

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.84

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-270-280

О единицах кватернионного порядка неопределённой анизотропной тернарной квадратичной формы

У. М. Пачев, Т. А. Шакова

Пачев Урусби Мухамедович — доктор физико-математических наук, профессор, Кабардино-Балкарский государственный университет (г. Нальчик).

e-mail: urusbi@rambler.ru

Шакова Т. А. — аспирант кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, Кабардино-Балкарский государственный университет (г. Нальчик).

e-mail: ashik.sk.16@gmail.com

Аннотация

В работе рассматриваются вопросы, связанные с группой единиц кватернионного порядка O_f , соответствующего неопределённой анизотропной тернарной квадратичной форме $f = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - bx_2^2 - cx_3^2$, где $b, c > 0$ — целые числа, причем число c не является нормой из квадратичного расширения $\mathbb{Q}(\sqrt{b})$.

Относительно указанной группы единиц нами доказано, что она содержит бесконечную некоммутативную 2-порожденную подгруппу, описываемую с помощью группы единиц Пелля. Первые исследования, относящиеся к группе единиц алгебры с делением были проведены в 1937 г. М. Эйхлером, установившим их конечную порожденность. Определенный интерес в связи с нашей работой представляют результаты, полученные Basilla J. M. и Bada H. в 2005 г. для уравнений вида $x^2 - dy^2 = \pm m$, которые могут быть применены в дальнейшем исследовании группы единиц.

Другой полученный нами результат относится к вопросу о числе попарно неассоциированных обобщенных кватернионов заданной нормы m из O_f . Этот вопрос тесно связан с единицами порядка O_f и с группами единиц Пелля.

Следует отметить, что в алгебрах матриц при изучении их арифметики получены простые точные формулы для числа примитивных неассоциированных справа (слева) целых матриц заданного определителя, которые имеют применения в так называемом дискретном эргодическом методе Ю. В. Линника при решении вопросов представимости целых чисел неопределёнными изотропными тернарными квадратичными формами. Ряд результатов, относящихся к этому вопросу были получены первым из авторов.

Что же касается вопроса о числе неассоциированных обобщенных кватернионов заданной нормы m порядка O_f , то насколько нам известно результатов описанных видов до сих пор не встречалось и видимо это связано с тем, что рассматриваемый нами порядок кватернионов, наверное, имеет довольно сложное строение.

В настоящей работе вместо точных формул удалось получить только верхнюю и нижнюю оценки для числа попарно неассоциированных кватернионов нормы m из порядка O_f .

Ключевые слова: Тернарная квадратичная форма, алгебра обобщенных кватернионов, порядок кватернионов, норма кватерниона, группа кватернионных единиц, уравнение Пелля, бинарная квадратичная форма, ассоциированность кватернионов.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

У. М. Пачев, Т. А. Шакова. О единицах кватернионного порядка неопределённой анизотропной тернарной квадратичной формы // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 270–280.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.84

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-270-280

On units of a quaternion order of an indefinite anisotropic ternary quadratic form

U. M. Pachev, T. A. Shakova

Pachev Urusbi Mukhamedovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of algebra and differential equations, Kabardino-Balkarian State University (Nalchik).

e-mail: urusbi@rambler.ru

Shakova T. A. — postgraduate student of the Department of algebra and differential equations, Kabardino-Balkarian State University (Nalchik).

e-mail: ashik.sk.16@gmail.com

Abstract

The paper considers issues related to the group of units on the quaternion order O_f corresponding to the indefinite anisotropic ternary quadratic form

$$f = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - bx_2^2 - cx_3^2,$$

where $b, c > 0$ are integers, and the number c is not the norm from quadratic field $\mathbb{Q}(\sqrt{b})$.

With respect to the indicated group of units, we have proved that it contains an indefinite noncommutative 2-generated subgroup described by means of the group of Pell units. The first studies relating to the group of units of division algebra were carried out in 1937 M. Eichler, who established their final generation.

Of particular interest in connection with our work are the results obtained by Basilla J. M. and Bada H. in 2005 for equations of the form $x^2 - dy^2 = \pm m$, which can be applied in the further study of the group of units of the quaternion order under consideration.

Another result to the question of the number of pairwise unassociated generalized quaternions of a given norm m from order O_f . This question is closely related to units of order O_f and to groups of Pell units.

It should be noted that, in the study of their arithmetic matrix algebras obtained simple exact formulas for the number of primitive unassociated right (left) whole matrices of a given determinant that have applications in the so-called discrete ergodic method of Yu. V. Linnik for solving the representability of integers by indefinite isotropic ternary quadratic forms. A series of results related to this issue were obtained by the first of the authors.

As for the question of the number of unassociated generalized quaternions of a given norm and order O_f , as far as we know, the results of the presented species have not yet been met, and apparently this is due to the fact that the quaternion order under consideration, probably, it has a rather complicated structure. In the present paper, instead of exact formulas, it was possible to obtain upper and lower bounds for the number of pairwise unassociated quaternions of norm m from order O_f .

Keywords: ternary quadratic forms, algebra of generalized quaternions, quaternion order, quaternion norm, group of quaternion units, Pell equation, binary quadratic form, quaternion association.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

U. M. Pachev, T. A. Shakova, 2019, "On units of a quaternion order of an indefinite anisotropic ternary quadratic form", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 270–280.

Мы будем рассматривать группу единиц кватернионного порядка неопределённой тернарной квадратичной формы

$$f = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - b x_2^2 - c x_3^2 \quad (1)$$

над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, где b, c — целые числа; $b > 0, c > 0$, при этом число c не является нормой из квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{b})$; последнее требование означает, что форма f не представляет нуль нетривиального, т. е. она является анизотропной.

С тернарной квадратичной формой f мы сопоставляем алгебру U_f обобщённых кватернионов с базисной формой f над полем $\mathbb{Q}$, при этом, кватернионные базисные единицы i_1, i_2, i_3 задаются следующей таблицей умножения

$$\begin{aligned} 1) \quad & i_1^2 = -bc, \quad i_2^2 = c, \quad i_3^2 = b; \\ 2) \quad & i_1 i_2 = -c i_3, \quad i_2 i_1 = c i_3; \\ 3) \quad & i_1 i_3 = b i_2, \quad i_3 i_1 = -b i_2; \\ 4) \quad & i_2 i_3 = i_1, \quad i_3 i_2 = -i_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Сразу же может возникнуть вопрос: почему таблица умножения (2) базисных кватернионных единиц i_1, i_2, i_3 задаётся именно в таком виде. Для ответа на такой вопрос мы рассмотрим общее правило составления таблицы умножения базисных кватернионных единиц i_1, i_2, i_3 соответствующее произвольной тернарной квадратичной форме. Эта таблица получена из более общего правила составления таблицы умножения, принадлежащего А. В. Малышеву (см. [2], гл. IV) в случае тернарных квадратичных форм, только мы рассматриваем такую таблицу в случае неопределённой тернарной квадратичной формы

$$f = f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij} x_i x_j. \quad (3)$$

При этом рассматриваем ещё алгебраически взаимную форму $\bar{f}$ для формы f , т. е.

$$\bar{f} = \bar{f}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^3 \bar{\alpha}_{ij} x_i x_j, \quad (4)$$

где $\bar{\alpha}_{ij}$ есть алгебраическое дополнение к элементу α_{ij} .

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1) \quad & i_1^2 = \bar{\alpha}_{11}, \quad i_2^2 = -\bar{\alpha}_{22}, \quad i_3^2 = -\bar{\alpha}_{33}; \\ 2) \quad & i_1 i_2 = -\bar{\alpha}_{12} + \alpha_{31} i_1 + \alpha_{32} i_2 + \alpha_{33} i_3; \\ 3) \quad & i_2 i_3 = -\bar{\alpha}_{23} + \alpha_{11} i_1 + \alpha_{12} i_2 + \alpha_{13} i_3; \\ 4) \quad & i_3 i_1 = -\bar{\alpha}_{31} + \alpha_{21} i_1 + \alpha_{22} i_2 + \alpha_{23} i_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь из (5) получаем соотношения (2).

Элементы алгебры U_f обобщённых кватернионов записываются в виде

$$X = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3,$$

где $x_k \in \mathbb{Q}$.

Кватернион $\bar{X} = x_0 - x_1 i_1 - x_2 i_2 - x_3 i_3$ называется сопряжённым кватерниону X . Элемент $N(X) = X\bar{X} = \bar{X}X = x_0^2 + \bar{f}(x_1, x_2, x_3)$ называется нормой кватерниона $X = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3$, где $\bar{f}$ — форма, взаимная форме f при этом $N(X) \in \mathbb{Q}$.

Скалярной частью $\text{Sc}(X)$ кватерниона $X = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3$ называется число x_0 и значит, $2 \text{Sc}(X) = X + \bar{X}$, при этом кватернион $\text{Ve}(X) = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3$ называется векторной частью кватерниона X .

В связи с приложениями кватернионной алгебры U_f к вопросам представления целых чисел тернарными квадратичными формами используется следующее представление

$$X = \text{Sc}(X) + \text{Ve}(X).$$

Норма кватерниона обладает свойством мультипликативности $N(XY) = N(X) \cdot N(Y)$ для любых $X, Y \in U_f$.

Из определения нормы следует, что если $X = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3$, то

$$N(X) = x_0^2 + b c x_1^2 - c x_2^2 - b x_3^2$$

в алгебре U_f для $f = x_1^2 - b x_2^2 - c x_3^2$.

Здесь мы ограничимся только необходимыми понятиями из алгебры обобщённых кватернионов (более полные сведения можно найти в [2, 3, 4]).

В алгебре неопределённых анизотропных кватернионов U_f выделяем множество O_f элементов, называемых целыми кватернионами, а именно

$$O_f = \{x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}.$$

Ясно, что множество O_f обладает свойствами:

- 1) O_f является кольцом (некоммутативным);
- 2) $1, i_1, i_2, i_3 \in O_f$;
- 3) любой кватернион $X \in O_f$ удовлетворяет уравнению $X^2 - (2 \text{Sc } X) X + N(X) = 0$ с целыми коэффициентами.

Множество O_f , удовлетворяющее условиям 1)–3) называется порядком целых обобщённых кватернионов. Ненулевой кватернион $\mathcal{E} \in O_f$ называется кватернионной единицей, если $\mathcal{E}^{-1} \in O_f$. Ясно, что базисные единицы $i_1, i_2, i_3 \in O_f$ не являются единицами порядка O_f . Кватернион $X \in O_f$ является единицей тогда и только тогда, когда $N(X) = \pm 1$. Группе единиц алгебр с делением впервые были исследованы М. Эйхлером [5], установившим их конечную порождённость. Относительно группы единиц O_f^* порядка O_f нами получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Группа единиц O_f^* кватернионного порядка O_f , соответствующего неопределённой анизотропной тернарной квадратичной форме $f = x^2 - b y^2 - c z^2$ является бесконечной некоммутативной группой, содержащей бесконечную 2-порождённую подгруппу, изоморфную прямому произведению 2^x циклических подгрупп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 \in O_f^*$. Тогда

$$x_0^2 + b c x_1^2 - c x_2^2 - b x_3^2 = 1. \quad (6)$$

Перепишем уравнение (6) в следующем виде

$$x_0^2 - c x_2^2 - b (x_3^2 - c x_1^2) = 1. \quad (7)$$

Если в уравнении (7) положим $x_1 = 0$ и $x_3 = 0$, то получим уравнение Пелля $x_0^2 - c x_2^2 = 1$. Его решения дают бесконечную циклическую подгруппу, изоморфную группе единиц вещественного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{c})$. Полученную подгруппу группы O_f^* обозначим через E_c . Её единицы имеют вид $\mathcal{E} = x_0 + x_2 i_2$ тогда $x_0^2 - c x_2^2 = 1$,

$$E_c = \langle x_0 + x_2 i_2 \mid x_0 + \sqrt{c} x_2 \text{ — основная единица квадратичного поля } \mathbb{Q}(\sqrt{c}) \rangle.$$

Перепишем уравнение (6) ещё в следующем виде

$$x_0^2 - b x_3^2 - c (x_2^2 - b x_1^2) = 1.$$

Положив в этом уравнении $x_2 = 0$ и $x_1 = 0$ опять получим уравнение Пелля $x_0^2 - b x_3^2 = 1$. Его решения тоже образуют бесконечную циклическую подгруппу в группе O_f^* . Обозначим её через E_b , т. е. $E_b = \langle x_0 + x_3 i_3 \mid x_0 + \sqrt{b} x_3 \text{ — основная единица квадратичного поля } \mathbb{Q}(\sqrt{b}) \rangle$.

Если теперь $\mathcal{E}_b \in E_b$ и $\mathcal{E}_c \in E_c$, то $N(\mathcal{E}_b \cdot \mathcal{E}_c) = 1$, т. е. $\mathcal{E}_b \cdot \mathcal{E}_c$ также есть единицы порядка O_f , при этом вообще говоря $\mathcal{E}_b \cdot \mathcal{E}_c \neq \mathcal{E}_c \cdot \mathcal{E}_b$. Поэтому получаем 2-порождённую бесконечную некоммутативную подгруппу в группе единиц O_f^* .

Некоммутативность полученной группы следует из того, что в произведении

$$(x_0 + x_2 i_2)(x_0 + x_3 i_3)$$

имеем, что $i_2 i_3 \neq i_3 i_2$.

Обозначим, полученную 2-порождённую подгруппу через $H_{b,c}$. Тогда

$$H_{b,c} \cong H_b \times H_c; \quad H_{b,c} < O_f^*; \quad H_{b,c} \cong E_b \times E_c \quad \text{и} \quad E_b \cap E_c = \{1\}.$$

□

Перейдём теперь ко второй части нашей работы. С единицами тесно связан вопрос об ассоциированности элементов в кватернионном порядке O_f . Два кватерниона $\alpha, \beta \in O_f$ называются ассоциированными справа, если $\alpha = \beta \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — некоторая единица из O_f^* (аналогично определяется ассоциированность слева).

Обозначим через $\sigma(O_f, m)$ число попарно неассоциированных справа (слева) кватернионов нормы m из порядка O_f .

Ввиду того, что условия анизотропности и неопределённости базисной тернарной квадратичной формы f вносят некоторую сложность, мы можем получить только оценки для $\sigma(O_f, m)$. Доказательство верхней оценки для этой величины в точности проводится как в случае ассоциированности в алгебраических полях (см. [7]). При этом для нижней оценки $\sigma(O_f, m)$ используется понятие главного представления числа m неопределённой бинарной квадратичной формой (см. [8, 9]). В нашем случае это понятие используется по отношению к квадратичной форме $x^2 - d y^2$ при $d > 0$.

Представление (x, y) целого числа m формой $x^2 - d y^2$ называется главным, если оно удовлетворяет двум условиям:

$$1) \quad 1 \leq \frac{x + \sqrt{d} y}{x - \sqrt{d} y} < \mathcal{E}^2,$$

$$2) \quad x - \sqrt{d} y > 0,$$

где $\mathcal{E}$ — основная единица вещественного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, при этом $x^2 - d y^2 = m$.

Оказывается, что число главных представлений натурального числа m формой $x^2 - d y^2$ будет конечным, в то время, как число всех представлений числа m такой формой будет бесконечно.

Теперь сформулируем и докажем следующий основной результат о числе попарно неассоциированных кватернионов нормы m из порядка O_f .

ТЕОРЕМА 2. Для величины $\sigma(O_f, m)$ справедливы оценки

$$\max\{R_b(m), R_c(m)\} < \sigma(O_f, m) < m^4,$$

где $R_b(m)$, $R_c(m)$ — количества главных представлений числа m соответственно формами $x^2 - by^2$ и $x^2 - cy^2$; $f = x_1^2 - bx_2^2 - cx_3^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае верхней оценки для $\sigma(O_f, m)$ воспользуемся рассуждениями [7], относящимся к целым алгебраическим числам заданной нормы. Для этого в кватернионном порядке O_f с базисом $1, i_1, i_2, i_3$ рассматриваем сравнение по числовому модулю m , т. е. сравнение вида $\alpha \equiv \beta \pmod{m}$, означающее, что $\alpha - \beta$ делится в порядке O_f на число m ; $\alpha, \beta \in O_f$, иначе говоря, $\alpha - \beta = m\gamma$ при некотором $\gamma \in O_f$.

Так как всякий кватернион $\alpha \in O_f$ сравним по модулю m только с одним из кватернионов

$$x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3,$$

где $0 \leq x_j < m$ ($0 \leq j \leq 3$), то все кватернионы из O_f разбиваются на m^4 классов сравнимых между собой кватернионов по модулю m .

Далее, следуя рассуждениям [7] получаем, что если два кватерниона α и β нормы m из O_f принадлежат одному и тому же классу вычетов по модулю m , то имеем равенства

$$\alpha - \beta = m\gamma = \gamma m,$$

при некотором $\gamma \in O_f$.

Например, пусть $\alpha - \beta = \gamma m$. Тогда $\alpha \beta^{-1} = 1 + \gamma m \beta^{-1} = 1 + \gamma \bar{\beta} \in O_f$, где $\bar{\beta}$ — кватернион, сопряжённый с β . Теперь получаем $\alpha = (1 + \gamma \bar{\beta}) \beta$, т. е. $m = N(1 + \gamma \bar{\beta}) m$, откуда $N(1 + \gamma \bar{\beta}) = 1$ и, значит, $\varepsilon = 1 + \gamma \bar{\beta}$ есть единица порядка O_f . Но тогда $\alpha = \varepsilon \beta$, где ε — единица O_f , откуда следует, что α и β ассоциированы слева. Аналогично показывается, что α и β ассоциированы и справа, следовательно, кватернионы нормы m из одного и того же класса вычетов по модулю m ассоциированы между собой.

Отсюда сразу следует, что $\sigma(O_f, m) < m^4$, тем самым верхняя оценка доказана.

Перейдём теперь к нижней оценке для $\sigma(O_f, m)$. Чтобы получить интересующую нас нижнюю оценку, мы будем рассматривать не весь порядок O_f , а его подпорядок, состоящий из кватернионов вида $x_0 + x_2 i_2$ с целыми коэффициентами x_0, x_2 .

Обозначим такой подпорядок через $O_f^{(c)} = \{x_0 + x_2 i_2 \mid x_0, x_2 \in \mathbb{Z}, i_2^2 = c\}$.

Покажем, что никакие два различных кватерниона из $O_f^{(c)}$ не могут быть ассоциированными с помощью единицы $\mathcal{E} \in O_f$ такой, что $\mathcal{E} \notin O_f^{(c)}$.

Допустим, что кватернионы $x_0 + x_2 i_2$ и $y_0 + y_2 i_2$ ассоциированы в O_f , т. е.

$$(x_0 + x_2 i_2)\mathcal{E} = y_0 + y_2 i_2,$$

где $N(\mathcal{E}) = 1$ и $\mathcal{E} = q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3 \in O_f$. Покажем, что тогда $q_1 = 0$ и $q_3 = 0$.

Действительно, имеем $(x_0 + x_2 i_2)(q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3) = y_0 + y_2 i_2$.

Тогда в силу однозначности разложения любого кватерниона из O_f по базисным единицам $1, i_1, i_2, i_3$ из этого равенства получаем систему

$$\begin{cases} y_0 q_1 + y_2 q_3 = 0, \\ c y_2 q_1 + y_0 q_3 = 0, \end{cases}$$

откуда $q_1 = 0$ и $q_3 = 0$.

Следовательно, $\mathcal{E} = q_0 + q_2 i_2 \in O_f^{(c)}$.

Ввиду этого мы можем ограничиться рассмотрением неассоциированности кватернионов только в порядке $O_f^{(c)}$ (аналогично и в случае с порядком $O_f^{(b)}$).

Как и в доказательстве теоремы 1 имеем

$$x_0^2 - c x_2^2 - b(x_3^2 - c x_1^2) = m.$$

Положив в нём $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, получаем

$$x_0^2 - c x_2^2 = m. \quad (8)$$

Аналогично получаем

$$x_0^2 - b x_3^2 - c(x_2^2 - b x_1^2) = m$$

и как в предыдущем случае рассматриваем уравнение

$$x_0^2 - b x_3^2 = m. \quad (9)$$

Сначала мы будем рассматривать нижнюю оценку для числа попарно неассоциированных кватернионов вида $x_0 + x_2 i_2$ нормы $m = x_0^2 - c x_2^2$ (такое число совпадает с числом классов ассоциированных кватернионов указанного вида).

Равенство (8), точнее любое его решение (x_0, x_2) мы рассматриваем как представление числа m бинарной квадратичной формой $x^2 - c y^2$.

Если такая бинарная квадратичная форма имеет хоть одно представление числа m , то она имеет бесконечно много представлений числа m , получаемых с помощью автоморфизмов формы $x^2 - c y^2$, имеющих вид

$$\begin{cases} \alpha = t - u, & \beta = -c u, \\ \gamma = u, & \delta = t. \end{cases} \quad (10)$$

Эти автоморфизмы определяются решениями уравнения Пелля

$$t^2 - c u^2 = 1. \quad (11)$$

Все решения этого уравнения, как известно, определяются формулой

$$t + u \sqrt{c} = \pm (t_0 + u_0 \sqrt{c})^n, \quad (12)$$

где $t_0 + u_0 \sqrt{c}$ есть основная единица вещественного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{c})$; n — целое число.

Аutomорфизмы (10) формы $x^2 - c y^2$ действуют посредством равенств

$$\begin{cases} x - \sqrt{c} y = (t - u \sqrt{c}) (x' - \sqrt{c} y'), \\ x + \sqrt{c} y = (t + u \sqrt{c}) (x' + \sqrt{c} y'). \end{cases} \quad (13)$$

Если теперь (x, y) и (X, Y) — два представления одного и того же числа m , то из (13) имеем

$$\frac{x + \sqrt{c} y}{x - \sqrt{c} y} = \frac{t + u \sqrt{c}}{t - u \sqrt{c}} \cdot \frac{X + \sqrt{c} Y}{X - \sqrt{c} Y}. \quad (14)$$

Положив $\mathcal{E} = t_0 + u_0 \sqrt{c} > 1$ получим

$$t + u \sqrt{c} = \pm \mathcal{E}^k, \quad t - u \sqrt{c} = \pm \mathcal{E}^{-k}, \quad (15)$$

для некоторого целого числа k .

Существует только одно значение k для данных X, Y , при котором

$$1 \leq \frac{x + \sqrt{c}y}{x - \sqrt{c}y} < \mathcal{E}^2 \quad (16)$$

и

$$x - \sqrt{c}y > 0. \quad (17)$$

Представление числа m формой $x^2 - cy^2$, удовлетворяющее условиям (16) и (18) как раз является главным.

Равенство (14) в силу (15) можно переписать в следующем виде

$$\frac{x + \sqrt{c}y}{x - \sqrt{c}y} = \mathcal{E}^{2k} \cdot \frac{X + \sqrt{c}Y}{X - \sqrt{c}Y}. \quad (18)$$

Кватерниону вида $x_0 + x_2 i_2$, где $i_2^2 = c$ нормы $m = x_0^2 - cx_2^2$ мы будем сопоставлять главное представление (x_0, x_2) числа m бинарной квадратичной формой $x^2 - cy^2$.

Множество кватернионов

$$\langle x_0 + x_2 i_2 \mid x_0 + \sqrt{c}x_2 - \text{основная единица квадратичного поля } \mathbb{Q}(\sqrt{c}) \rangle$$

образует бесконечную циклическую группу, при этом $i_2 \leftrightarrow \sqrt{c}$. Более того, оно образует даже поле изоморфное вещественному квадратичному полю $\mathbb{Q}(\sqrt{c})$.

Перепишем (16) с учётом (18) в следующем виде

$$1 \leq \mathcal{E}^{2k} \cdot \frac{X + \sqrt{c}Y}{X - \sqrt{c}Y} < \mathcal{E}^2. \quad (19)$$

Считая теперь (X_0, X_2) главным представлением числа m формой $x^2 - cy^2$ и логарифмируя обе части неравенства (19), будем иметь

$$0 \leq 2k \ln \mathcal{E} + \ln \frac{X_0 + \sqrt{c}Y_2}{X_0 - \sqrt{c}Y_2} < 2 \ln \mathcal{E}. \quad (20)$$

Так как (X_0, X_2) по условию есть главное представление числа m формой $x^2 - cy^2$, то получаем

$$0 < X_0 + \sqrt{c}X_2 < \sqrt{m}. \quad (21)$$

Из (20) имеем

$$0 \leq 2k \ln \mathcal{E} + \ln m - 2 \ln (X_0 - \sqrt{c}Y_0) < 2 \ln \mathcal{E}.$$

Тогда в силу (21) получаем

$$0 \leq 2k \ln \mathcal{E} + \ln m - 2 \ln \sqrt{m} < 2 \ln \mathcal{E},$$

т. е.

$$0 \leq 2k \ln \mathcal{E} < 2 \ln \mathcal{E}, \quad \text{где } \mathcal{E} > 1,$$

откуда $0 \leq k < 1$, т. е. $k = 0$.

Тогда в силу (18) главные представления числа m формой $x^2 - cy^2$ попарно неассоциированы. Следовательно $\sigma(O_f^{(c)}, m) > R_c(m)$ и значит, $\sigma(O_f, m) > R_c(m)$.

Аналогично получаем также, что $\sigma(O_f, m) > R_b(m)$.

Из этих двух неравенств следует, что

$$\sigma(O_f, m) > \max \{R_b(m), R_c(m)\}.$$

Теорема 2 доказана. $\square$

Заключение

Уравнению Пелля более общего вида, также используемому нами, посвящены статьи [10, 11]. Возможно, что имеются и другие единицы в O_f^* , кроме полученных нами, например, если разрешима система диофантовых уравнений

$$\begin{cases} x_0^2 - cx_2^2 = bn + 1, \\ x_3^2 - cx_1^2 = n \end{cases}$$

или разрешима аналогичная ей система

$$\begin{cases} x_0^2 - bx_2^2 = cn + 1, \\ x_3^2 - bx_1^2 = n, \end{cases}$$

где n — целое число.

Случай $n = 0$ соответствует полученному нами результату о единицах группы O_f^* и для реализации такого подхода могут быть использованы алгоритмы из [10], а также результаты из [11].

Представляет также интерес для дальнейшего исследования группы единиц порядка O_f подход, предложенный Касселсом (см. [12], глава 13) при построении автоморфизмов тернарной квадратичной формы $f_0(\bar{x}) = ax^2 - by^2 - cz^2$ через автоморфизмы бинарной формы $ax^2 - by^2$, где a, b, c — целые положительные числа.

Наконец, относительно той части нашей работы, связанной с вопросом о числе попарно неассоциированных кватернионов заданной нормы отметим, что ряд точных результатов получен первым из авторов в случае кольца целых матриц (см. [13]–[16]), причём в [14] даётся уже новый вывод формулы для указанной величины.

Пользуясь основным результатом теории бинарных квадратичных форм о числе главных представлений числа m полной системой неэквивалентных форм заданного определителя (см. [9], гл. IV, § 8) и нижнюю оценку в теореме 2 при нечётном m можно представить в виде $\sigma(O_f, m) \geq 2^{\nu(m)}$, где $\nu(m)$ — количество простых делителей числа m .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касселс Дж., Фрелих А. Алгебраическая теория чисел. М.: «Мир», 1969. 483 с.
2. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Труды математического ин-та АН СССР. Т. 65 (1962), 212 с.
3. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1967. 208 с.
4. Пачев У. М., Шакова Т. А. Об алгебре обобщённых кватернионов // Сборник материалов Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы развития науки и современного образования». Белгород, 2017. С. 64–66.
5. Eichler M. Über die Einheiten der Divisionalgebren // Math. Ann. 1937. S. 635–364.
6. Пачев У. М., Шакова Т. А. О группе кватернионных единиц неопределенной анизотропной тернарной квадратичной формы // Материалы XVII Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора Н. И. "Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко. Тула, 23–28 сентября 2019 г. С. 123–126.

7. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. Изд. 3-е. М., 1985. 503 с.
8. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. М.: Наука, 1971.
9. Венков Б. А. Элементарная теория чисел. ОНТИ. 1937. 219 с.
10. Basilla J. M., Wada H. On solution of $x^2 - dy^2 = \pm m$ // Proc. Japan Acad., 81. Ser A (2005), pp. 137–140.
11. Евсеева Ю.Ю. О количестве представлений натуральных чисел циклическими бинарными квадратичными формами // Чебышевский сб. 2010. Т. 11, вып. 1(33). С. 116–125.
12. Касселс Дж. Рациональные квадратичные формы. М.: «Мир», 1982. 436 с.
13. Малышев А. В., Пачев У. М. Об арифметике матриц второго порядка // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 93. С. 41–86.
14. Пачев У. М. О числе приведённых целочисленных неопределённых бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов // Чебышевский сб. 2003. Т. 4, вып. 3(7). С. 92–105.
15. Пачев У. М. Об арифметике кольца целых матриц n -го порядка // Владикавк. матем. журн. 2008. Т. 10, вып. 1. С. 75–78.
16. Пачев У. М. О числе примитивных неассоциированных матриц второго порядка определителя n , делящихся на заданную матрицу // Владикавк. матем. журн. 2015. Т. 17, вып. 2. С. 62–67.

REFERENCES

1. Cassels J. W. S., Frölich A. 1967, “Algebraic number theory”. London e. a.; Academic Press.
2. Malyshev A. V. 1962, “On representation number by positive quadratic forms”, Tr. Math. Inst. Steklova, vol. 65, pp. 1–212.
3. Linnik Yu. V. 1967, “Ergodic properties of algebraic fields” / Leningrad university. 208 pp.
4. Pachev U. M., Shakova T. A. 2017, “On the algebra of generalized quaternions” / Collection of materials of the international scientific – practical conference ‘Actual problems of the development of science and modern education’. Belgorod. pp. 64–66.
5. Eichler M. 1937, Über die Einheiten der Dividionalgebren // Math. ann. S. 635–654.
6. Pachev U. M., Shakova T. A. 2019, “On a group of quaternion units of an indefinite anisotropic ternary quadratics forms”/ Materials of the xvii international Conference “Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: Modern problems, Applications and Problems of History” dedicated to the 100th birthday of Professor N. I. Feldman and the 90th birthday of professors A. I. Vinogradov, A. V. Malyshev and B. F. Skubenko. Tula. pp. 123–126.
7. Borevich Z. I., Shafarevich I. R. 1985, “Theoriya chisel”, 3rd edition, Nauka, Moscow, 503 pp. (Russian).
8. Davenport H. 1971. “Multiplicative number theory”, Nauka, Moscow, 199 p.
9. Venkov B. A. 1937, “Elementary number theory”, 219 p.

10. Basilla J. M, Bada H. 2005, “On the solution of $x^2 - dy^2 = \pm m$ ” / Proc. Japan Acad., 81. Ser. A, pp. 137–140.
11. Evseeva Yu. Yu. 2010, “On the number of representations of natural numbers by cyclic binary quadratic forms” / Chebyshevskii Sb., vol. 11, no 1 (33), pp. 116–125. (Russian).
12. Cassels J. W. S. 1982, “Rationalnye kvadratische formy”, Mir, Moscow, 436 pp (Russian).
13. Malyshev A. V., Pachev U. M. 1982, “On the arithmetic of matrices of second order”, J. Soviet Math. Pp. 1096–1122.
14. Pachev U. M. 2003, “On the number of reduced integer indefinite binary quadratic forms with the condition of divisibility of the first coefficients” / Chebyshevskii Sb., vol. 4, no 3(7), pp. 90–105. (Russian).
15. Pachev U. M. 2008, “On the arithmetic of the ring of n -order integer matrices”, Vladikavkaz. Mat. Zh. Vol. 10, no 1, pp. 75–78.
16. Pachev U. M. 2015, “About the number of primitive non-associated second order matrices of determinant n divisible”, Vladikavkaz. Mat. Zh. vol. 17. no 2, pp. 62–67.

Получено 15.10.2019 г.

Принято в печать 20.12.2019 г.