ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-281-305

Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса

З. Х. Рахмонов, Ф. З. Рахмонов

Рахмонов Зарулло Хусенович —доктор физико-математических наук, профессор, академик АН Республики Таджикистан, директор Института математики им. А. Джураева (г. Душанбе).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru
Рахмонов Фируз Заруллоевич —кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики им. А.Джураева (г. Душанбе).
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Аннотация

Работа посвящена получению нетривиальных оценок коротких кубических тригонометрических сумм с функцией Мёбиуса вида

$$S_3(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \mu(n)e(\alpha n^3),$$

в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+18)})$ при $y \geqslant x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+944}$ и $\tau = y^5 x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$.

Ключевые слова: короткая двойная тригонометрическая сумма, функция Мёбиуса, метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами, нетривиальная оценка, малые дуги.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
З. Х. Рахмонов, Ф. З. Рахмонов Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 281–305.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-281-305

Short cubic exponential sums with Möbius function

Z. Kh. Rakhmonov, F. Z. Rakhmonov

Rakhmonov Zarullo Khusenovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Director of the A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: zarullo-r@rambler.ru
Rahmonov Firuz Zarulloevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).
e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Abstract

The work is dedicated to the conclusion of non-trivial estimates of short cubic exponential sums with Möbius function of the form

$$S_3(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \mu(n)e(\alpha n^3),$$

over minor arcs $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+18)})$ for $y \geqslant x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+944}$ and $\tau = y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$.

Keywords: shorts double exponential sum, Möbius function, method for estimating exponential sums with prime numbers, nontrivial estimate, minor arcs.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
Z. Kh. Rakhmonov, F. Z. Rakhmonov, 2019, "Short cubic exponential sums with Möbius function", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 281–305.

1. Введение

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое число α из промежутка $[-æ, 1-æ]$, $æ\tau = 1$ представимо в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \tau, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q \leqslant P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса вида

$$S_k(\alpha, x) = \sum_{n\leq x} \mu(n)e(\alpha n^k),$$

при $k = 1$ впервые рассматривал Г. Дэвенпорт. В 1937 году [1], воспользовавшись методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И. М. Виноградова, он доказал, что для всякого фиксированного $B > 0$ имеет место оценка

$$|S_1(\alpha, x)| \ll x\mathscr{L}^{-B},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от B. Такую же оценку при $k \geqslant 2$, k – фиксированное целое число, получил Хуа Ло-кен [2]. Эти безусловные результаты Г. Дэвенпорта и Хуа Ло-кена до сих пор остаются самыми точными.

Наилучший условный результат в случае $k = 1$ принадлежит Бейкеру и Харману [3]. Они в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана (РГР) доказали, что

$$|S_1(\alpha, x)| \ll x^{\frac{3}{4}+\varepsilon},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε. Эту оценку для $k \geqslant 2$, k – фиксированное целое число, обобщили Т. Жан и Дж. Лю [4].

Т. Жан [5], рассматривая короткую тригонометрическую сумму с функцией Мёбиуса вида

$$S_k(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leq x} \mu(n)e(\alpha n^k),$$

при $k=1$ и $y \geqslant x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$ получил нетривиальную оценку

$$|S_k(\alpha;x,y)| \ll y\mathscr{L}^{-B}. \tag{1}$$

Затем он получил эту оценку уже при $y \geqslant x^{\frac{5}{8}+\varepsilon}$ [6]. Первую безусловную нетривиальную оценку вида (1) при $k=2$ и $y \geqslant x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ получили Т. Жан и Дж. Лю [7].

В предположении справедливости расширенной гипотезы Римана Г. С. Лу и Х. Х. Лао [8] доказали оценку вида (1) при $k=2$ и $y \geqslant x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$.

Кумчев А.В. [9] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha;x,y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$ при $y \geqslant x^{\theta+\varepsilon}$, $\theta = 1-\frac{1}{2k+3}$ и $\tau = x^{1+2\theta}P^{-1}$. Отсюда, в частности, для $S_3(\alpha;x,y)$ следует нетривиальная оценка при

$$y \geqslant x^{\frac{8}{9}+\varepsilon}, \qquad \tau = x^{\frac{25}{9}}P^{-1}.$$

Все безусловные нетривиальные оценки коротких тригонометрических сумм $S_k(\alpha;x,y)$, как и коротких кубических тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$f_k(\alpha;x,y) = \sum_{x-y<n\leq x} \Lambda(n)e(\alpha n^k),$$

в малых дугах получены методом оценок сумм с простыми числами И.М. Виноградова, основу которого, наряду с «решетом Виноградова», составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha;x,y,M,N) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a(m) \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}} b(n)e(\alpha(mn)^k),$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, M, N – натуральные, $x > x_0$, y – вещественные числа.

Основным результатом этой работы является теорема 1 о нетривиальной оценке суммы $S_3(\alpha;x,y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(\mathscr{L}^{32(B+18)})$, $B \geqslant 11$ при

$$y \geqslant x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+944}, \qquad \tau = \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(B+18)},$$

и её доказательство проводится методом оценок сумм с простыми числами И.М. Виноградова по схеме работы [10], в котором была получена нетривиальная оценка для короткой кубической тригонометрической суммы с простыми числами $f_3(\alpha;x,y)$ в малых дугах, в сочетании с методами работ [11, 12, 13, 14, 15, 16]. Основными утверждениями, позволившими получить новую оценку $S_3(\alpha;x,y)$, являются нетривиальные оценки двойных сумм $J_3(\alpha;x,y,M,N)$ на малых дугах, соответственно имеющих "длинную" сплошную сумму (лемма 5) и имеющих близкие по порядку суммы, составляющие двойную сумму (лемма 6).

2. Известные леммы

Лемма 1. *Пусть H и y - произвольные целые числа, $H \geqslant 1$. Тогда справедливо соотношение*

$$\sum_{x=y+1}^{y+H} e(\alpha x) \leq \min\left(H, \frac{1}{2\|\alpha\|}\right), \quad \|\alpha\| = \min\left(\{\alpha\}, 1-\{\alpha\}\right).$$

Доказательство см. [17].

Лемма 2. *При вещественном числе α, подчинённом условиям*

$$\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad 1\leqslant q\leqslant N,\quad |\theta|\leqslant 1,$$

а) для суммы

$$V_g=\sum_{z=g}^{g+q'}\min\left(U,\frac{1}{\|\alpha z\|}\right),\qquad q'<q,\qquad U>0,$$

имеем неравенство

$$V_g\ll U+q\ln q,$$

б) а для суммы

$$V=\sum_{0<z\leqslant 0{,}5q}\frac{1}{\|\alpha z\|}$$

имеем неравенство

$$V\ll q\ln q.$$

Доказательство см. [17], стр. 61.

Лемма 3. . *При $x\geqslant 2$ имеем*

$$\sum_{n\leqslant x}\tau_r^k(n)\ll x\left(\ln x\right)^{r^k-1},\qquad k=1,2.$$

Доказательство см. [18].

Лемма 4. *Пусть $f(n)$ — произвольная комплекснозначная функция, $u_1\leqslant x$, $r\geqslant 1$,*

$$C_r^k=\frac{r!}{k!(r-k)!},\qquad \lambda(n)=\sum_{d|n,\,d\leqslant u_1}\mu(n).$$

Тогда имеет место тождество

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)f(n)=(-1)^r\sum_{n_1>u_1}\lambda(n_1)\cdots\sum_{n_r>u_1}\lambda(n_r)\sum_{n_1\cdots n_r m\leqslant x}\mu(m)f(n_1\cdots n_r m)+$$
$$+\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}C_r^k\sum_{m_1\leqslant u_1}\mu(m_1)\cdots\sum_{m_k\leqslant u_1}\mu(m_k)\sum_{\substack{n_1\\ m_1\cdots m_k n_1\cdots n_{k-1}\leqslant x}}\cdots\sum_{n_{k-1}}f(m_1\cdots m_k n_1\cdots n_{k-1}).$$

Лемма 4 доказывается аналогично лемме 6 работы [16].

Обозначения: x, y – достаточно большие положительные вещественные числа; q натуральное число, $\mathscr{L}=\ln xq$; M_j и N_j – целые числа; $\mu(n)$ — функция Мёбиуса; $\tau_k(n)$ — число представлений числа n в виде произведений k сомножителей;

3. Короткая кубическая двойная тригонометрическая сумма с “длинным” сплошным суммированием

Лемма 5. *Пусть в сумме $J_3(\alpha;x,y,M,N)$ выполняются условия $|a_m|\leqslant\tau_4(m)$, $b_n=1$, $\sqrt{x}<y<x\mathscr{L}^{-1}$. Тогда при*

$$\mathscr{L}^{8A+4102}<q<y^3\mathscr{L}^{-8A-4104},\qquad xy^{-\frac14}\mathscr{L}^{2A+1026}<N\leqslant x\mathscr{L}^{-2A-8},$$

где A — абсолютная постоянная, справедлива оценка

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll \frac{y}{\mathscr{L}^A}.$$

Доказательство. Для удобства условия $xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2A+1026} < N \leqslant x\mathscr{L}^{-2A-8}$ в теореме, с учетом неравенства $MN \asymp x$, заменим на $\mathscr{L}^{2A+8} \ll M \ll y^{\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{-2A-1026}$, а сумму $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ обозначим через W. Возводя W в квадрат, найдем

$$|W|^2 = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{M<\mu\leq 2M} a_\mu \sum_{\substack{U<u\leqslant 2N\\ x-y<mu\leqslant x}} \sum_{\substack{U<u_1\leqslant 2N\\ x-y<\mu u_1\leqslant x}} e(\alpha((\mu u_1)^3 - (mu)^3)).$$

Разбивая сумму на три части, для которых соответственно выполняются условия $mu < \mu u_1$, $mu = \mu u_1$ и $mu > \mu u_1$, и имея в виду, что

$$\sum_{M<m,\mu\leqslant 2M} a_m a_\mu \sum_{\substack{U<u,u_1\leqslant 2N\\ x-y<mu=\mu u_1\leqslant x}} 1 = \sum_{x-y<r\leqslant x} \left(\sum_{\substack{m|r, M<m\leqslant 2M\\ U<r/m\leqslant 2N}} a_m \right)^2 \ll \sum_{x-y<r\leqslant x} \left(\sum_{m\backslash r} \tau_4(m) \right)^2 \ll y\mathscr{L}^{24},$$

получим

$$|W|^2 = W_1 + W_2 + O\left(y\mathscr{L}^{24}\right), \tag{2}$$

$$W_1 = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{M<\mu\leq 2M} a_\mu \sum_{\substack{U<u\leq 2N\\ x-y<mu\leqslant x}} \sum_{\substack{U<u_1\leq 2N\\ mn<\mu u_1\leqslant x}} e(\alpha((\mu u_1)^3 - (mu)^3)),$$

$$W_2 = \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{M<\mu\leq 2M} a_\mu \sum_{\substack{U<u\leq 2N\\ x-y<mu\leqslant x}} \sum_{\substack{U<u_1\leq 2N\\ x-y<\mu u_1<mu}} e(\alpha((\mu u_1)^3 - (mu)^3)).$$

Имея в виду, что $|W_1| = |W_2|$, оценим только W_1. В сумме по u_1, делая замену переменной, вместо u_1 вводим переменную $r = \mu u_1 - mu$, для которой выполняются условия

$$mu + r \equiv 0 (mod \mu), \quad U\mu < mu + r \leqslant 2N\mu, \quad 0 < r \leqslant x - mu.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&(\mu u_1)^3 - (mu)^3 = (\mu u_1 - mu)((mu)^2 + mu\mu u_1 + (\mu u_1)^2) = \\
&= r\left((mu)^2 + mu\mu \cdot \frac{mu + r}{\mu} + \left(\mu \cdot \frac{mu + r}{\mu}\right)^2\right) = r(3(mu)^2 + 3mur + r^2),
\end{aligned}$$

и сумма W_1 принимает вид

$$\begin{aligned}
W_1 &= \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{M<\mu\leq 2M} a_\mu \sum_{\substack{U<u\leqslant 2N\\ x-y<mu\leqslant x}} \sum_{\substack{U\mu<mu+r\leqslant 2N\mu\\ 0<r\leqslant x-mu\\ mu+r\equiv 0(mod\mu)}} e(\alpha r(3(mu)^2 + 3mur + r^2)) = \\
&= \sum_{M<m\leq 2M} a_m \sum_{M<\mu\leq 2M} a_\mu \sum_{0<r<y} \sum_{\substack{F<u\leq G\\ mu\equiv -r(mod\mu)}} e(\alpha r(3(mu)^2 + 3mur + r^2)),
\end{aligned}$$

где

$$F = \max\left(U, \frac{U\mu - r}{m}, \frac{x-y}{m}\right), \qquad G = \min\left(2N, \frac{2N\mu - r}{m}, \frac{x}{m}\right).$$

Разбивая сумму W_1 на слагаемые, с условием $(m,\mu)=d$, $d\leqslant 2M$, имеем

$$W_1=\sum_{d\leqslant 2M}\sum_{M<m\leq 2M}a_m\sum_{\substack{M<\mu\leq 2M\\(m,\mu)=d}}a_\mu\sum_{0<r<y}\sum_{\substack{F<u\leq G\\mu\equiv -r(mod\mu)}}e(\alpha r(3(mu)^2+3mur+r^2)).$$

Условие $(m,\mu)=d$ в сумме W равносильно условиям $m=\hat m d$, $\mu=\hat\mu d$, $(\hat m,\hat\mu)=1$. Следовательно, сравнение $mu\equiv -r(mod\,\mu)$ разрешимо только в случае, если r имеет вид $r=\hat r d$. Поэтому, заменив его на сравнение $\hat m u\equiv -\hat r(mod\,\hat\mu)$, а переменные суммирования m, μ, r соответственно на $\hat m d$, $\hat\mu d$, $r=\hat r d$, найдем

$$W_1=\sum_{d\leqslant 2M}\sum_{M<\hat m d\leq 2M}a_{\hat m d}\sum_{\substack{M<\hat\mu d\leq 2M\\(\hat m,\hat\mu)=1}}a_{\hat\mu d}\sum_{0<\hat r d<y}\sum_{\substack{F_{\hat m\hat\mu}<u\leq G_{\hat m\hat\mu}\\ \hat m u\equiv -\hat r(mod\hat\mu)}}e(\alpha\hat r d^3(3(\hat m u)^2+3\hat m u\hat r+\hat r^2)),$$

$$F_{\hat m\hat\mu}=\max\left(U,\frac{U\hat\mu-\hat r}{\hat m},\frac{x-y}{\hat m d}\right),\qquad G_{\hat m\hat\mu}=\min\left(2N,\frac{2N\hat\mu-\hat r}{\hat m},\frac{x}{\hat m d}\right).$$

Сравнение $\hat m u\equiv -\hat r(mod\,\hat\mu)$ равносильно сравнению $u\equiv -\hat r\hat m_{\hat\mu}^{-1}(mod\,\hat\mu)$, где $\hat m_{\hat\mu}^{-1}$ определяется из сравнения $\hat m\hat m_{\hat\mu}^{-1}\equiv 1(mod\,\hat\mu)$. Поэтому, представляя u в виде $u=-\hat r\hat m_{\hat\mu}^{-1}+\hat\mu\hat u$, получим

$$W_1=\sum_{d\leqslant 2M}\sum_{M<\hat m d\leq 2M}a_{\hat m d}\sum_{\substack{M<\hat\mu d\leq 2M\\(\hat m,\hat\mu)=1}}a_{\hat\mu d}\sum_{0<\hat r d<y}\sum_{\mathcal F_{\hat m\hat\mu}<\hat u\leq \mathcal G_{\hat m\hat\mu}}e(\alpha\hat r d^3(\hat r^2+g(\hat u,\hat m,\hat\mu))),$$

$$\mathcal F_{\hat m\hat\mu}=\frac{F_{\hat m\hat\mu}}{\hat\mu}+\frac{\hat r\hat m_{\hat\mu}^{-1}}{\hat\mu},\qquad \mathcal G_{\hat m\hat\mu}=\frac{G_{\hat m\hat\mu}}{\hat\mu}+\frac{\hat r\hat m_{\hat\mu}^{-1}}{\hat\mu},$$

$$3(\hat m u)^2+3\hat m u\hat r+\hat r^2=3(\hat m(\hat\mu\hat u-\hat r\hat m_{\hat\mu}^{-1}))^2+3\hat m(\hat\mu\hat u-\hat r\hat m_{\hat\mu}^{-1})\hat r+\hat r^2=$$
$$=3(\hat m\hat\mu\hat u-\hat r\hat m\hat m_{\hat\mu}^{-1})^2+3(\hat m\hat\mu\hat u-\hat r\hat m\hat m_{\hat\mu}^{-1})\hat r+\hat r^2=g(\hat u,\hat m,\hat\mu)+\hat r^2.$$

В сумме W_1, ради удобства, обозначая переменные суммирования $\hat m$, $\hat\mu$, $\hat r$ и $\hat u$ через m, μ, r и u, получим

$$\begin{aligned}
&W_1=\sum_{d\leqslant 2M}\sum_{0<rd<y}e(\alpha d^3r^3)W(r,d),\\
&W(r,d)=\sum_{M<md\leq 2M}a_{md}\sum_{\substack{M<\mu d\leq 2M\\(m,\mu)=1}}a_{\mu d}\sum_{\mathcal F_{m\mu}<u\leq\mathcal G_{m\mu}}e(3\alpha r d^3 g(u,m,\mu)),\\
&\mathcal F_{m\mu}=\frac{F_{m\mu}+rm_\mu^{-1}}{\mu},\qquad F_{m\mu}=\max\left(U,\frac{U\mu-r}{m},\frac{x-y}{md}\right),\\
&\mathcal G_{m\mu}=\frac{G_{m\mu}+rm_\mu^{-1}}{\mu},\qquad G_{m\mu}=\min\left(2N,\frac{2N\mu-r}{m},\frac{x}{md}\right),\\
&g(u,m,\mu)=(m\mu u-rmm_\mu^{-1})^2+(m\mu u-rmm_\mu^{-1})r.
\end{aligned}\tag{3}$$

Разобьем в W_1 отрезок суммирования по d на не более чем $\mathscr L$ интервалов вида $D<d\leqslant 2D$, $D\leqslant M$. Получим не более $\mathscr L$ сумм $W(D)$ вида

$$W(D)\leqslant\sum_{D<d\leqslant 2D}\sum_{0<rd<y}|W(r,d)|.\tag{4}$$

Имея в виду, что $D\leqslant M$ и $M\gg\mathscr L^{2A+8}$, рассмотрим два случая: $D>\mathscr L^{2A+8}$ и $D\leqslant\mathscr L^{2A+8}$.

2. *Оценка* $W(D)$, $D>\mathscr L^{2A+8}$. В сумме $W(r,d)$ оценим сверху длину интервала суммирования по u, воспользовавшись условием $M\leqslant y^{\frac14}$. Тогда имеем

$$\mathcal G_{m\mu}-\mathcal F_{m\mu}+1=\frac{G_{m\mu}-F_{m\mu}}{\mu}+1\leqslant\frac{y}{m\mu d}+1<\frac{yd}{M^2}+1\leqslant\frac{2yd}{M^2}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть (4), воспользовавшись соотношением $|a_m| \leqslant \tau_5(m)$, затем леммой 3, последовательно получим

$$W(D) \ll \sum_{D<d\leqslant 2D} \sum_{0<rd<y} \sum_{M<md\le 2M} \tau_4(md) \sum_{\substack{M<\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}} \tau_4(\mu d)(\mathcal{G}_{m\mu} - \mathcal{F}_{m\mu} + 1) \ll$$

$$\ll \sum_{D<d\leqslant 2D} \tau_4^2(d)\,\frac{y}{d} \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}} \tau_4(m\mu)\frac{yd}{M^2} \ll \frac{y^2}{M^2} \sum_{D<d\leqslant 2D} \tau_4^2(d) \left(\sum_{Md^{-1}<m\leqslant 2Md^{-1}} \tau_4(n) \right)^2 \ll$$

$$\ll \frac{y^2\mathscr{L}^6}{D^2} \sum_{D<d\leqslant 2D} \tau_4^2(d) \ll \frac{y^2\mathscr{L}^6}{D(\ln D)^{-15}} < \frac{y^2\mathscr{L}^6}{\mathscr{L}^{2A+8}((2A+8)\ln\mathscr{L})^{-15}} \ll \frac{y^2}{\mathscr{L}^{2A+1}}.$$

3. Далее всюду будем считать, что $D < d \leqslant 2D$ и $D \leqslant \mathscr{L}^{2A+8}$. Возводя неравенство (4) в квадрат и применяя неравенство Коши, получим

$$W^2(D) \leqslant y \sum_{D<d\leqslant 2D} \sum_{0<rd<y} |W(r,d)|^2, \tag{5}$$

$$|W(r,d)|^2 = \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\(n,\nu)=1}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\le\mathcal{G}_{n\nu}} e(3\alpha rd^3(g(u_1,n,\nu) - g(u,m,\mu))),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n\nu} &= \frac{F_{n\nu}}{\nu} + \frac{rn_\nu^{-1}}{\nu}, \qquad F_{n\nu} = \max\left(U, \frac{U\nu - r}{n}, \frac{x-y}{nd}\right),\\ \mathcal{G}_{n\nu} &= \frac{G_{n\nu} + rn_\nu^{-1}}{\nu}, \qquad G_{n\nu} = \min\left(2N, \frac{2N\nu - r}{n}, \frac{x}{nd}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Воспользовавшись явным видом $g(u_1,n,\nu) - g(u,m,\mu)$ в $|W(r,d)|^2$, то есть соотношением

$$\begin{aligned} &g(u_1,n,\nu) - g(u,m,\mu) =\\ &= (n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1})^2 + (n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1})r - (m\mu u - rmm_\mu^{-1})^2 - (m\mu u - rmm_\mu^{-1})r =\\ &= (n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1} - m\mu u + rmm_\mu^{-1})(n\nu u_1 + m\mu u - rmm_\mu^{-1} - rnn_\nu^{-1} + r), \end{aligned} \tag{7}$$

разбивая сумму $|W(r,d)|^2$ на три суммы W_{rd}, W'_{rd} и W''_{rd}, найдем

$$|W(r,d)|^2 = W_{rd} + W'_{rd} + W''_{rd}, \tag{8}$$

$$W_{rd} = \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\(n,\nu)=1}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\substack{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\le\mathcal{G}_{n\nu}\\ n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1} > m\mu u - rmm_\mu^{-1}}} e(3\alpha rd^3(g(u_1,n,\nu) - g(u,m,\mu))),$$

$$W'_{rd} = \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\(n,\nu)=1}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\substack{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\le\mathcal{G}_{n\nu}\\ n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1} < m\mu u - rmm_\mu^{-1}}} e(3\alpha rd^3(g(u_1,n,\nu) - g(u,m,\mu))),$$

$$W''_{rd} = \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\(n,\nu)=1}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\le\mathcal{G}_{m\mu}} \sum_{\substack{\mathcal{F}_{n\nu}<u_1\le\mathcal{G}_{n\nu}\\ n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1} = m\mu u - rmm_\mu^{-1}}} 1.$$

4. Оценка W''_{rd}. Пользуясь определениями параметров $F_{m\mu}$, $G_{m\mu}$, $F_{n\nu}$ и $G_{n\nu}$, то есть соотношениями (3) и (6), легко показать, что условия $\mathcal{F}_{m\mu} < u \le \mathcal{G}_{m\mu}$ и $\mathcal{F}_{n\nu} < u_1 \le \mathcal{G}_{n\nu}$ соответственно равносильны условиям

$$\max\left(Um, U\mu - r, \frac{x-y}{d}\right) < m\mu u - rmm_\mu^{-1} \leqslant \min\left(2Nm, 2N\mu - r, \frac{x}{d}\right),$$

$$\max\left(Un, U\nu - r, \frac{x-y}{d}\right) < n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1} \leqslant \min\left(2Nn, 2N\nu - r, \frac{x}{d}\right).$$

Поэтому, вводя обозначение $h = m\mu u - rmm_\mu^{-1} = n\nu u_1 - rnn_\nu^{-1}$, найдем

$$W''_{rd} = \sum_{x-y<hd\leqslant x} \omega^2(h), \qquad \omega(h) = \sum_{\substack{h=m\mu u - rmm_\mu^{-1} \\ M<md,\mu d\leq 2M,\,(m,\mu)=1 \\ \mathcal{F}_{m\mu}<u\leqslant \mathcal{G}_{m\mu}}} a_{md}a_{\mu d}.$$

Из условий $h = m\mu u - rmm_\mu^{-1}$ и $mm_\mu^{-1} = 1 + \mu t$, t — целое, следует, что

$$h + r = m\mu u - r(mm_\mu^{-1} - 1) = \mu(mu - rt),$$

то есть μ является делителем числа $h + r$, следовательно,

$$\omega(h) \leqslant \sum_{\substack{m\backslash h \\ M<md\leq 2M}} |a_{md}| \sum_{\substack{\mu\backslash h+r \\ M<\mu d\leq 2M\ (m,\mu)=1 \\ \mathcal{F}_{m\mu}<\frac{h}{m\mu}+\frac{rm_\mu^{-1}}{\mu}\leqslant \mathcal{G}_{m\mu}}} |a_{\mu d}| \ll \sum_{m\backslash h} \tau_4(md) \sum_{\mu\backslash h+r} \tau_4(\mu d) \leqslant \tau_4^2(d)\tau_5(h)\tau_5(h+r).$$

Отсюда, воспользовавшись леммой 3, найдем

$$|W''_{rd}| \ll \tau_4^4(d) \sum_{x-y<hd\leqslant x} \tau_5^2(h)\tau_5^2(h+r) \ll y\mathscr{L}^{5^4-1}\,\frac{\tau_4^4(d)}{d}.$$

Отсюда с учетом (8) и (5), имея в виду, что $|W_{rd}| = |W'_{rd}|$, получим

$$W^2(D) \ll y \sum_{D<d\leqslant 2D}\ \sum_{0<rd<y} |W_{rd}| + y^3\mathscr{L}^{5^4-1}. \tag{9}$$

5. *Преобразуем W_{rd} так, чтобы сумма по u стала линейной.* Для этого, делая замену переменных, вместо u_1 вводим $\sigma = n\nu u_1 - m\mu u$, с областью изменения вида

$$\Omega = \left\{\sigma:\ m\mu u + \sigma \equiv 0(mod\, n\nu),\ \mathcal{F}_{n\nu} < \frac{m\mu u + \sigma}{n\nu} \leqslant \mathcal{G}_{n\nu},\ \sigma > rnn_\nu^{-1} - rmm_\mu^{-1}\right\}.$$

При этом, воспользовавшись соотношением (7), представим разность $g(u_1, n, \nu) - g(u, m, \mu)$ как функцию σ, то есть

$$g(u_1,n,\nu) - g(u,m,\mu) = (n\nu u_1 - m\mu u + rmm_\mu^{-1} - rnn_\nu^{-1})(n\nu u_1 + m\mu u - rmm_\mu^{-1} - rnn_\nu^{-1} + r) =$$
$$= (\sigma + rmm_\mu^{-1} - rnn_\nu^{-1})(\sigma + 2m\mu u - rmm_\mu^{-1} - rnn_\nu^{-1} + r) = g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu),$$

и сумма W_{rd} принимает вид

$$W_{rd} = \sum_{\substack{M<md,\mu d\leq 2M \\ (m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\leq 2M \\ (n,\nu)=1}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\mathcal{F}_{m\mu}<u\leq \mathcal{G}_{m\mu}}\ \sum_{\sigma\in\Omega} e\left(3\alpha r d^3 g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)\right).$$

Воспользовавшись определениями области Ω и параметров $\mathcal{F}_{m\mu}$, $\mathcal{G}_{n\nu}$, найдём возможно допустимую верхнюю границу изменения переменной суммирования σ. Имеем

$$\sigma \leqslant n\nu\mathcal{G}_{n\nu} - m\mu u \leqslant n\nu\mathcal{G}_{n\nu} - m\mu\mathcal{F}_{m\mu} = n\nu\frac{G_{n\nu} + rn_\nu^{-1}}{\nu} - m\mu\frac{F_{m\mu} + rm_\mu^{-1}}{\mu} =$$
$$= nG_{n\nu} - mF_{m\mu} + rnn_\nu^{-1} - rmm_\mu^{-1} = n\min\left(2N, \frac{2N\nu - r}{n}, \frac{x}{nd}\right) -$$
$$- m\max\left(U, \frac{U\mu - r}{m}, \frac{x-y}{md}\right) + rnn_\nu^{-1} - rmm_\mu^{-1} \leqslant \frac{y}{d} - rmm_\mu^{-1} + rnn_\nu^{-1}.$$

С учётом найденной границы в W_{rd}, сделав сумму по u внутренней, найдём

$$W_{rd} = \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\(n,\nu)=1}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\sigma\in\Omega_1}\sum_{u\in\mathcal{U}} e\left(3\alpha r d^3 g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)\right),$$

$$\Omega_1 = \left\{\sigma:\ 0<\sigma + rm m_\mu^{-1} - rn n_\nu^{-1} \leqslant \frac{y}{d}\right\},$$

$$\mathcal{U} = \left\{u:\ m\mu u + \sigma \equiv 0(mod\, n\nu),\ \frac{\mathcal{F}_{n\nu}n\nu - \sigma}{m\mu} < u \leqslant \frac{\mathcal{G}_{n\nu}n\nu-\sigma}{m\mu},\ \mathcal{F}_{m\mu} < u \le \mathcal{G}_{m\mu}\right\},$$

то есть в W_{rd} внутренняя сумма стала линейной, переменная суммирования u пробегает те значения из своего сплошного интервала изменения, которые являются решением линейного сравнения.

6. Разбивая сумму W_{rd} на слагаемые с условием $(m\mu, n\nu)=\delta$, $\delta\leqslant 4M^2d^{-2}$, имеем

$$W_{rd} = \sum_{\delta\leqslant 4M^2d^{-2}} \sum_{\substack{M<md,\mu d\le 2M\\(m,\mu)=1}} a_{md}a_{\mu d} \sum_{\substack{M<nd,\nu d\le 2M\\(n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=\delta}} a_{nd}a_{\nu d} \sum_{\sigma\in\Omega_1}\sum_{u\in\mathcal{U}} e\left(3\alpha r d^3 g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)\right).$$

Условия $(m\mu,n\nu)=\delta$ с учётом условий $(m,\mu)=1$ и $(n,\nu)=1$ в сумме W_{rd} равносильны условиям

$$m\mu = \hat m\hat\mu\delta,\quad (\hat m,\hat\mu)=1,\quad n\nu=\hat n\hat\nu\delta,\quad (\hat n,\hat\nu)=1,\quad (\hat m\hat\mu,\hat n\hat\mu)=1,$$

$$m=\hat m\eta,\quad \eta\backslash\delta,\quad \mu=\hat\mu\delta/\eta,\quad (\eta,\delta/\eta)=1,\quad n=\hat n\lambda,\quad \lambda\backslash\delta,\quad \nu=\hat\nu\delta/\lambda,\quad (\lambda,\delta/\lambda)=1.$$

Следовательно, в области $\mathcal{U}$ сравнение

$$m\mu u + \sigma \equiv 0(mod\, n\nu)$$

разрешимо только в случае, если σ имеет вид $\sigma=\hat\sigma\delta$. Поэтому, заменяя переменные суммирования m, μ, n, ν, σ соответственно на $\hat m\eta$, $\hat\mu\delta/\eta$, $\hat n\lambda$, $\hat\nu\delta/\lambda$, $\hat\sigma\delta$, перепишем предыдущее сравнение в виде

$$\hat m\hat\mu u \equiv -\hat\sigma(mod\,\hat n\hat\nu),$$

при этом параметры $\mathcal{F}_{m\mu}$, $F_{m\mu}$, $\mathcal{G}_{m\mu}$, $G_{m\mu}$, $\mathcal{F}_{n\nu}$, $F_{n\nu}$, $\mathcal{G}_{n\nu}$, $G_{n\nu}$ и функция $g_1(u,\sigma,m,\mu,n,\nu)$ соответственно превращаются в параметры $\mathcal{F}_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta}$, $F_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta}$, $\mathcal{G}_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta}$, $G_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta}$, $\mathcal{F}_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda}$, $F_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda}$, $\mathcal{G}_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda}$, $G_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda}$, и функцию $g_1(u)=g_1(u,\hat\sigma\delta,\hat m\eta,\hat\mu\delta/\eta,\hat n\lambda,\hat\nu\delta/\lambda)$, которые имеют вид

$$\mathcal{F}_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta} = \frac{F_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta}}{\hat\mu\delta/\eta} + \frac{r(\hat m\eta)^{-1}_{\hat\mu\delta/\eta}}{\hat\mu\delta/\eta},\qquad F_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta} = \max\left(U, \frac{U\hat\mu\delta/\eta - r}{\hat m\eta}, \frac{x-y}{\hat m\eta d}\right),$$

$$\mathcal{G}_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta} = \frac{G_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta}}{\hat\mu\delta/\eta} + \frac{r(\hat m\eta)^{-1}_{\hat\mu\delta/\eta}}{\hat\mu\delta/\eta},\qquad G_{\hat m\eta,\,\hat\mu\delta/\eta} = \min\left(2N, \frac{2N\hat\mu\delta/\eta - r}{\hat m\eta}, \frac{x}{\hat m\eta d}\right),$$

$$\mathcal{F}_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda} = \frac{F_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda}}{\hat\nu\delta/\lambda} + \frac{r(\hat n\lambda)^{-1}_{\hat\nu\delta/\lambda}}{\hat\nu\delta/\lambda},\qquad F_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda} = \max\left(U, \frac{U\hat\nu\delta/\lambda - r}{\hat n\lambda}, \frac{x-y}{\hat n\lambda d}\right),$$

$$\mathcal{G}_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda} = \frac{G_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda}}{\hat\nu\delta/\lambda} + \frac{r(\hat n\lambda)^{-1}_{\hat\nu\delta/\lambda}}{\hat\nu\delta/\lambda},\qquad G_{\hat n\lambda,\,\hat\nu\delta/\lambda} = \min\left(2N, \frac{2N\hat\nu\delta/\lambda - r}{\hat n\lambda}, \frac{x-y}{\hat n\lambda d}\right),$$

$$g_1(u,\hat\sigma\delta,\hat m\eta,\hat\mu\delta/\eta,\hat n\lambda,\hat\nu\delta/\lambda) = \left(\hat\sigma\delta + r\hat m\eta\,(\hat m\eta)^{-1}_{\hat\mu\delta/\eta} - r\hat n\lambda\,(\hat n\lambda)^{-1}_{\hat\nu\delta/\lambda}\right)\times$$
$$\times\left(\hat\sigma\delta + 2\hat m\hat\mu\delta u - r\hat m\eta\,(\hat m\eta)^{-1}_{\hat\mu\delta/\eta} - r\hat n\lambda\,(\hat n\lambda)^{-1}_{\hat\nu\delta/\lambda} + r\right),$$

и сумма W_{rd} представится в виде

$$W_{rd} = \sum_{\delta\leqslant 4M^2d^{-2}} \sum_{\substack{\eta|\delta \\ (\eta,\delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda|\delta \\ (\lambda,\delta/\lambda)=1}} W_{rd}(\delta,\eta,\lambda), \tag{10}$$

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda) = \sum_{\substack{M<d\hat{m}\eta,\, d\hat{\mu}\delta/\eta\le 2M \\ (\hat{m},\hat{\mu})=1}} a_{d\hat{m}\eta}a_{d\hat{\mu}\delta/\eta} \sum_{\substack{M<d\hat{n}\lambda,\, d\hat{\nu}\delta/\lambda\le 2M \\ (\hat{n},\hat{\nu})=1,\,(\hat{m}\hat{\mu},\hat{n}\hat{\nu})=1}} a_{d\hat{n}\lambda}a_{d\hat{\nu}\delta/\lambda} \sum_{\hat{\sigma}} \sum_{u} e\left(3\alpha r d^3 g_1(u)\right),$$

где суммирование ведётся по тем $\hat{\sigma}$ и u, для которых соответственно выполняются условия

- $0 < \hat{\sigma}\delta + r\hat{m}\eta(\hat{m}\eta)^{-1}_{\hat{\mu}\delta/\eta} - r\hat{n}\lambda(\hat{n}\lambda)^{-1}_{\hat{\nu}\delta/\lambda} \leqslant \dfrac{y}{d}$;
- $\hat{m}\hat{\mu}u + \hat{\sigma} \equiv 0 (mod\, \hat{n}\hat{\nu})$, $\dfrac{\mathcal{F}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}\hat{n}\hat{\nu}}{\hat{m}\hat{\mu}} < u + \dfrac{\hat{\sigma}}{\hat{m}\hat{\mu}} \leqslant \dfrac{\mathcal{G}_{\hat{n}\lambda,\,\hat{\nu}\delta/\lambda}\hat{n}\hat{\nu}}{\hat{m}\hat{\mu}}$, $\mathcal{F}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta} < u \le \mathcal{G}_{\hat{m}\eta,\,\hat{\mu}\delta/\eta}$.

Подставляя правую часть (10) в соотношение (9), получим

$$W^2(D) \ll y \sum_{D<d\leqslant 2D} \sum_{0<rd<y} \sum_{\delta\leqslant 4M^2d^{-2}} \sum_{\substack{\eta|\delta \\ (\eta,\delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda|\delta \\ (\lambda,\delta/\lambda)=1}} |W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)| + y^3\mathscr{L}^{5^4-1}. \tag{11}$$

Разбивая отрезок суммирования по δ не более чем на $\mathscr{L}$ интервалов вида $B < \delta \leqslant 2B$, $B \leqslant 2M^2d^{-2}$, получим не более $\mathscr{L}$ сумм $W_B^2(D)$ вида

$$W_B(D) \ll y \sum_{D<d\leqslant 2D} \sum_{0<rd<y} \sum_{B<\delta\leqslant 2B} \sum_{\substack{\eta|\delta \\ (\eta,\delta/\eta)=1}} \sum_{\substack{\lambda|\delta \\ (\lambda,\delta/\lambda)=1}} |W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)|. \tag{12}$$

В сумме $W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)$, ради удобства обозначая переменные суммирования $\hat{m}$, $\hat{n}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ и $\hat{\sigma}$ соответственно через m, n, μ, ν и σ, также выражение $m\eta(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - n\lambda(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}$ через κ, получим

$$\begin{aligned} W_{rd}(\delta,\eta,\lambda) &= \sum_{\substack{M<dm\eta,\, d\mu\delta/\eta\le 2M \\ (m,\mu)=1}} a_{dm\eta}a_{d\mu\delta/\eta} \sum_{\substack{M<dn\lambda,\, d\nu\delta/\lambda\le 2M \\ (n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=1}} a_{dn\lambda}a_{d\nu\delta/\lambda} \sum_{\sigma} \sum_{u} e\left(3\alpha r d^3 g_1(u)\right), \\ g_1(u,\ldots) &= g_1(u,\sigma\delta,m\eta,\mu\delta/\eta,n\lambda,\nu\delta/\lambda) = \\ &= (\sigma\delta + r\kappa)\left(\sigma\delta + 2m\mu\delta u - rm\eta(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta} - rn\lambda(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda} + r\right), \end{aligned}$$

где суммирование ведётся по тем σ и u, для которых соответственно выполняются условия

$$\begin{aligned} &0 < \sigma\delta + r\kappa \leqslant \frac{y}{d}, && m\mu u + \sigma \equiv 0(mod\, n\nu), \\ &\frac{\mathcal{F}_{n\lambda,\nu\delta/\lambda}n\nu}{m\mu} < u + \frac{\sigma}{m\mu} \leqslant \frac{\mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}n\nu}{m\mu}, && \mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} < u \leqslant \mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} &= \frac{F_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta} + \frac{r(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta}, \quad F_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} = \max\left(U, \frac{U\mu\delta/\eta - r}{m\eta}, \frac{x-y}{m\eta d}\right), \\ \mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} &= \frac{G_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta} + \frac{r(m\eta)^{-1}_{\mu\delta/\eta}}{\mu\delta/\eta}, \quad G_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} = \min\left(2N, \frac{2N\mu\delta/\eta - r}{m\eta}, \frac{x}{m\eta d}\right), \\ \mathcal{F}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} &= \frac{F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda} + \frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}, \quad F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} = \max\left(U, \frac{U\nu\delta/\lambda - r}{n\lambda}, \frac{x-y}{n\lambda d}\right), \\ \mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} &= \frac{G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda} + \frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}, \quad G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} = \min\left(2N, \frac{2N\nu\delta/\lambda - r}{n\lambda}, \frac{x-y}{n\lambda d}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Сравнение $m\mu u+\sigma\equiv 0(mod\, n\nu)$ равносильно сравнению

$$u\equiv -\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}(mod\, n\nu),$$

где числа $m_{n\nu}^{-1}$ и $\mu_{n\nu}^{-1}$ соответственно определяются из сравнений

$$mm_{n\nu}^{-1}\equiv 1(mod\, n\nu),\qquad \mu\mu_{n\nu}^{-1}\equiv 1(mod\, n\nu).$$

Поэтому, представляя u в виде $u=n\nu\hat{u}-\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}$, получим

$$\begin{aligned}
W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)&=\sum_{\substack{M<dm\eta,d\mu\delta/\eta\le 2M\\ (m,\mu)=1}}a_{dm\eta}a_{d\mu\delta/\eta}\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\le 2M\\ (n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=1}}a_{dn\lambda}a_{d\nu\delta/\lambda}\sum_{\sigma}\sum_{\hat{u}}e\left(3\alpha rd^3g_2(\hat{u},\sigma,m,\mu,n,\nu,\delta,\eta,\lambda)\right),\\
g_2(\hat{u},\sigma,m,\mu,n,\nu,\delta,\eta,\lambda)&=g_1(n\nu\hat{u}-\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1},\sigma\delta,m\eta,\mu\delta/\eta,n\lambda,\nu\delta/\lambda)=\\
&=(\sigma\delta+r\kappa)\Big(\sigma\delta+2m\mu\delta\left(n\nu\hat{u}-\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}\right)-rm\eta(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1}-rn\lambda(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1}+r\Big)=\\
&=2m\mu n\nu\delta\hat{u}\,(\sigma\delta+r\kappa)+g_3,
\end{aligned}$$

где g_3 часть $g_2(\hat{u},\sigma,m,\mu,n,\nu,\delta,\eta,\lambda)$, не зависящая от $\hat{u}$ и имеющая вид

$$g_3=(\sigma\delta+r\kappa)\Big(\sigma\delta-2\sigma\delta mm_{n\nu}^{-1}\mu\mu_{n\nu}^{-1}-rm\eta(m\eta)_{\mu\delta/\eta}^{-1}-rn\lambda(n\lambda)_{\nu\delta/\lambda}^{-1}+r\Big),$$

при этом область суммирования по $\hat{u}$ определяется неравенствами, которые получаются из (13) и имеют вид

$$\begin{gathered}
\frac{\mathcal{F}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu}-\frac{\sigma}{m\mu n\nu}+\frac{\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu}<\hat{u}\leqslant\frac{\mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu}-\frac{\sigma}{m\mu n\nu}+\frac{\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu},\\
\frac{\mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}+\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu}<\hat{u}\leqslant\frac{\mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}+\sigma m_{n\nu}^{-1}\,\mu_{n\nu}^{-1}}{n\nu}.
\end{gathered}\tag{15}$$

Переходя к оценкам, воспользовавшись условием $a_m\leqslant\tau_4(m)$ и известным неравенством $\tau_4(kl)\leqslant\tau_4(k)\tau_4(l)$, получим

$$\begin{aligned}
W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)&\leqslant\sum_{\substack{M<dm\eta,\,d\mu\delta/\eta\leqslant 2M\\ (m,\mu)=1}}\tau_4(dm\eta)\tau_4(d\mu\delta/\eta)\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\leqslant 2M\\ (n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=1}}\tau_4(dn\lambda)\tau_4(d\nu\delta/\lambda)\sum_{\substack{\sigma\leqslant y/d\\ \sigma\equiv\kappa r(mod\,\delta)}}\left|\sum_{\hat{u}}e\left(6\alpha rd^3m\mu n\nu\delta\sigma\hat{u}\right)\right|\leqslant\\
&\leqslant\tau_4^2(\delta)\tau_4^4(d)\sum_{\substack{M<dm\eta,\,d\mu\delta/\eta\leqslant 2M\\ (m,\mu)=1}}\tau_4(m\mu)\sum_{\substack{M<dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\leqslant 2M\\ (n,\nu)=1,\,(m\mu,n\nu)=1}}\tau_4(n\nu)\sum_{\substack{\sigma\leqslant y/d\\ \sigma\equiv\kappa r(mod\,\delta)}}\left|\sum_{\hat{u}}e\left(6\alpha rd^3m\mu n\nu\delta\sigma\hat{u}\right)\right|=\\
&=\tau_4^2(\delta)\tau_4^4(d)\sum_{M^4<d^4\delta^2t\leqslant 16M^4}\tau_4(t)\xi(t)\sum_{\substack{\sigma\leqslant y/d\\ \sigma\equiv\kappa r(mod\,\delta)}}\left|\sum_{\hat{u}}e\left(6\alpha rd^3t\delta\sigma\hat{u}\right)\right|,\\
\xi(t)&=\sum_{\substack{t=m\mu n\nu,\,(m,\mu)=(n,\nu)=(m\mu,n\nu)=1\\ M<dm\eta,d\mu\delta/\eta,dn\lambda,d\nu\delta/\lambda\leqslant 2M}}1\leqslant\tau_4(t).
\end{aligned}$$

Оценим сверху величину $\mathscr{U}$ – длину интервала суммирования по $\hat{u}$ в $W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)$. Воспользовавшись определениями параметров $\mathcal{F}_{m\mu}$, $\mathcal{G}_{m\mu}$, $\mathcal{F}_{n\nu}$ и $\mathcal{G}_{n\nu}$ из (14), затем неравенствами (15), имеем

$$\mathscr{U} \leqslant \frac{\mathcal{G}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} - \mathcal{F}_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu} = \frac{1}{m\mu}\left(\frac{G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda} + \frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda} - \frac{F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda} - \frac{r(n\lambda)^{-1}_{\nu\delta/\lambda}}{\nu\delta/\lambda}\right) =$$
$$= \frac{G_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda} - F_{n\lambda,\,\nu\delta/\lambda}}{m\mu\cdot\nu\delta/\lambda} = \frac{1}{m\mu\nu\delta/\lambda}\left(\min\left(2N, \frac{2N\nu\delta/\lambda - r}{n\lambda}, \frac{x}{n\lambda d}\right) -\right.$$
$$\left. - \max\left(U, \frac{U\nu\delta/\lambda - r}{n\lambda}, \frac{x-y}{n\lambda d}\right)\right) \leqslant \frac{1}{m\mu\nu\delta/\lambda}\cdot\frac{y}{n\lambda d} \leqslant \frac{y\delta d^3}{M^4},$$
$$\mathscr{U} \leqslant \frac{\mathcal{G}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} - \mathcal{F}_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{n\nu} = \frac{G_{m\eta,\,\mu\delta/\eta} - F_{m\eta,\,\mu\delta/\eta}}{n\nu\cdot\mu\,\delta/\eta} \leqslant \frac{1}{\mu n\nu\,\delta/\eta}\cdot\frac{y}{m\eta d} \leqslant \frac{y\delta d^3}{M^4}.$$

Отсюда, а также из условия $M \leqslant y^{\frac14}$ следует, что количество слагаемых в сумме по $\hat{u}$ в $W_{rd}(\delta,\eta,\lambda)$ не превосходит величину

$$\mathscr{U} + 1 \leqslant \frac{y\delta d^3}{M^4} + 1 \ll \frac{y\delta d^3}{M^4} \ll \frac{yBD^3}{M^4}.$$

С учётом последнего неравенства, суммируя по $\hat{u}$, найдем

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda) \ll \tau_4^2(\delta)\tau_4^4(d)\sum_{\frac{M^4}{64B^2D^4}<t\leqslant\frac{16M^4}{B^2D^4}}\tau_4^2(t)\sum_{\substack{\sigma\leqslant y/d\\ \sigma\equiv\kappa(mod\,\delta)}}\min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|6\alpha r d^3 t\delta\sigma\|}\right). \qquad (16)$$

Рассмотрим отдельно два случая: $B > \mathscr{L}^{4A+19}$ и $B \leqslant \mathscr{L}^{4A+19}$.

7. ***Оценка*** $W_B(D)$ при $B > \mathscr{L}^{4A+19}$. Пользуясь соотношениями $\delta \leqslant 4M^2d^{-2}$ и $M \leqslant y^{\frac14}$, оценим сверху число слагаемых в сумме по σ:

$$\frac{y}{\delta d} + 1 = \frac{y+\delta d}{\delta d} \leqslant \frac{y + 4M^2d^{-1}}{\delta d} \ll \frac{y}{\delta d} \ll \frac{y}{BD}.$$

Воспользовавшись этим неравенством, тривиально оценивая в (16) сумму по σ числом слагаемых и применяя к сумме по t лемму 3, найдем

$$W_{rd}(\delta,\eta,\lambda) \ll \tau_4^2(\delta)\tau_4^4(d)\sum_{\frac{M^4}{64B^2D^4}<t\leqslant\frac{16M^4}{B^2D^4}}\tau_4^2(t)\cdot\frac{yBD^3}{M^4}\cdot\frac{y}{BD} \ll \frac{y^2}{B^2D^2}\,\mathscr{L}^{15}\,\tau_4^4(d)\,\tau_4^2(\delta).$$

Подставляя найденную оценку в (12), применяя лемму 3, а затем воспользовавшись условием $B \geqslant \mathscr{L}^{4A+19}$, получим

$$W_B(D) \ll \frac{y^3}{B^2D^2}\,\mathscr{L}^{15}\sum_{D<d\leqslant 2D}\tau_4^4(d)\sum_{0<rd<y}\sum_{B<\delta\leqslant 2B}\tau_4^2(\delta)\sum_{\substack{\eta|\delta\\(\eta,\delta/\eta)=1}}\sum_{\substack{\lambda|\delta\\(\lambda,\delta/\lambda)=1}}1 \ll$$
$$\ll \frac{y^4(\ln D)^{255}}{B^2D^2}\,\mathscr{L}^{15}\sum_{B<\delta\leqslant 2B}\tau_4^2(\delta)\tau^2(\delta) \ll \frac{y^4}{B^2}\mathscr{L}^{15}\sum_{B<\delta\leqslant 2B}\frac{\tau_3^4(\delta)}{\delta^2} \ll$$
$$\ll y^4\mathscr{L}^{15}\,\frac{(\ln B)^{80}}{B} = \frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+3}}\,\frac{\mathscr{L}^{4A+18}}{B(\ln B)^{-80}} \ll \frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+3}}.$$

8. ***Оценка*** $W_B(D)$ при $B \leqslant \mathscr{L}^{4A+19}$. Поставляя оценку (16) в (12), получим

$$W_B(D) \ll y\sum_{D<d\leqslant 2D}\tau_4^4(d)\sum_{0<rd<y}\sum_{B<\delta\leqslant 2B}\tau_4^4(\delta)\sum_{\frac{M^4}{64B^2D^4}<t\leqslant\frac{16M^4}{B^2D^4}}\tau_4^2(t)\sum_{\sigma\leqslant\frac{y}{d}}\min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|6\alpha r d^3 t\delta\sigma\|}\right) =$$
$$= y\sum_{\frac{3M^4}{32BD}<h\leqslant\frac{384y^2M^4}{BD^3}}\text{æ}(h)\min\left(\frac{yBD^3}{M^4}, \frac{1}{\|\alpha h\|}\right), \qquad \text{æ}(h) = \sideset{}{''}\sum_{h=6rd^3t\delta\sigma}\tau_4^4(d)\tau_4^4(\delta)\tau_4^2(t),$$

где символ $''$ — означает, что

$$D<d\leqslant 2D,\quad B<\delta\leqslant 2B,\quad r\leqslant\frac{y}{d},\quad \frac{M^4}{64B^2D^4}<t\leqslant\frac{16M^4}{B^2D^4},\quad \sigma\leqslant\frac{y}{d}.$$

Далее, пользуясь условиями $D<\mathscr{L}^{2A+8}$, $B<\mathscr{L}^{4A+19}$, $h/tr\sigma=d^3\delta\asymp D^3B$ и соотношением $\tau(r)\ll r^{\varepsilon}$, находим

$$\begin{aligned}\text{æ}(h)&=\sum_{t|h}{}''\tau_4^2(t)\sum_{\frac{h}{t}=6d^3\delta r\sigma}\tau_4^4(d)\tau_4^4(\delta)=\sum_{t|h}{}''\tau_4^2(t)\sum_{r|\frac{h}{t}}\sum_{\frac{h}{tr}=6d^3\delta\sigma}\tau_4^4(d)\tau_4^4(\delta)=\\&=\sum_{t|h}{}''\tau_4^2(t)\sum_{r|\frac{h}{t}}\sum_{\sigma|\frac{h}{tr}}\sum_{\frac{h}{tr\sigma}=6d^3\delta}\tau_4^4(d)\tau_4^4(\delta)\ll\sum_{t|h}\tau_4^2(t)\sum_{r|\frac{h}{t}}\sum_{\sigma|\frac{h}{tr}}\mathscr{L}^{\frac12}=\\&=\mathscr{L}^{\frac12}\sum_{t|h}\tau_4^2(t)\tau_3\left(\frac{h}{t}\right)\leqslant\mathscr{L}^{\frac12}\tau_4^3(h).\end{aligned}$$

Поэтому

$$W_B(D)\ll y\mathscr{L}^{\frac12}\sum_{h\leqslant\frac{y^2M^4}{BD^3}}\tau_4^3(h)\min\left(\frac{yBD^3}{M^4},\frac{1}{\|\alpha h\|}\right).$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 3, получим

$$\begin{aligned}W_B^2(D)&\ll y^2\mathscr{L}\cdot\frac{y^2M^4}{BD^3}\mathscr{L}^{4095}\cdot\frac{yBD^3}{M^4}\sum_{h\leqslant\frac{y^2M^4}{BD^3}}\min\left(\frac{yBD^3}{M^4},\frac{1}{\|\alpha h\|}\right)\ll\\&\ll y^5\mathscr{L}^{4096}\sum_{h\leqslant\frac{y^2M^4}{BD^3}}\min\left(\frac{yBD^3}{M^4},\frac{1}{\|\alpha h\|}\right).\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно случаи $\dfrac{y^2M^4}{BD^3}>0.5q$ и $\dfrac{y^2M^4}{BD^3}\leqslant 0.5q$.

При $\dfrac{y^2M^4}{BD^3}>0.5q$, разбивая интервал изменения h на $\ll\dfrac{y^2M^4}{qBD^3}$ интервалов вида $g\leqslant h\leqslant g+q'$, $q'<q$, применяя утверждение а) леммы 2, а затем воспользовавшись условиями $BD^3\geqslant 1$, $q\geqslant\mathscr{L}^{8A+4102}$ и $M\ll y^{\frac14}\mathscr{L}^{-2A-1026}$, найдем

$$\begin{aligned}W_B^2(D)&\ll y^5\mathscr{L}^{4096}\cdot\frac{y^2M^4}{qBD^3}\sum_{h=g}^{g+q'}\min\left(\frac{yBD^3}{M^4},\frac{1}{\|\alpha h\|}\right)\ll\frac{y^7M^4}{qBD^3}\left(\frac{yBD^3}{M^4}+q\ln q\right)\mathscr{L}^{4096}=\\&=\frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}}\left(\frac{\mathscr{L}^{8A+4102}}{q}+\frac{M^4\ln q}{y\mathscr{L}^{-8A-4102}BD^3}\right)\ll\frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}}.\end{aligned}$$

При $\dfrac{y^2M^4}{BD^3}\leqslant 0.5q$, воспользовавшись утверждением б) леммы 2, а затем условием $q\leqslant$ $\leqslant y^3\mathscr{L}^{-8A-4104}$, получим

$$W_B^2(D)\ll y^5\mathscr{L}^{4096}\sum_{h\leqslant 0.5q}\frac{1}{\|\alpha h\|}\ll y^5q\mathscr{L}^{4097}=\frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}}\cdot\frac{q}{y^3\mathscr{L}^{-8A-4103}}\ll\frac{y^8}{\mathscr{L}^{8A+6}}.$$

Подставляя полученные оценки для $W_B(D)$ в (11) при $D\leqslant\mathscr{L}^{2A+8}$, найдем

$$W^2(D)\ll\frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+2}}+y^3\mathscr{L}^{5^4-1}\ll\frac{y^4}{\mathscr{L}^{4A+2}}.$$

Отсюда, а также из оценки $W(D)$ при $D > \mathscr{L}^{2A+8}$, найденной в пункте 2, получим

$$W_1 \ll \frac{y^2}{\mathscr{L}^{2A}}.$$

Из оценки W_1 и равенства $|W_1| = |W_2|$, с учетом соотношения (2) следует утверждение леммы.

4. Короткая кубическая двойная тригонометрическая сумма с “близкими” по порядку суммами

Лемма 6. *Пусть* $xy^{-1} \leqslant N \leqslant y$, $M \leqslant N$, $y < x\mathscr{L}^{-1}$, $|a_m| \leqslant \tau_{5-k}(m)$, $|b_n| \leqslant \tau_k(n)$, $k = 1, 2, 3$, *тогда при*

$$\mathscr{L}^{32(A+13)} \leqslant q \leqslant \frac{y^5}{x^2}\mathscr{L}^{-32(A+13)}, \qquad \frac{x}{y}\mathscr{L}^{32(A+13)} \leqslant N \leqslant y\mathscr{L}^{-8(A+13)}, \tag{17}$$

где A — абсолютная постоянная, справедлива оценка

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll y\mathscr{L}^{-A}.$$

Доказательство. Далее для удобства сумму $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ обозначим через J_3, при этом, не ограничивая общности, будем считать, что $MN \asymp x$ и $U = N \geqslant \sqrt{x}$. Возводя сумму J_3 в квадрат, применяя неравенство Коши и лемму 3, получим

$$|J_3|^2 \ll M\mathscr{L}^{(5-k)^2-1} \sum_{M<m\leq 2M} \sum_{\substack{N<n_1,n_2\leq 2N\\ x-y<mn_1,mn_2\leq x}} \overline{b(n_1)}b(n_2)e(\alpha m^3(n_2^3 - n_1^3)).$$

Разбивая двойную сумму по n_1 и n_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $n_1 < n_2$, $n_1 = n_2$, $n_1 > n_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{M<m\leq 2M} \sum_{\substack{N<n\leq 2N\\ x-y<mn\leq x}} |b_n|^2 \ll \sum_{x-y<t\leq x} \sum_{\substack{mn=t\\ M<m\leq 2M\\ N<n\leqslant 2N}} \tau_k^2(n) \leqslant \sum_{x-y<t\leq x} \tau_{k+1}^2(t) \ll y\mathscr{L}^{k(k+2)},$$

а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $n_1 < n_2$ и $n_1 > n_2$ равны, получим

$$|J_3|^2 \ll M\mathscr{L}^{(5-k)^2-1} \sum_{N<n_1\leq 2N} \tau_k(n_1) \sum_{0<n_2-n_1\leq 2N-n_1} \tau_k(n_2) \left| \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ x-y<mn_1,mn_2\leqslant x}} e(\alpha m^3(n_2^3 - n_1^3)) \right| + yM\mathscr{L}^{2k^2-8k+24}.$$

Положим $r = n_2 - n_1$ и $n_1 = n$, тогда правая ча сть последнего неравенства принимает вид

$$|J_3|^2 \ll M(\mathscr{L}^{(5-k)^2-1}J_{31} + y\mathscr{L}^{2k^2-8k+24}) \ll \frac{x}{N}\left(\mathscr{L}^{(5-k)^2-1}J_{31} + y\mathscr{L}^{2k^2-8k+24}\right), \tag{18}$$

$$J_{31} = \sum_{N<n\leq 2N} \tau_k(n) \sum_{0<r\leq 2N-n} \tau_k(n+r) \left| \sum_{\substack{M<m\leq 2M\\ \frac{x-y}{n}<m\leq \frac{x}{n+r}}} e(\alpha r m^3(3nr + 3n^2 + r^2) \right|.$$

Из условия $\frac{x-y}{n} < m \le \frac{x}{n+r}$ находим

$$r \le \frac{x}{m} - n < \frac{x}{m} - \frac{x-y}{m} = \frac{y}{m} < \frac{y}{M}.$$

Возводя J_{31} в квадрат, дважды применяя неравенство Коши и воспользовавшись леммой 3, имеем

$$|J_{31}|^2 \ll \frac{yN\mathscr{L}^{2k^2-2}}{M} \sum_{N<n\le 2N} \sum_{\substack{0<r\le 2N-n \\ r<\frac{y}{M}}} \left| \sum_{\substack{M<m\le 2M \\ \frac{x-y}{n}<m\le \frac{x}{n+r}}} e(\alpha r m^3(3nr+3n^2+r^2)\right|^2 =$$

$$= \frac{yN\mathscr{L}^{2k^2-2}}{M} \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{N<n\le 2N-r} \sum_{\substack{M<m_1,m_2\le 2M \\ \frac{x-y}{n}<m_1,m_2\le \frac{x}{n+r}}} e(\alpha r(m_2^3-m_1^3)(3nr+3n^2+r^2).$$

Разбивая двойную сумму по m_1 и m_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $m_1 < m_2$, $m_1 = m_2$, $m_1 > m_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{N<n\le 2N-r} \sum_{\substack{M<m\le 2M \\ \frac{x-y}{n}<m\le \frac{x}{n+r}}} 1 = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{\substack{M<m\le 2M,\ N<n\le 2N-r \\ x-y<mn\leqslant x-mr}} 1 \leqslant \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{x-y<t\leqslant x} \tau(t) \ll \frac{y^2\mathscr{L}}{M},$$

а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $m_1 < m_2$ и $m_1 > m_2$ равны, получим

$$|J_{31}|^2 \ll \frac{yN}{M}\left(|J_{32}| + \frac{y^2\mathscr{L}}{M}\right)\mathscr{L}^{2k^2-2} \ll \left(\frac{yN^2}{x}|J_{32}| + \frac{y^3N^3\mathscr{L}}{x^2}\right)\mathscr{L}^{2k^2-2}, \tag{19}$$

$$J_{32} = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{N<n\le 2N-r} \sum_{\substack{M<m_1<m_2\le 2M \\ \frac{x-y}{n}<m_1<m_2\le \frac{x}{n+r}}} e(\alpha r(m_2^3-m_1^3)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Положим $k = m_2 - m_1$ и $m_1 = m$, тогда J_{32} принимает вид

$$J_{32} = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{N<n\le 2N-r} \sum_{\substack{M<m<m+k\leqslant 2M \\ \frac{x-y}{n}<m<m+k\le \frac{x}{n+r}}} e(\alpha kr(3mk+3m^2+k^2)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Из условия $\frac{x-y}{n} < m < m+k \le \frac{x}{n+r}$ находим

$$k \leqslant \frac{x}{n+r} - m < \frac{x}{n+r} - \frac{x-y}{n} < \frac{x}{n} - \frac{x-y}{n} = \frac{y}{n} < \frac{y}{N}.$$

Поэтому

$$J_{32} = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{N<n\le 2N-r} \sum_{\substack{M<m\le 2M-k \\ \frac{x-y}{n}<m\le \frac{x}{n+r}-k}} e(\alpha kr(3mk+3m^2+k^2)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Возводя J_{32} в квадрат, трижды применяя неравенство Коши, имеем

$$|J_{32}|^2 \leqslant \frac{y^2}{M} \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{N<n\le 2N-r} \sum_{\substack{M<m_1,m_2\le 2M-k \\ \frac{x-y}{n}<m_1,m_2\le \frac{x}{n+r}-k}} e(3\alpha kr(m_2-m_1)(k+m_2+m_1)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Разбивая двойную сумму по m_1 и m_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $m_1 < m_2$, $m_1 = m_2$, $m_1 > m_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{N<n\le 2N-r}\sum_{\substack{M<m\le 2M-k\\ \frac{x-y}{n}<m\le\frac{x}{n+r}-k}}1\leqslant\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{x-y<t\leqslant x}\tau(t)\ll\frac{y^3\mathscr{L}}{MN}\ll\frac{y^3\mathscr{L}}{x},$$

а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $m_1 < m_2$ и $m_1 > m_2$ равны, получим

$$|J_{32}|^2\ll\frac{y^2}{M}\left(|J_{33}|+\frac{y^3\mathscr{L}}{x}\right)\ll\left(\frac{y^2N}{x}|J_{33}|+\frac{y^5N\mathscr{L}}{x^2}\right), \tag{20}$$

$$J_{33}=\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{N<n\le 2N-r}\sum_{\substack{M<m_1<m_2\le 2M-k\\ \frac{x-y}{n}<m_1<m_2\leqslant\frac{x}{n+r}-k}}e(3\alpha kr(m_2-m_1)(k+m_2+m_1)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Положим $h = m_2 - m_1$ и $m_1 = m$, тогда J_{33} принимает вид

$$J_{33}=\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{N<n\le 2N-r}\sum_{\substack{M<m<m+h\le 2M-k\\ \frac{x-y}{n}<m<m+h\le\frac{x}{n+r}-k}}e(3\alpha khr(2m+k+h)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Из условия $\frac{x-y}{n} < m < m+h \le \frac{x}{n+r} - k$ находим

$$h\leqslant\frac{x}{n+r}-m-k<\frac{x}{n+r}-\frac{x-y}{n}-k<\frac{x}{n}-\frac{x-y}{n}-1=\frac{y}{n}-1<\frac{y}{N}.$$

Поэтому

$$J_{33}=\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{h<\frac{y}{N}}\sum_{M<m\leqslant 2M-k-h}\sum_{\substack{N<n\leqslant 2N-r\\ \frac{x-y}{m}<n\le\frac{x}{m+k+h}-r}}e(3\alpha khr(2m+k+h)(3nr+3n^2+r^2)).$$

Возводя $|J_{33}|$ в квадрат, четырежды применяя неравенство Коши, имеем

$$|J_{33}|^2\leqslant\frac{y^3}{N^2}\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{h<\frac{y}{N}}\sum_{M<m\leqslant 2M-k-h}\sum_{\substack{N<n_1,n_2\leqslant 2N-r\\ \frac{x-y}{m}<n_1,n_2\le\frac{x}{m+k+h}-r}}e(9\alpha khr(n_2-n_1)(2m+k+h)(r+n_2+n_1)).$$

Разбивая двойную сумму по n_1 и n_2 на три части, для которых соответственно выполняются условия $n_1 < n_2$, $n_1 = n_2$, $n_1 > n_2$, и воспользовавшись соотношением

$$\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{h<\frac{y}{N}}\sum_{M<m\leqslant 2M-k-h}\sum_{\substack{N<n\leqslant 2N-r\\ \frac{x-y}{m}<n\le\frac{x}{m+k+h}-r}}1\leqslant\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{h<\frac{y}{N}}\sum_{x-y<t\leqslant x}\tau(t)\ll\frac{y^4\mathscr{L}}{MN^2}\ll\frac{y^4\mathscr{L}}{xN}.$$

а также имея в виду, что модули сумм соответственно с условиями $n_1 < n_2$ и $n_1 > n_2$ равны, получим

$$|J_{33}|^2\ll\frac{y^3}{N^2}\left(|J_{34}|+\frac{y^4\mathscr{L}}{xN}\right)\ll\left(\frac{y^3}{N^2}|J_{34}|+\frac{y^7\mathscr{L}}{xN^3}\right), \tag{21}$$

$$J_{34}=\sum_{r<\frac{y}{M}}\sum_{k<\frac{y}{N}}\sum_{h<\frac{y}{N}}\sum_{M<m\leqslant 2M-k-h}\sum_{\substack{N<n_1<n_2\leqslant 2N-r\\ \frac{x-y}{m}<n_1<n_2\le\frac{x}{m+k+h}-r}}e(9\alpha khr(n_2-n_1)(2m+k+h)(r+n_2+n_1)).$$

Положим $l = n_2 - n_1$ и $n_1 = n$, тогда J_{34} принимает вид

$$J_{34} = \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\leqslant 2M-k-h} \sum_{\substack{N<n<n+l\leqslant 2N-r \\ \frac{x-y}{m}<n<n+l\leq \frac{x}{m+k+h}-r}} e(9\alpha klhr(2m+k+h)(2n+r+l)).$$

Из условия $\frac{x-y}{m} < n < n+l \leq \frac{x}{m+k+h} - r$ находим

$$l \leqslant \frac{x}{m+k+h} - n - r < \frac{x}{m+k+h} - \frac{x-y}{m} - r < \frac{x}{m} - \frac{x-y}{m} - 1 = \frac{y}{m} - 1 < \frac{y}{M}.$$

Следовательно,

$$J_{34} = \sum_{l<\frac{y}{M}} \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\leqslant 2M-k-h} \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N-r-l \\ \frac{x-y}{m}<n\leqslant \frac{x}{m+k+h}-r-l}} e(9\alpha klhr(2m+k+h)(2n+r+l)).$$

Переходя к оценкам, найдём

$$|J_{34}| \leqslant \sum_{l<\frac{y}{M}} \sum_{r<\frac{y}{M}} \sum_{k<\frac{y}{N}} \sum_{h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\leqslant 2M} \left| \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N-r-l \\ \frac{x-y}{m}<n\leqslant \frac{x}{m+k+h}-r-l}} e(18\alpha klhr(2m+k+h)n) \right|.$$

Оценим сверху длину интервала суммирования по n. Имеем

$$\frac{x}{m+k+h} - r - l - \frac{x-y}{m} \leqslant \frac{y}{M}.$$

С учётом последнего неравенства, суммируя по n, найдём

$$|J_{34}| \leqslant \sum_{l,r<\frac{y}{M}} \sum_{k,h<\frac{y}{N}} \sum_{M<m\leqslant 2M} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|18\alpha klhr(2m+k+h)\|}\right) \ll \sum_{t\leqslant \frac{y^4}{MN^2}} \tau_5(t) \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha t\|}\right).$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 3 и соотношения $MN \asymp x$, получим

$$|J_{34}|^2 \ll \sum_{t\leqslant \frac{y^4}{xN}} \tau_5^2(t) \sum_{t\leqslant \frac{y^4}{xN}} \min\left(\frac{yN}{x}, \frac{1}{\|\alpha t\|}\right)^2 \ll \frac{y^5 \mathscr{L}^{24}}{x^2} \sum_{t\ll \frac{y^4}{xN}} \min\left(\frac{yN}{x}, \frac{1}{\|\alpha t\|}\right). \tag{22}$$

Теперь, представляя соотношения (18), (19), (20) и (21) в виде

$$|J_3|^{32} \ll \left(\frac{x^{16}\mathscr{L}^{16(5-k)^2-16}}{N^{16}}|J_{31}|^{16} + \frac{x^{16}y^{16}\mathscr{L}^{32(k^2-4k+12)}}{N^{16}}\right),$$

$$|J_{31}|^{16} \ll \left(\frac{y^8N^{16}}{x^8}|J_{32}|^8 + \frac{y^{24}N^{24}\mathscr{L}^8}{x^{16}}\right)\mathscr{L}^{16k^2-16},$$

$$|J_{32}|^8 \ll \left(\frac{y^8N^4}{x^4}|J_{33}|^4 + \frac{y^{20}N^4\mathscr{L}^4}{x^8}\right),$$

$$|J_{33}|^4 \ll \left(\frac{y^6}{N^4}|J_{34}|^2 + \frac{y^{14}\mathscr{L}^2}{x^2N^6}\right),$$

и последовательно воспользовавшись ими, представим $|J_3|^{32}$ через $|J_{34}|^2$. Имеем

$$|J_3|^{32} \ll \left(\left(y^8x^8|J_{32}|^8 + y^{24}N^8\mathscr{L}^8\right)\mathscr{L}^{16(2k^2-10k+23)} + \frac{x^{16}y^{16}\mathscr{L}^{32(k^2-4k+12)}}{N^{16}} \right) \ll$$
$$\ll y^{16}\left(\left(x^4N^4|J_{33}|^4 + y^{12}N^4\mathscr{L}^4 + y^8N^8\mathscr{L}^8\right) + \frac{x^{16}}{N^{16}} \right)\mathscr{L}^{32(k^2-4k+12)} \ll$$
$$\ll y^{32}\left(\left(\frac{x^4}{y^{10}}|J_{34}|^2 + \frac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2} + \frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4} + \frac{N^8\mathscr{L}^8}{y^8} \right) + \frac{x^{16}}{y^{16}N^{16}} \right)\mathscr{L}^{32(k^2-4k+12)}.$$

Из условия $xy^{-1} \leqslant N \leqslant y$ следует, что

$$|J_3|^{32} \ll y^{32}\left(\frac{x^4}{y^{10}}|J_{34}|^2 + \frac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2} + \frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4} \right)\mathscr{L}^{32(k^2-4k+12)}. \qquad (23)$$

Для оценки суммы $|J_{34}|^2$ в этом неравенстве воспользуемся формулой (22) и рассмотрим случаи $y^4/(xN) > 0,5q$ и $y^4/(xN) \leqslant 0,5q$.

Для оценки суммы $|J_{34}|^2$, которую мы представили в виде (22), рассмотрим случаи $y^4/(xN) > q/2$ и $y^4/(xN) \leqslant q/2$.

Оценка $|J_{34}|$ ***при*** $y^4/(xN) > 0,5q$. Разбивая интервал изменения t на $\ll y^4/(qxN)$ интервалов вида $g \leqslant h \leqslant g + q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 2, найдем

$$|J_{34}|^2 \ll \frac{y^5\mathscr{L}^{24}}{x^2}\cdot\frac{y^4}{qxN}\sum_{t=g}^{g+q'}\min\left(\frac{yN}{x}, \frac{1}{\|\alpha t\|}\right) \ll \frac{y^9\mathscr{L}^{24}}{qx^3N}\left(\frac{yN}{x} + q\ln q\right) \ll \left(\frac{y^{10}}{qx^4} + \frac{y^9\mathscr{L}}{x^3N}\right)\mathscr{L}^{24}.$$

Подставляя эту оценку в (23), затем воспользовавшись условиями (17), получим

$$|J_3|^{32} \ll y^{32}\left(\frac{x^4}{y^{10}}\left(\frac{y^{10}}{qx^4} + \frac{y^9\mathscr{L}}{x^3N}\right)\mathscr{L}^{24} + \frac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2} + \frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4} \right)\mathscr{L}^{32(k^2-4k+12)} \ll$$
$$\ll y^{32}\left(\frac{1}{q} + \frac{x}{yN} + \frac{N^4}{y^4}\right)\mathscr{L}^{32(k^2-4k+13)} \ll \frac{y^{32}}{\mathscr{L}^{32A}}\mathscr{L}^{32k(k-4)} \ll \frac{y^{32}}{\mathscr{L}^{32A}}. \qquad (24)$$

Оценка $|J_{34}|$ ***при*** $y^4/(xN) \leqslant 0,5q$. Применяя утверждение б) леммы 2, имеем

$$|J_{34}|^2 \ll \frac{y^5\mathscr{L}^{24}}{x^2}\sum_{t\leqslant 0,5q}\frac{1}{\|\alpha t\|} \ll \frac{y^5\mathscr{L}^{24}}{x^2}q\ln q \ll \frac{y^5q\mathscr{L}^{25}}{x^2}.$$

Подставляя найденную оценку в (23), затем воспользовавшись условиями (17), получим

$$|J_3|^{32} \ll y^{32}\left(\frac{x^4}{y^{10}}\cdot\frac{y^5q\mathscr{L}^{25}}{x^2} + \frac{x^2\mathscr{L}^2}{y^2N^2} + \frac{N^4\mathscr{L}^4}{y^4} \right)\mathscr{L}^{32(k^2-4k+12)} \ll$$
$$\ll y^{32}\left(\frac{x^2q}{y^5} + \frac{x}{yN} + \frac{N^4}{y^4}\right)\mathscr{L}^{32(k^2-4k+13)} \ll \frac{y^{32}}{\mathscr{L}^{32A}}\mathscr{L}^{32k(k-4)} \ll \frac{y^{32}}{\mathscr{L}^{32A}}.$$

Из этой оценки и из (24) следует утверждение леммы.

5. Короткая кубическая тригонометрическая сумма с функцией Мёбиуса

Теорема 1. *Пусть $B \geqslant 11$ — абсолютная постоянная $x > x_0 > 0$ и*

$$S_3(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<n\leqslant x}\mu(n)e(\alpha n^3), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1.$$

Тогда при $y \geqslant x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+944}$ *и* $\mathscr{L}^{32(B+18)} \leqslant q \leqslant y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$ *справедлива оценка*

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^B}.$$

Доказательство теоремы. Для простоты сумму $S_3(\alpha; x, y)$ обозначим через $\S$. Имеем

$$\S = \sum_{x-y<n\leqslant x} \mu(n)e(\alpha n^3), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

В лемме 4 возьмём $r = 3$, $u_1 = x^{\frac{1}{3}}$ и $f(n) = e(\alpha n^3)$. Имеем

$$\S = 3\S_1 - 3\S_2 + \S_3, \qquad \S_1 = \sum_{\substack{m_1\leqslant u_1\\ x-y<m_1\leqslant x}} \mu(m_1)e(\alpha m_1^3) = 0,$$

$$\S_2 = \sum_{m_1\leqslant u} \mu(m_1) \sum_{m_2\leqslant u} \mu(m_2) \sum_{x-y<m_1m_2n_1\leqslant x} e(\alpha(m_1m_2n_1)^3),$$

$$\S_3 = \sum_{m_1\leqslant u} \mu(m_1) \sum_{m_2\leqslant u} \mu(m_2) \sum_{m_3\leqslant u} \mu(m_3) \sum_{n_1} \sum_{x-y<m_1m_2m_3n_1n_2\leqslant x} e(\alpha(m_1m_2m_3n_1n_2)^3).$$

Разобьём в $\S_k$, $k = 2, 3$ области изменения каждого $m_1, \cdots, m_k, n_1, \cdots, n_{k-1}$ на не более $\mathscr{L}$ интервалов вида $M_j < m_j \leqslant 2M_j$, $N_j < n_j \leqslant 2N_j$. Получим не более $\ll \mathscr{L}^{2k-1}$ сумм вида

$$\mathcal{S}_k(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1} \mu(m_1) \ldots \sum_{M_k<m_k\leqslant 2M_k} \mu(m_k) \sum_{N_1<n_1\leqslant 2N_1} \ldots \sum_{\substack{N_{k-1}<n_{k-1}\leqslant N_{k-1}\\ x-y<m_1\ldots m_kn_1\ldots n_{k-1}\leqslant x}} e(\alpha(m_1\ldots m_kn_1\ldots n_{k-1})^3).$$

Переходя к оценкам, имеем

$$\mathcal{S} \ll \mathscr{L}^3 \max|\mathcal{S}_2(\mathcal{M}, \mathcal{N})| + \mathscr{L}^5 \max|\mathcal{S}_3(\mathcal{M}, \mathcal{N})|, \tag{25}$$

Суммы $\mathcal{S}_k(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, $k = 2, 3$ оцениваются почти одинаково. Остановимся на оценке суммы $\mathcal{S}_3(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ и, не ограничивая общности, будем считать, что выполняются условия

$$y = x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}^{8B+944}, \quad x^{\frac{1}{3}} > M_1 \geqslant M_2 \geqslant M_3, \quad N_1 \geqslant N_2, \quad 2^{-5}x \leqslant M_1M_2M_3N_1N_2 < x. \tag{26}$$

Рассмотрим следующие возможные случаи значений параметра N_1:

1. $N_1 > x\mathscr{L}^{-2B-18}$;
2. $xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2B+1036} < N_1 \leqslant x\mathscr{L}^{-2B-18}$;
3. $xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)} < N_1 \leqslant xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2B+1036}$;
4. $N_1 \leqslant xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$, $N_1N_2 > xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$;
5. $N_1N_2 \leqslant xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$.

Для рассмотрения случаев 1, 2 и 3 сумму $\mathcal{S}_3(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ несколько преобразуем. Для этого, вводя обозначение

$$a_m = \sum_{M_1<m_1\leqslant 2M_1} \mu(m_1) \sum_{M_2<m_2\leqslant 2M_2} \mu(m_2) \sum_{M_3<m_3\leqslant 2M_3} \mu(m_3) \sum_{\substack{N_2<n_2\leqslant 2N_2\\ m_1m_2m_3n_2=m}} 1, \qquad |a_m| \leqslant \tau_4(m),$$

разбивая интервал суммирования $M_1M_2M_3N_2 < m \leqslant 2^4M_1M_2M_3N_2$ на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$, получим не более четырёх сумм вида

$$J_3(\alpha; x, y, M, N_1) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a_m \sum_{\substack{N_1<n\leqslant 2N_1\\ x-y<mn\leqslant x}} e(\alpha(mn)^3).$$

Случай 1. $N_1 > x\mathscr{L}^{-2B-18}$**.** В этом случае сумма по n_1 очень длинная, и мы её оценим как короткую кубическую сумму Г. Вейля, представляя в виде

$$\begin{aligned} &J_3(\alpha; x, y, M, N_1) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a_m \sum_{x_1-y_1<n\leqslant x_1} e(\alpha(mn)^3),\\ &x_1 = \min\left(\frac{x}{m}, 2N_1\right), \quad y_1 = \min\left(\frac{x}{m}, 2N_1\right) - \max\left(\frac{x}{m} - \frac{y}{m}, N_1\right) \leqslant \frac{y}{m},\\ &M < m \leqslant \min\left(2M, \frac{x}{n}\right) \leqslant \frac{x}{N_1} \leqslant \mathscr{L}^{2B+18}. \end{aligned} \tag{27}$$

Дважды применяя неравенство Коши и лемму 3, воспользовавшись методом Г. Вейля, затем суммируя по h, последовательно получим

$$\begin{aligned} |J_3(\alpha; x,y, M, N_1)|^4 &\ll M^3(\ln M)^{30} \sum_{M<m\leqslant 2M} \left| \sum_{x_1-y_1<n\leqslant x_1} e(\alpha(mn)^3)\right|^4 \leqslant \\ .\leqslant M^3(\ln M)^{30} &\sum_{M<m\leqslant 2M}\left(16y_1 \sum_{0<k\leqslant y_1}\sum_{0<l\leq y_1-k}\left|\sum_{0<h\leqslant y_1-k-l} e(6\alpha mklh)\right| + 24y_1^3 + 2(y_1+1)^2\right) \ll \\ \leqslant M^3(\ln M)^{30} &\sum_{M<m\leqslant 2M}\left(\frac{y}{M}\sum_{0<k\leqslant \frac{y}{M}}\sum_{0<l\leq \frac{y}{M}} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|6\alpha mkl\|}\right) + \frac{y^3}{M^3}\right) \leqslant \\ \leqslant &\left(yM^2 \sum_{M<n\leqslant 12y^2M^{-1}} \tau_3(n)\min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + y^3M\right)(\ln M)^{30}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 3 и имея в виду, что $(\ln M)^{60} \ll \mathscr{L}$, найдём

$$\begin{aligned} |J_3(\alpha; x, y, M, N)|^8 &\ll \left(y^2M^4 \sum_{n\leqslant y^2M^{-1}} \tau_3^2(n) \sum_{n\leqslant y^2M^{-1}} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right)^2 + y^6M^2\right)(\ln M)^{60} \ll \\ &\ll y^5M^2\mathscr{L}^9 \sum_{n\leqslant y^2M^{-1}} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + y^6M^2\mathscr{L}. \end{aligned}$$

Для оценки последней суммы по n, рассмотрим отдельно случаи:

i. $\mathscr{L}^{32(B+18)} < 0.5q \leqslant y^2M^{-1}$;

ii. $y^2M^{-1} < 0.5q \leqslant y^5x^{-2}\mathscr{L}^{-32(B+18)}$.

i. Разбивая интервал изменения n на $\ll y^2(Mq)^{-1}$ интервалов вида $g \leqslant h \leqslant g + q'$, $q' < q$, применяя утверждение а) леммы 2, затем воспользовавшись условием $M \leqslant \mathscr{L}^{2B+18}$, найдём

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N_1)|^8 \ll y^5 M^2 \mathscr{L}^9 \cdot \frac{y^2}{qM} \sum_{t=g}^{g+q'} \min\left(\frac{y}{M}, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + y^6 M^2 \mathscr{L} \ll$$
$$\ll \frac{y^7 M \mathscr{L}^9}{q}\left(\frac{y}{M} + q\ln q\right) + y^6 M^2 \mathscr{L} \ll \frac{y^8 \mathscr{L}^9}{q} + y^7 \mathscr{L}^{2B+28} + y^6 \mathscr{L}^{4B+37} =$$
$$= \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8B+41}}\left(\frac{\mathscr{L}^{8B+50}}{q} + \frac{\mathscr{L}^{10B+69}}{y} + \frac{\mathscr{L}^{12B+78}}{y^2}\right) \ll \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8B+41}}.$$

ii. Применяя утверждение б) леммы 2, затем воспользовавшись условием $M \leqslant \mathscr{L}^{2B+18}$, найдём

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N_1)|^8 \ll y^5 M^2 \mathscr{L}^9 \sum_{n \leqslant 0,5q} \frac{1}{\|\alpha n\|} + y^6 M^2 \mathscr{L} \ll y^5 q M^2 \mathscr{L}^{10} + y^6 M^2 \mathscr{L} \ll$$
$$\ll \frac{y^{10}}{x^2 \mathscr{L}^{20B+530}} + y^6 \mathscr{L}^{4B+37} = \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8B+41}}\left(\frac{y^2}{x^2 \mathscr{L}^{12B+489}} + \frac{\mathscr{L}^{12B+78}}{y^2}\right) \ll \frac{y^8}{\mathscr{L}^{8B+41}}.$$

Случай 2. $xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2B+1036} < N_1 \leqslant x\mathscr{L}^{-2B-18}$**.** В этом случае $J_3(\alpha; x, y, M, N)$ является короткой двойной кубической тригонометрической суммой с "длинной" сплошной суммой. Поэтому применяем лемму 5 для оценки $J_3(\alpha; x, y, M, N)$, полагая $A = B + 5$, и при $B \geqslant 149$ из выполнения условия этой леммы

$$\mathscr{L}^{8B+4142} < q < y^3 \mathscr{L}^{-8B-4144}$$

следует условия доказываемой теоремы, то есть неравенство

$$\mathscr{L}^{32(B+18)} \leqslant q \leqslant y^5 x^{-2} \mathscr{L}^{-32(B+18)}.$$

Таким образом, все условия леммы 5 выполняются, поэтому

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N_1)| \ll \frac{y}{\mathscr{L}^{B+5}}.$$

Случай 3. $xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)} < N_1 \leqslant xy^{-\frac{1}{4}}\mathscr{L}^{2B+1036}$**.** Применяя для оценки суммы $|J_3(\alpha; x, y, M, N_1)$ лемму 6, полагая $A = B + 5$, также воспользовавшись эквивалентностью следующих двух неравенств

$$y \geqslant x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{8B+944}, \qquad xy^{-\frac{1}{4}} \mathscr{L}^{2B+1036} \leqslant y \mathscr{L}^{-8(B+18)},$$

имеем

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N_1)| \ll \frac{y}{\mathscr{L}^{B+5}}.$$

Случай 4. $N_1 \leqslant xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$, $N_1 N_2 > xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$**.** Сумму $\mathcal{S}_3(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ преобразуем, вводя обозначения

$$a_m = \sum_{M_1 < m_1 \leqslant 2M_1} \mu(m_1) \sum_{M_2 < m_2 \leqslant 2M_2} \mu(m_2) \sum_{\substack{M_3 < m_3 \leqslant 2M_3 \\ m_1 m_2 m_3 = m}} \mu(m_3), \quad |a_m| \leqslant \tau_3(h),$$
$$b_n = \sum_{N_1 < n_1 \leqslant 2N_1} \sum_{\substack{N_2 < n_2 \leqslant 2N_2 \\ n_1 n_2 = n}} 1, \quad |b_n| \leqslant \tau(n);$$

разбивая интервалы суммирования $M_1M_2M_3 < m \leqslant 8M_1M_2M_3$ и $N_1N_2 < n \leqslant 4N_1N_2$ соответственно на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$ и $N < n \leqslant 2N$, получим не более шести сумм вида

$$J_3(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}} b_n e(\alpha(mn)^3).$$

Из соотношения (26) и условия рассматриваемого случая найдём

$$xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)} < N_1N_2 \leqslant N,$$

$$N \leqslant 4N_1N_2 \leqslant 4N_1^2 \leqslant 4\left(xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}\right)^2 = y\mathscr{L}^{-8(B+18)} \cdot \frac{4x^2}{y^3}\mathscr{L}^{72(B+18)} \leqslant y\mathscr{L}^{-8(B+18)}.$$

Отсюда и из условия рассматриваемого случая следует, что при $A = B+5$ все условия леммы 6 выполняются. Поэтому, согласно утверждению этой леммы, имеем

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll y\mathscr{L}^{-B-5}.$$

Случай 5. $N_1N_2 \leqslant xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}$**.** В сумме $\mathcal{S}_3(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, вводя обозначение

$$a_m = \sum_{M_2<m_2\leqslant 2M_2} \mu(m_2) \sum_{M_3<m_3\leqslant 2M_3} \mu(m_3) \sum_{N_1<n_1\leqslant 2N_1} \sum_{\substack{N_2<n_2\leqslant 2N_2\\ m_2m_3n_1n_2=m}} 1, \qquad |a_m| \leqslant \tau_4(m),$$

разбивая интервал суммирования $M_2M_3N_1N_2 < m \leqslant 16M_2M_3N_1N_2$ на интервалы вида $M < m \leqslant 2M$, а также обозначая M_1 через N, получим на не более четырёх сумм вида

$$J_3(\alpha; x, y, M, N) = \sum_{M<m\leqslant 2M} a_m \sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}} \mu(n) e(\alpha(mn)^3).$$

Из соотношения (26) и условия рассматриваемого случая найдём

$$N = M_1 \geqslant (M_1M_2M_3)^{\frac13} = \left(\frac{M_1M_2M_3N_1N_2}{N_1N_2}\right)^{\frac13} \geqslant \left(\frac{2^{-5}x}{xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}}\right)^{\frac13} =$$
$$= xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}\left(\frac{2^{-\frac54}y}{x^{\frac34}\mathscr{L}^{32(B+18)}}\right)^{\frac43} \geqslant xy^{-1}\mathscr{L}^{32(B+18)}.$$

Отсюда с учётом соотношения $N = M_1 < x^{\frac13} \leqslant y\mathscr{L}^{-8(B+18)}$ и из условия рассматриваемого случая следует, что при $A = B+5$ все условия леммы 6 выполняются, поэтому согласно утверждению этой леммы, имеем

$$|J_3(\alpha; x, y, M, N)| \ll y\mathscr{L}^{-B-5}.$$

Тогда из всех оценок, полученных в предыдущих случаях, и неравенства (25) найдём

$$|\mathcal{S}_3(\mathcal{M}, \mathcal{N})| \ll y\mathscr{L}^{-B-5}, \qquad |\S| = |S_3(\alpha; x, y)| \ll y\mathscr{L}^{-B}.$$

6. Заключение

Работа посвящена оценке коротких кубических двойных тригонометрических сумм и их приложению к нахождению нетривиальной оценки коротких кубических тригонометрических сумм с функцией Мёбиуса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davenport H. On some infinite series involving arithmetical functions (II) // The Quarterly Journal of Mathematics. 1937. Vol. 8, № 1. P. 313 – 320.

2. Hua L. K. Additive theory of prime numbers — American Mathematical Soc. 1965. 190 pp.

3. Baker R. C., Harman G. Exponential sums formed with the Mobius function // J. London Math. Soc. 1991. Vol. s2-43, Is. 2. P. 193 – 198.

4. Liu J. Y., Zhan T. Exponential sums involving the Mobius function // Indag. Math. (N.S.). 1996. Vol. 7, Is. 2, P. 271–278.

5. Zhan T. Davenport's theorem in short intervals // Chin. Ann. of Math. 1991. Vol. 12B, Is. 4. P. 421–431.

6. Zhan T. On the representation of large odd integer as a sum of three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. Vol. 7, Is. 3. P. 135 – 170..

7. Liu J. Y., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I // Monatshefte für Mathematik. 1999. Vol. 127, Is. 1. P. 27-41, doi.org/10.1007/s006050050.

8. Lu G. S., Lao H. X. On exponential sums over primes in short intervals // Monatshefte fur Mathematik. 2007. Vol. 151, Is, 2. P. 153-164. doi.org/10.1007/s00605-007-0449-5.

9. Kumchev A V. On Weyl sums over primes in short intervals // "Arithmetic in Shangrila" — Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. 2012. Vol. 9. Singapore: World Scientific. P. 116–131.

10. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Короткие кубические суммы простыми числами // Труды Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук. 2016. Т. 296. С. 220 – 242. DOI: 10.1134/S0371968517010174.

11. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З, Замонов Б. М. Оценка коротких кубических двойных тригонометрических сумм с «длинным» сплошным суммированием // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, вып. 1. С. 217 – 231.

12. Рахмонов З. Х., Замонов Б. М. Короткие кубические двойные тригонометрические суммы, с «длинным» сплошным суммированием // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. № 4(157). С. 7 – 23.

13. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Российской Академии наук. 2014. Т. 459, № 2. С. 156 – 157.

14. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Сумма коротких двойных тригонометрических сумм // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56, № 11. С. 853 – 860.

15. Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2011. № 3. С. 56 – 60.

16. Рахмонов З. Х. Теорема о среднем значении $\psi(x, \chi)$ и её приложения // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 57, № 4. С. 55 – 71.

17. Виноградов И.М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. М.: Наука. 1976. 120 с.

18. Марджанишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы // ДАН СССР. 1939. Т. 22. № 7. С. 391 – 393.

REFERENCES

1. Davenport, H., 1937, "On some infinite series involving arithmetical functions (II)", *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1937, vol. 8, Is. 1, pp. 313-320.

2. Hua, L. K., 1965, *Additive theory of prime numbers*, American Mathematical Soc., 5. 190 pp.

3. Baker, R. C., & Harman, G., 1991, "Exponential sums formed with the Mobius function", *J. London Math. Soc.*, vol. s2-43, Is. 2, pp. 193-198.

4. Liu, J. Y., & Zhan, T., 1996, "Exponential sums involving the Mobius function", *Indag. Math. (N.S.)*, vol. 7, Is. 2, pp. 271–278.

5. Zhan, T., 1991, "Davenport's theorem in short intervals", *Chin. Ann. of Math.*, vol. 12B, Is. 4, pp. 421–431.

6. Zhan, T., 1991, "On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes", *Acta Math Sinica. New ser.*, vol. 7, Is. 3. pp. 135 – 170.

7. Liu, J. Y., & Zhan, T., 1999, "Estimation of exponential sums over primes in short intervals I", *Monatshefte für Mathematik*, vol. 127, Is. 1,pp. 27-41, doi.org/10.1007/s006050050.

8. Lu, G. S., & Lao, H. X., 2007,"On exponential sums over primes in short intervals", *Monatshefte fur Mathematik*, vol. 151, Is, 2, pp. 153-164. doi.org/10.1007/s00605-007-0449-5.

9. Kumchev, A. V., 2012, "On Weyl sums over primes in short intervals", *"Arithmetic in Shangrila"—Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications*, vol. 9, Singapore: World Scientific, pp. 116–131.

10. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., 2017, "Short Cubic Exponential Sums over Primes", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, pp. 211-233. doi:10.1134/s0081543817010175

11. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., Zamonov, B.M., 2016, "Estimates of short cubic double exponential sums with a long continuous summation", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, Is. 1, pp. 217–231.

12. Rakhmonov, Z. Kh., & Zamonov, B. M., 2014, "Short cubic double exponential sums, with a long continuous summation", *Izvestiya Akademii nauk Respubliki Tajikistan. Otdeleniye fiziko-matematicheskikh, khimicheskikh, geologicheskikh i tekhnicheskikh nauk*, № 4(157), pp. 7-23, (in Russian).

13. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2014, "Sum of short exponential sums over prime numbers", *Doklady Mathematics*, vol. 90, No 3, pp. 699–700. doi.org/10.1134/S1064562414070138.

14. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2013, "The sum of short double trigonometric sums", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, no 11, pp. 853-860, (in Russian).

15. Rahmonov, F. Z., 2011, "Estimate of quadratic trigonometric sums with prime numbers", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 3, pp. 56–60.

16. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, “Theorem on the mean value of $\psi(x,\chi)$ and its applications”, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 43, Is. 1, pp. 49–64. doi.org/10.1070/IM1994v043n01ABEH001558.

17. Vinogradov, I. M., 1976, *Osobye varianty metoda trigonometricheskikh summ (Russian) [Special variants of the method of trigonometric sums]*, Izdat. “Nauka”, Moscow, 1976. 119 pp.

18. Mardjhanashvili, K. K., 1939, “An estimate for an arithmetic sum”, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 22, no 7, pp. 391–393.

Получено 15.11.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.