_{\lambda_1<\lambda_2<P^{1-\varepsilon_2}} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} B\left(\frac{P}{\lambda_1}\right)\overline{B\left(\frac{P}{\lambda_2}\right)}\exp\left(-\left(\frac{H}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Воспользовавшись соотношением $\ln\frac{P}{\lambda}\geqslant\varepsilon_2\mathscr{L}$ сведем оценку $\Sigma_1(T)$ к оценке $\Sigma_0(T)$, которого уже рассматривали при оценке $J(N,H)$ и получили оценку вида (22):

$$\Sigma_1(T)=\sum_{\lambda\leqslant P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A^2(\lambda)\left(2\sin\left(\frac{\eta}{2}\ln\frac{P}{\lambda}\right)\right)^{2k}}{\lambda\left(\ln\left(\frac{P}{\lambda}\right)\right)^{2k}}\leqslant\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\sum_{\lambda\leqslant P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda}<$$
$$<\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda}=\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\Sigma_0\ll\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}.$$

Оценим $W_1(T)$. Согласно следствия 2 леммы 4 при $k=[c\ln\mathscr{L}]$ и $H=T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, имеем

$$W_1(T)\ll\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\left(\frac{k}{\varepsilon_2}+\eta k\mathscr{L}\right)T^{-\varepsilon_1}.$$

Подставляя найденные оценки для $\Sigma_1(T)$ и $W_1(T)$ в (25), затем воспользовавшись последовательно соотношением $\varepsilon_2=\varepsilon_3\mathscr{L}^{-1/2}$ ($\varepsilon_3>0$, более точно оно будет определено позднее), неравенствами

$$T=\frac{2\pi P^2}{5}>P^2,\quad \ln X=0,01\varepsilon_1\ln\frac{2\pi P^2}{5}=0,01\varepsilon_1(2\mathscr{L}+\ln 2\pi-\ln 5)>0,02\varepsilon_1\mathscr{L},$$

и значениями параметров $k=[c\ln\mathscr{L}]$ и $\eta=c_1\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$, имеем

$$I_{11}(T,T+H)\ll H\left(\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}+\frac{k}{\varepsilon_2}T^{-\varepsilon_1}+k\eta\mathscr{L}T^{-\varepsilon_1}\right)\left(\frac{2}{\varepsilon_2\mathscr{L}}\right)^{2k}\leqslant$$
$$=H\eta^{2k}\left(\frac{\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{0,02\varepsilon_1}}+\frac{c(\varepsilon_3^{-1}+c_1)\sqrt{\mathscr{L}}\ln\mathscr{L}}{P^{2\varepsilon_1}}\right)\left(\frac{2}{\varepsilon_3c_1}\right)^{2k}\leqslant\frac{10\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\frac{2}{\varepsilon_3c_1}\right)^{2k}H\eta^{2k}.\qquad(26)$$

Теперь оценим интеграл $I_{12}(T,T+H)$. Функция $F_2(t+u_1+\ldots+u_k)$ непрерывна на отрезке $[0,\eta]$ по каждому из аргументов $u_1,\ldots,u_k$, поэтому согласно первой теореме о среднем значении интеграла, найдутся точки $u_1^*,\ldots,u_k^*$, для которых выполняется равенство

$$\int_0^\eta\ldots\int_0^\eta|F_2(t+u_1+\ldots+u_k)|\,du_1\ldots du_k=\eta^k\left|F_2(t+u_1^*+\ldots+u_k^*)\right|.$$

Следовательно,

$$I_{12}(T,T+H)=\eta^{2k}\int_{T+u_1^*+\ldots+u_k^*}^{T+H+u_1^*+\ldots+u_k^*}|F_2(t)|^2\,dt\leqslant\int_T^{T+H+1}|F_2(t)|^2\,dt=$$
$$=\eta^{2k}\int_0^{H+1}\left|\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\leqslant P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(T+t)}+\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\leqslant P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-i(T+t)}\right|^2dt.$$

Воспользовавшись неравенством $|a+b|^2\leqslant 2|a|^2+2|b|^2$ и имея в виду что $A(\lambda)$ — вещественнозначная функция, найдём

$$I_{12}(T,T+H)\ll\eta^{2k}\int_0^{H+1}\left|\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\leqslant P}\frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(T+t)}\right|^2dt.$$

Для оценки последнего интеграла применяя известный приём, получим

$$I_{12}(T,T+H) \ll H\eta^{2k} \sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1,\lambda_2\leqslant P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Представляя последнюю двойную сумму в виде суммы двух слагаемых, одно из которых получается при $\lambda_1=\lambda_2$, приходим к оценке

$$I_{12}(T,T+H) \ll H\eta^{2k}\left(|\Sigma_2(T)|+|W_2(T)|\right), \qquad \Sigma_2(T)=\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\leq P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda}, \tag{27}$$

$$W_2(T)=\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right).$$

Оценим $\Sigma_2(T)$. Полагая $\theta=\frac12-\frac{1}{2\mathscr{L}}$, имеем

$$\Sigma_2(T)=\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda\leqslant P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}\exp\left(-\frac{\ln\lambda}{\mathscr{L}}\right) \leqslant e\left(\sum_{\lambda\leqslant P}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}-\sum_{\lambda\leqslant P^{1-\varepsilon_2}}\frac{A^2(\lambda)}{\lambda^{2\theta}}\right).$$

Применяя к последней сумме лемму 2, а затем, имея в виду, что $1-e^{-\varepsilon_2}\ll\varepsilon_2$ и пользуясь леммой 3 для оценки суммы $W(0)$, последовательно получим

$$\Sigma_2(T)\leqslant\frac{2e^2(1+æ^2)(1-e^{-\varepsilon_2})\mathscr{L}}{5}W(0)+O\left(P^{-1+\varepsilon_2}X^2\ln^2X\right)\ll$$
$$\ll\varepsilon_2W(0)\mathscr{L}+P^{-1+\varepsilon_2}X^2\ln^2X\ll\varepsilon_2\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}+P^{-1+\varepsilon_2}X^2\ln^2X\ll\frac{\varepsilon_2\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}.$$

Оценим $W_2(T)$. Согласно следствию 2 леммы 4 при $H=T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, имеем

$$W_2(T)=\sum_{P^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2<P} \frac{A(\lambda_1)A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{iT} \exp\left(-\left(\frac{H+1}{2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2\right)=O\left(T^{-\varepsilon_1}\right).$$

Подставляя найденные оценки для $\Sigma_2(T)$ и $W_2(T)$ в (27), а затем воспользовавшись соотношением $\varepsilon_2=\varepsilon_3\mathscr{L}^{-1/2}$, получим

$$I_{12}(T,T+H)\ll H\eta^{2k}\left(\frac{\varepsilon_2\mathscr{L}}{\sqrt{\ln X}}+T^{-\varepsilon_1}\right)\ll H\eta^{2k}\left(\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\mathscr{L}}}\frac{\mathscr{L}}{\sqrt{0,02\varepsilon_1\mathscr{L}}}+T^{-\varepsilon_1}\right)\leqslant\frac{10\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}}H\eta^{2k}.$$

Далее подставляя эту оценку и оценку (26) в формулу (24), найдём

$$(I_1(T,T+H))^{\frac{2}{a}}\ll H^{\frac{2}{a}}\eta^{2k}\left(\frac{10\sqrt{\mathscr{L}}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(\frac{2}{\varepsilon_3c_1}\right)^{2k}+\frac{10\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1}}+T^{-0,02}\right).$$

При $c_1=2e\varepsilon_3^{-1}$ и $k=[c\ln\mathscr{L}]$, воспользовавшись последовательно соотношением $c\geqslant\frac14+\frac{2+\ln\varepsilon_3^{-1}}{2\ln\mathscr{L}}$ (параметр c более точно будет определен позднее), найдем

$$\left(\frac{2}{\varepsilon_3c_1}\right)^{2k}=e^{-2[c\ln\mathscr{L}]-2}\leqslant e^{-2c\ln\mathscr{L}}=\mathscr{L}^{-2c}\leqslant\mathscr{L}^{-\frac12+\frac{\ln\varepsilon_3^{-1}}{\ln\mathscr{L}}}=\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\mathscr{L}}}$$

Следовательно,

$$I_1(T,T+H)\leqslant\left(\frac{30\varepsilon_3c_5}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right)^{\frac{a}{2}}H\eta^{ka}, \tag{28}$$

где постоянная c_5 является абсолютной.

5. Оценка снизу $N_0(T+H)-N_0(T)$**.** Подставляя в (16) из формул (20)), (28) и (23) соответственно оценку снизу для интеграла $I_2(T,T+H)$ и оценки сверху интегралов $I_1(T,T+H)$ и $J(T,H)$, найдём

$$(\mu(E))^{\frac{2-a}{2}} \geqslant \frac{5^{-(2-a)}c_g^{-2}H\eta^{ka}-\left(\dfrac{30\varepsilon_3c_5}{\sqrt{\varepsilon_1}}\right)^{\frac{a}{2}}H\eta^{ka}}{\left(\eta^{2k}\dfrac{c_4}{\sqrt{\varepsilon_1}}H\sqrt{\mathscr{L}}\right)^{\frac{a}{2}}}=\frac{5^{-(2-a)}c_g^{-2}\varepsilon_1^{\frac{a}{4}}-(30\varepsilon_3c_5)^{\frac{a}{2}}}{c_4^{\frac{a}{2}}}H^{\frac{2-a}{2}}\mathscr{L}^{-\frac{a}{4}}.$$

В этой формуле, выбирая в качестве ε_3 наибольшее положительное число с условием

$$(30\varepsilon_3c_5)^{\frac{a}{2}}\leqslant 0,5\cdot 5^{-(2-a)}c_g^{-2}\varepsilon_1^{\frac{a}{4}} \qquad \text{то есть} \qquad \varepsilon_3=\frac{5^{-\frac{2(2-a)}{a}}c_g^{-\frac{4}{a}}2^{-\frac{2}{a}}}{30c_5}\sqrt{\varepsilon_1}.$$

получим

$$(\mu(E))^{\frac{2-a}{2}}\geqslant c_6H^{\frac{2-a}{2}}\mathscr{L}^{-\frac{a}{4}}, \qquad c_6=\frac{5^{-(2-a)}c_g^{-2}\varepsilon_1^{\frac{a}{4}}}{2c_4^{\frac{a}{2}}}.$$

Так как $k\eta=c_1[c\ln\mathscr{L}]\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}$, то для количества нулей функции $F(t)$ на промежутке $(T,T+H)$ справедлива

$$N_0(T+H)-N_0(T)\geqslant\frac{\mu(E)}{k\eta}\geqslant\frac{c_6^{\frac{2}{2-a}}H\mathscr{L}^{-\frac{a}{4-2a}}}{c_1[c\ln\mathscr{L}]\mathscr{L}^{-\frac{1}{2}}}\geqslant\frac{c_6^{\frac{2}{2-a}}}{c_1c}H\mathscr{L}^{\frac{1}{2}-\frac{a}{4-2a}}\ln\mathscr{L}.$$

В последней формуле, полагая $a=\varepsilon$, параметр c выберем так, чтобы выполнялось условие

$$c\geqslant\frac{1}{4}+\frac{2+\ln\varepsilon_3^{-1}}{2\ln\mathscr{L}}=\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon^2\ln 3000e^2c_5\varepsilon_1^{-0,5}+\varepsilon\ln(81\cdot10^{-10})+\ln(10^8c_g^4)}{2\varepsilon^2\ln\mathscr{L}}.$$

Не ограничивая общности будем считать, что при $T\geqslant T_0>0$ выполняется неравенство

$$\frac{\varepsilon^2\ln 3000e^2c_5\varepsilon_1^{-0,5}+\varepsilon\ln(81\cdot10^{-10})+\ln(10^8c_g^4)}{\varepsilon^2}<\frac{1}{6}\ln\mathscr{L}.$$

Поэтому выбирая $c=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$, имеем

$$N_0(T+H)-N_0(T)\geqslant 3c_6^{\frac{2}{2-\varepsilon}}c_1^{-1}H\mathscr{L}^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}}\ln\mathscr{L}.$$

Воспользовавшись неравенствами

$$\mathscr{L}^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}}>\frac{7}{10}(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4-2\varepsilon}}, \qquad \ln\mathscr{L}>\frac{20}{21}\ln\ln T,$$

имеем

$$N_0(T+H)-N_0(T)\geqslant c_7H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}\ln\ln T, \qquad c_7=2c_6^{\frac{2}{2-\varepsilon}}c_1^{-1}.$$

В заключение для наглядности коэффициент c_7 представим в виде

$$c_7=\frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\,2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davenport H., Heilbronn H. On the zeros of certain Dirichlet series // J. Lond. Math. Soc. 1936. V. 11. P. 181 -– 185 and 307 -– 312.
2. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана — М.: Изд. Иност. лит. (И*Л), 1953. 409 с.
3. Воронин С. М. О распределении нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН. 1984. Т. 163. С. 74 – 77.
4. Воронин С. М. О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. 1980. Т. 44, № 1. С. 63 – 91.
5. Карацуба А. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия математическая. 1990. Т 54. № 2. С. 303 – 315.
6. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана – М.: Физматлит. 1994. –376с. –ISBN 5–02–014120–8.
7. Карацуба А. А. О нулях арифметических рядов Дирихле, не имеющих эйлерова произведения // Известия РАН. Серия математическая. 1993. Т 57, № 5. С. 3 – 14.
8. Карацуба А. А. Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле // Труды МИАН. 1994. Т. 207, С. 180 – 196.
9. Гриценко С. А. О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна // Труды МИАН. 2017. Т. 296. С. 72 - 94.
10. Гриценко С. А. О дробных моментах успокоенных L-функций Дирихле // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 4, С. 168 – 187.
11. Рахмонов З. Х. Оценка плотности нулей дзета функции Римана // УМН. 1994. Т. 49, вып. 1. С. 161 – 162.
12. Рахмонов З. Х. Плотность нулей дзета-функции Римана в коротких прямоугольниках критической полосы // Вестник Хорогского университета. 2002. Серия 1. № 5. С. 1 – 25.
13. Рахмонов З. Х. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7. В. 1. С. 263 – 279.
14. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2006. Т. 49. № 5. С. 393 – 400.
15. Рахмонов З. Х., Хайруллоев Ш. А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2009. Т. 52. № 5. С. 331 – 337.
16. Рахмонов З. Х., Аминов А. С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта–Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2019. Т. 62. № 3-4. С. 133 – 138.
17. Huxley M. N. Sums and Lattice Points III // Proceedings of the London Mathematical Society. 2003. V. 87. Is. 3. P. 591 – 609.

REFERENCES

1. Davenport, H., & Heilbronn, H. 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series", *J. Lond. Math.* vol. 11, pp. 181 -– 185 and 307 -– 312.
2. Titchmarsh, E. C., 1953, "The theory of the Zeta function of Riemann", *Oxford*.
3. Voronin, S. M. 1984, "Distribution of zeros of certain Dirichlet series", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 163, pp. 89–92.
4. Voronin, S. M. 1981, "On the zeros of some Dirichlet series lying on the critical line", *Math. USSR-Izv.*, vol, 16, Is. 1, pp. 55–82.
5. Karatsuba, A. A., 1990, "On the zeros of the Davenport–Heilbronn function lying on the critical line", *Math. USSR-Izv.*, vol. 36, Is. 2, pp. 311–324.
6. Voronin, S. M., & Karatsuba, A. A., 1994, *The Riemann zeta function*, Fiziko-Matematicheskaya Literatura, Moscow, 376 pp. ISBN: 5-02-014120-8
7. Karatsuba, A. A., 1994, "On the zeros of arithmetic Dirichlet series without Euler product", *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, vol. 43, Is. 2, pp. 193–203, doi.org/10.1070/IM1994v043n02ABEH001561.
8. Karatsuba, A. A., 1995, "A new approach to the problem of the zeros of some Dirichlet series", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 207, pp. 163–177,
9. Gritsenko, S. A., 2017, "On the zeros of the Davenport–Heilbronn function", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 296, pp. 65–87, doi.org/10.1134/S0081543817010060.
10. Gritsenko, S. A., 2017, "On fractional moments of the mollified Dirichlet L-functions", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 18, Is. 4, pp. 168–187, doi.org/10.22405/2226-8383-2017-18-4-167-186
11. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, "Estimate of the density of the zeros of the Riemann zeta function", *Russian Math. Surveys*, vol. 49, Is. 2, pp. 168–169, doi.org/10.1070/RM1994v049n02ABEH002225.
12. Rakhmonov, Z. Kh., 2002, "Density zeros of the Riemann zeta function in short rectangles of a critical strip", *Vestnik Khorogskogo universiteta*, Seriya 1, Is. 5, pp. 1 – 25.
13. Rakhmonov, Z. Kh., 2006, "Zeros of the Riemann zeta function in short intervals of the critical line", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 7, Is. 1(17), pp. 263-269.
14. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A., 2006, "Distance between the next zeros of Riemann's zeta-function in the critical line", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 49, no. 5, pp. 393 – 400.
15. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A. 2009, "The neibour zero of the Riemann's zeta-function laying on a critical line", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 52, no. 5, pp. 331 – 337.
16. Rakhmonov, Z. Kh. & Aminov, A. S., 2019, "On the zeros of an odd order of the Davenport – Heilbron function in short intervals of the critical line", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 62, no. 3-4, pp. 133-138.
17. Huxley, M. N., 2003, "Sums and Lattice Points III", *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 87, Is. 3, pp. 591-609, doi.org/10.1112/S0024611503014485.

Получено 15.11.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.