

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 517.53

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-236-269

Интегралы и индикаторы субгармонических функций. II ¹

К. Г. Малютин, М. В. Кабанко, Т. И. Малютина

Малютин Константин Геннадьевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа и прикладной математики, Курский государственный университет (г. Курск).

e-mail: malyutinkg@gmail.com

Кабанко Михаил Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа и прикладной математики, Курский государственный университет (г. Курск).

kabankom@mail.ru

Малютина Таисия Ивановна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и прикладной математики, Курский государственный университет (г. Курск).

malyutinkg@gmail.com

Аннотация

Настоящая статья является непосредственным продолжением статьи [18]. В начале статьи мы излагаем те известные результаты общей теории субгармонических функций, которые используются в дальнейшем.

В определении полуформального порядка требуется существование чисел $\delta > 0$, $q \in (0, 1)$ и вещественного числа N таких, чтобы произвольная область $D(R, q, \delta)$ содержала точку z , такую, что $v(z) > NV(|z|)$. Это условие мы называем условием Левина. Мы ослабляем это условие и требуем только, чтобы нужная точка z содержалась не в произвольной области $D(R, q, \delta)$, а только при $R = R_n$, где R_n — некоторая последовательность, сходящаяся к бесконечности. Функции, удовлетворяющие этому ослабленному условию, мы называем функциями, локально удовлетворяющими условию Левина. Наш результат, относящийся к этому классу функций состоит в том что на множестве $E = \left\{ z : \arg z \in (0, \pi), |z| \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [qR_n, R_n/q] \right\}$ функция $v(z)$ ведет себя как функция полуформального порядка $\rho(r)$. Отметим ещё утверждения 1 и 3 теоремы 2, связанные с оценками полной меры множеств, которые не являются подмножествами множества E . Основным результатом является теорема 7. В утверждении 3 этой теоремы фиксируется новое свойство субгармонических функций конечного порядка, которое наряду со свойством, формулируемым в теореме 3, можно рассматривать как одно из важнейших свойств, выделяющих субгармонические функции в классе всех функций. Если риссовские меры субгармонической функции $v(z)$, расположенные внутри некоторого угла S величины 2Δ , сместить на границу этого угла и обозначить через $v_{\Delta}(z)$ субгармоническую функцию со смещённой риссовской мерой, то полученную функцию можно рассматривать как некоторое приближение для функции $v(z)$. Это приближение является гармонической функцией внутри S . Мы получаем интегральную оценку модуля разности $|v(z) - v_{\Delta}(z)|$, которая качественно лучше, чем оценка соответствующего интеграла для $|v(z)|$. Специально исследуется случай, когда нижний индикатор функции v конечен на биссектрисе угла S .

Ключевые слова: субгармоническая функция, полуформальный порядок, локальное условие Левина, мера Рисса, индикатор функции.

Библиография: 23 названий.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

Для цитирования:

К. Г. Малютин, М. В. Кабанко, Т. И. Малютина. Интегралы и индикаторы субгармонических функций. II // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 236–269.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 517.53

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-236-269

Integrals and indicators of subharmonic functions. II

K. G. Malyutin, M. V. Kabanko, T. I. Malyutina

Malyutin Konstantin Gennadyevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis and Applied Mathematics, Kursk State University (Kursk).

e-mail: malyutinkg@gmail.com

Kabanko Mikhail Vladimirovich — candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the department of Mathematical Analysis and Applied Mathematics, Kursk State University (Kursk).

e-mail: kabankom@mail.ru

Malyutina Taisia Ivanovna — candidate of Physico-mathematical Sciences, Associate Professor, Docent of the Department of Mathematical Analysis and Applied Mathematics, Kursk State University (Kursk).

e-mail: malyutinkg@gmail.com

Abstract

This article is a direct continuation of the article [18]. At the beginning of the paper, we present those known results of the general theory of subharmonic functions, which are used in what follows.

In the definition of a semi-formal order, it is required the existence of the real numbers $\delta > 0$, $q \in (0, 1)$ and N such that an arbitrary domain $D(R, q, \delta)$ contains a point z which satisfies $v(z) > NV(|z|)$ condition. This condition we call the Levin's condition. We weak this condition and require only that the necessary point z be contained not in an arbitrary domain $D(R, q, \delta)$, but only for $R = R_n$, where R_n is a sequence that converges to infinity. Functions that satisfy this weakened condition are called functions that locally satisfy Levin's condition. Our result related to this class of functions is that on the set $E = \left\{ z : \arg z \in (0, \pi), |z| \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [qR_n, R_n/q] \right\}$ the function $v(z)$ behaves like a function of the semi-formal order $\rho(r)$. We also note assertions 1 and 3 of the theorem 2 associated with estimates of the full measure of sets that are not subsets of the set E . The main result is the theorem 7. In assertion 3 of this theorem we fix a new property of subharmonic functions of finite order, which, together with the property formulated in theorem 3, can be considered as one of the most important properties that distinguish subharmonic functions in the class of all functions. If shift the Riesz measures of a subharmonic function $v(z)$, that are located inside some angle S of size 2Δ , to the boundary of this angle and to denote by $v_{\Delta}(z)$ a subharmonic function with a shifted Riesz measure, then the resulting function can be regarded as an approximation of the function $v(z)$. This approximation is a harmonic function inside S . We obtain an integral estimate for the modulus of the difference $|v(z) - v_{\Delta}(z)|$, which is qualitatively better than the estimate of the corresponding integral for $|v(z)|$. A special case when the lower indicator of the function v is finite on the bisector of the angle S is investigated.

Keywords: subharmonic function, semi-formal order, local Levin's condition, Riesz measure, function indicator.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

K. G. Malyutin, M. V. Kabanko, T. I. Malyutina, 2019, "Integrals and indicators of subharmonic functions. II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 236–269.

*Посвящается 5-летию памяти
профессора Анатолия Филипповича Гришина*

1. Введение

Настоящая статья является непосредственным продолжением статьи [18]. Основные определения, результаты и обозначения из [18] мы используем здесь без их напоминания. Нумерация параграфов, формул, теорем и других утверждений дается заново. Сформулируем основные результаты настоящей работы.

Как уже упоминалось во введении первой части нашего исследования, теория целых функций вполне регулярного роста относительно $r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок в смысле Влирона, была создана в 30-е годы прошлого столетия независимо друг от друга в работах Б. Я. Левина [15] и А. Пфлюгера [22, 23]. Изложение этой теории приведено в классической монографии Б. Я. Левина [16]. Теория целых функций вполне регулярного роста занимает важное место в анализе и находит многочисленные применения. Дальнейшее развитие этой теории в пространствах субгармонических функций конечного порядка в комплексной плоскости получило в работах А. Ф. Гришина [6] и В. С. Азарина [1]. Н. В. Говоров распространил теорию целых функций вполне регулярного роста на функции аналитические в полуплоскости [2, 3]. Одновременно, независимо от Н. В. Говорова, А. Ф. Гришин построил теорию субгармонических функций вполне регулярного роста в полуплоскости [7, 8]. Введение А. Ф. Гришиным понятия полной меры [9, 10] позволило А. Ф. Гришину и М. А. Федорову получить вариант второй основной теоремы Р. Неванлинны для полуплоскости [21]. А. А. Кондратюк [11, 12, 13], используя теорию коэффициентов Фурье, распространил теорию целых функций вполне регулярного роста на мероморфные в комплексной функции, рост которых оценивается достаточно общей, не убывающей на положительной полуоси, функцией $\gamma(r)$. При этом теория Левина-Пфлюгера вкладывается в теорию Кондратюка как частный случай при $\gamma(r) = r^{\rho(r)}$. В работе [19] результаты А. А. Кондратюка были частично распространены на дельта-субгармонические функции в полуплоскости.

Если голоморфная функция $f(z)$ на луче $\arg z = \theta$ является функцией порядка ρ и вполне регулярного роста, то это означает, что величина $r^{-\rho} \left| \ln |f(re^{i\theta})| - h(\theta)r^{\rho} \right|$ ($h(\theta)$ — индикатор функции f) стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ вне множества значений r нулевой линейной плотности. Еще до введения в работах Б. Я. Левина и А. Пфлюгера понятия функций вполне регулярного роста В. Бернштейн [20] оценивал для произвольной функции порядка ρ размеры множества, где написанная выше величина мала. Один из наших результатов можно рассматривать как далеко идущее усиление указанного результата В. Бернштейна.

В определении полуформального порядка требуется существование чисел $\delta > 0$, $q \in (0, 1)$ и вещественного числа N таких, чтобы произвольная область $D(R, q, \delta)$ содержала точку z , такую, что $v(z) > NV(|z|)$. Это условие мы называем условием Левина. Мы ослабляем это условие и требуем только, чтобы нужная точка z содержалась не в произвольной области $D(R, q, \delta)$, а только при $R = R_n$, где R_n — некоторая последовательность, сходящаяся к бесконечности. Функции, удовлетворяющие этому ослабленному условию, мы называем функциями, локально удовлетворяющими условию Левина. Наш результат, относящийся к этому

классу функций состоит в том что на множестве $E = \left\{ z : \arg z \in (0, \pi), |z| \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [qR_n, R_n/q] \right\}$ функция $v(z)$ ведет себя как функция полуформального порядка $\rho(r)$. Отметим ещё утверждения 1 и 3 теоремы 2, связанные с оценками полной меры множеств, которые не являются подмножествами множества E . Основным результатом является теорема 7. В утверждении 3 этой теоремы фиксируется новое свойство субгармонических функций конечного порядка, которое наряду со свойством, формулируемым в теореме 3, можно рассматривать как одно из важнейших свойств, выделяющих субгармонические функции в классе всех функций. Если риссовские меры субгармонической функции $v(z)$, расположенные внутри некоторого угла S величины 2Δ , сместить на границу этого угла и обозначить через $v_{\Delta}(z)$ субгармоническую функцию со смещённой риссовской мерой, то полученную функцию можно рассматривать как некоторое приближение для функции $v(z)$. Это приближение является гармонической функцией внутри S . Мы получаем интегральную оценку модуля разности $|v(z) - v_{\Delta}(z)|$, которая качественно лучше, чем оценка соответствующего интеграла для $|v(z)|$. Специально исследуется случай, когда нижний индикатор функции v конечен на биссектрисе угла S .

2. Общая теория субгармонических функций. Функции, локально удовлетворяющие условию Левина

Вначале мы рассмотрим некоторые факты, относящиеся к общей теории субгармонических в плоскости и полуплоскости функций. Уточнённый порядок $\rho(r)$ называется *формальным порядком* функции $v(z)$ субгармонической во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$), если существует константа M_1 такая, что $v(re^{i\theta}) \leq M_1 V(r)$ при $\theta \in [0, 2\pi]$ ($\theta \in (0, \pi)$). Через $\operatorname{SF}(\rho(r))$ мы обозначаем множество субгармонических во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$) функций, для которых $\rho(r)$ является формальным порядком. Мы не делаем различия в обозначении $\operatorname{SF}(\rho(r))$ для субгармонических во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ или в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функций, из контекста всегда ясно будет видно о каком множестве идет речь.

Субгармоническая функция $v(z)$ называется функцией *конечного порядка*, если существует уточнённый порядок $\rho(r)$ такой, что $v(z) \in \operatorname{SF}(\rho(r))$.

Уточнённый порядок $\rho(r)$ называется *полуформальным порядком* функции $v(z)$ субгармонической в $\mathbb{C}_+$, если $\rho(r)$ — формальный порядок этой функции и выполняется условие Б. Я. Левина: существуют числа $q \in (0, 1)$, $\delta \in (0, \pi/2)$, M_2 , такие, что в каждой области

$$D(R, q, \delta) = \left\{ z : qR < |z| < \frac{1}{q}R, \quad \delta < \arg z < \pi - \delta \right\} \quad (1)$$

найдётся точка z такая, что $v(z) \geq M_2 V(|z|)$. Такого типа условие появилось в одной теореме Б. Я. Левина [16, глава 2, теорема 7]. Аналогичное определение вводится для функций субгармонических в угле $\arg z \in (\alpha, \beta)$.

Известно, что если $\rho > \pi/(\beta - \alpha)$, то каждый формальный порядок функции $v(z)$ одновременно является полуформальным порядком. Таким образом, различие между формальным и полуформальным порядками наблюдается только при $\rho \leq \pi/(\beta - \alpha)$. Через $\operatorname{SHF}(\rho(r))$ мы обозначаем множество субгармонических функций, для которых $\rho(r)$ является полуформальным порядком.

Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция внутри угла (α, β) . Обозначим через E_v множество чисел ρ вида $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$, где $\rho(r)$ — полуформальный порядок функции $v(z)$. Величина $\inf E_v$ называется *порядком функции $v(z)$ внутри угла (α, β)* .

Обозначим через $C(z, r)$, $B(z, r)$ соответственно открытый и замкнутый круг с центром в точке z радиуса r . Через SK мы обозначаем класс функций $v(z)$, субгармонических в $\mathbb{C}_+$ и име-

ющих в каждом полукруге $C_+(0, R) = \{z : |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$ положительную гармоническую мажоранту. Для функций $v(z) \in \text{SK}$, следуя [9], вводится понятие полной меры λ следующим образом. Ограничение меры λ на полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ — есть нулевая мера. Ограничение меры λ на полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ — есть мера $d\lambda(\zeta) = 2\pi \operatorname{Im} \zeta d\mu(\zeta)$, где μ — риссовская мера функции $v(z)$. Ограничение меры λ на вещественную ось $\mathbb{R}$ есть мера ν , где ν определяется равенством

$$\nu([a, b]) = \lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v(x + iy) dx - \frac{1}{2}\nu(\{a\}) - \frac{1}{2}\nu(\{b\}).$$

Мера λ является конечной на каждом компакте и определяет субгармоническую функцию класса SK с точностью до слагаемого $\operatorname{Im} g(z)$, где $g(z)$ — целая вещественная функция (то есть принимает вещественные значения при вещественных значениях аргумента). Для функций класса SK почти всюду существует предел

$$v(t) = \lim_{y \rightarrow +0} v(t + iy), \quad v(t) \in L_{1,loc}(-\infty, \infty),$$

и выполняется равенство $d\nu(t) = v(t) dt + d\sigma(t)$, где σ — сингулярная относительно меры Лебега мера, называемая сингулярной граничной мерой функции v . Для функций $v(z) \in \text{SF}(\rho(r))$ мера σ отрицательная. Если кроме того $\rho < 1$, то для полной меры l справедливо неравенство

$$\iint \frac{d|\lambda|(\zeta)}{1 + |\zeta|^2} < \infty, \quad |\lambda| = \lambda_+ + \lambda_-,$$

а для функции $v(z)$ имеет место представление

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + cy, \quad c \leq 0,$$

где

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{\operatorname{Im} \zeta} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right|,$$

причём ядро K при $\operatorname{Im} \zeta = 0$ определяется по непрерывности. Нам удобно будет считать, что $K(z, \zeta) = 0$ при $\operatorname{Im} \zeta < 0$.

Пусть $v(z) \in \text{SF}(\rho(r))$ в $\mathbb{C}_+$, $\rho \geq 0$. Для того чтобы уточнённый порядок $\rho(r)$ был полужормальным порядком функции $v(z)$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого M_3 и для всех $R \geq 1$ выполнялось неравенство

$$|\lambda|([R, 2R, 0, \pi]) \leq M_3 R V(R),$$

где

$$[R_1, R_2, \varphi_1, \varphi_2] = \{z : R_1 \leq |z| \leq R_2, \quad \varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2\}.$$

Через $V(r)$ мы как и в первой части нашего исследования обозначаем функцию $r^{\rho(r)}$.

Пусть $A = \{C(z_j, R_j), j = 1, 2, \dots\}$ — система открытых кругов. Величина

$$l^*(A) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \sum_{|z_j| \leq R} R_j$$

называется верхней линейной плотностью системы A . Если множество F можно покрыть системой кругов A с $l^*(A) = 0$, то F называется C_0 — множеством. Этот термин ввел Б. Я. Левин. Если $E \subset [0, \infty)$, то величина

$$l^*(E) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^R \chi_E(t) dt$$

называется верхней линейной плотностью множества E . Здесь χ_E — характеристическая функция множества E .

Пусть μ — положительная мера в плоскости $\mathbb{C}$, такая, что $\mu(C(0, r)) \leq KV(r)$ при некотором $K > 0$, не зависящем от r . И пусть $A(r)$, $r \in [0, \infty)$, $A(0) > 0$, $\varphi(\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$, $\varphi(0) = 0$ — возрастающие непрерывные функции. Исключительным множеством для меры μ , построенном с помощью функций $A(r)$ и $\varphi(\alpha)$, называется множество F тех точек $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, для которых существует $\alpha \in (0, 1]$ такое, что

$$\mu(B(z, \alpha r)) \geq \varphi(\alpha)A(r), \quad r = |z|. \quad (2)$$

Легко видеть, что для каждого $z \in F$ существует максимальное α (мы его будем обозначать α_z), для которого выполняется неравенство (2). Если $\alpha_z < 1$, то выполняется равенство

$$\mu(B(z, \alpha_z r)) = \varphi(\alpha_z)V(r).$$

Обозначим $G = \bigcup_{z \in F} C(z, \alpha_z r)$ и пусть $G = \bigcup_i G_i$ — разложение открытого множества G на связные компоненты. Если компонента G_i ограничена, то через $C(g_i, R_i)$ мы обозначим круг наименьшего радиуса, содержащий множество G_i . Если все компоненты G_i ограничены, то через A мы будем обозначать систему кругов $C(g_i, R_i)$, $i = 1, 2, \dots$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция во всей плоскости, $\rho(r)$ — её формальный порядок, μ — её риссовская мера, η — произвольное число из интервала $(0, 1/4)$. Тогда существуют величины M_4 , M_5 , M_6 , не зависящие от η , такие, что если F — исключительное множество для меры μ , построенное с помощью функций $A(r) = V(r)$, $\varphi(\alpha) = \frac{M_4 \alpha}{\eta}$, то $l^*(A) \leq \eta$ и выполняются неравенства

$$|v(z)| \leq M_5 \ln \left(\frac{1}{\eta} \right) V(r), \quad z \notin F,$$

$$|v(z + hz) - v(z)| \leq M_6 \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{|h|}{\eta t} \right) dt V(r), \quad z, z + hz \notin F.$$

Более подробное изложение и доказательство большинства из приведенных выше результатов можно найти [6, 7, 8, 9, 10].

Как мы уже отмечали, субгармоническая функция $v(z)$ формального порядка $\rho(r)$ называется функцией полуформального порядка $\rho(r)$, если выполнено условие Б. Я. Левина. Сейчас мы ослабим это условие, потребовав чтобы оно выполнялось не для любой области $D(R, q, \delta)$, а только при $R \in E$, где E — некоторое неограниченное множество. В этом случае мы будем говорить, что функция $v(z)$ локально удовлетворяет условию Б. Я. Левина. Утверждения следующей теоремы для случая функций $v(z)$ полуформального порядка $\rho(r)$ известны и их можно извлечь, например, из работ [6, 7, 8, 9]. Если считать доказанными утверждения 1, 3, 6 нижеследующей теоремы, то остальные утверждения доказываются точно также, как и для функций полуформального порядка $\rho(r)$. Поэтому мы не будем полностью доказывать теорему 2, а только пункты 1, 3, 6 этой теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $v(z) \in SF(\rho(r))$, $\delta \in (0, \pi/2)$, $q \in (0, 1)$, λ — полная мера функции $v(z)$, $N \in (-\infty, +\infty)$,

$$A_N = \left\{ r \geq 1 : \sup_{\theta \in [\delta, \pi - \delta]} v(re^{i\theta}) \geq NV(r) \right\},$$

$$E_1 = \bigcup_{r \in A_N} \left(qr, \frac{1}{q}r \right), \quad E_2 = \bigcup_{r \in A_N} \left(\frac{q}{2}r, \frac{2}{q}r \right),$$

$$D_1 = E_1 \times \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right), \quad D_2 = E_2 \times \left(\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right).$$

Пусть A_N — неограниченное множество. Тогда

- 1) $|\lambda|([0, r, 0, \pi]) \leq M_7 r V(r)$, $r \geq 1$, $r \in E_2$, $\rho > 0$,
- 2) $|\lambda|([qr, r/q, 0, \pi]) \leq M_8 r V(r)$, $r \geq 1$, $r \in E_2$, $\rho = 0$,
- 3)

$$\int_r^\infty \frac{d|\lambda|(t)}{t^2} \leq M_9 \frac{V(r)}{r}, \quad r \in E_2, \quad 0 \leq \rho < 1,$$

4)

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{C(z, \alpha r)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \sin \theta d_\alpha(z) V(r), \quad z = re^{i\theta},$$

где при любом $\alpha \in (0, 1)$, $d_\alpha(z)$ — есть ограниченная функция при $|z| \in E_2$,

5)

$$v(z + hz) - v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{C(z, \alpha r)} (K(z + hz, \zeta) - K(z, \zeta)) d\lambda(\zeta) + |h| d_\alpha(z, h) V(r),$$

где при любом $\alpha \in (0, 1)$, $|h| \leq \frac{1}{2}\alpha$, $d_\alpha(z, h)$ — есть ограниченная функция при $|z| \in E_2$,

6)

$$\int_0^\pi |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \leq M_{10} V(r), \quad r \in E_2.$$

Пусть $\rho \in (0, 1)$, μ_1 — ограничение риссовской меры функции v на множество D_2 ,

$$v_1(z) = \iint \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu_1(\zeta), \quad v_2(z) = v(z) - v_1(z).$$

Тогда

- 7) $v_1(z)$ — субгармоническая функция во всей плоскости формального порядка $\rho(r)$,
- 8) $v_2(z)$ — есть субгармоническая функция в $\mathbb{C}_+$, гармоническая на множестве D_2 ,
- 9) $|v_2(z)| \leq M_{11} V(r)$, $z \in D_1$,
- 10) $|v_2(z + hz) - v_2(z)| \leq M_{12} |h| V(r)$, $z, z + hz \in D_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \in E_2$. Тогда существует число R такое, что для некоторого $w = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [\delta, \pi - \delta]$ будет выполняться неравенство $v(w) \geq NV(R)$ и $r \in [qR/2, 2R/q]$. В полукруге $C_+(0, 4R/q)$ справедливо неравенство $v(z) \leq M_{13} V(R)$. Пусть $G(z, \zeta)$ — функция Грина этого полукруга, а H — наименьшая положительная мажоранта функции v в том же полукруге. Тогда $H(z) \leq M_{13} V(R)$ при $z \in C_+(0, 4R/q)$. Из представления Рисса-Мартина для функций v , H в полукруге $C_+(0, 4R/q)$ следует

$$\iint_{C_+(0, 4R/q)} G(w, \zeta) d\mu(\zeta) + \frac{R}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(w, 4Re^{i\theta}/q)}{\partial n} \left| v\left(\frac{4}{q}Re^{i\theta}\right) \right| d\theta +$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-4R/q}^{4R/q} \frac{\partial G(w, t)}{\partial n} d|\nu|(t) = 2H(w) - v(w),$$

где μ — риссовская мера, а ν — граничная мера функции v , $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали. Имеем

$$2H(w) - v(w) \leq M_{14}V(R), \quad M_{14} = 2M_{13} - N.$$

При $|\zeta| \leq 2R/q$ справедливо неравенство

$$2\pi \frac{\operatorname{Im} \zeta}{R} \leq M_{15}G(w, \zeta),$$

где величина M_{15} зависит только от δ и q . Это дает

$$\frac{1}{R} \iint_{C_+(0, 2R/q)} 2\pi \operatorname{Im} \zeta d\mu(\zeta) \leq M_{15} \iint_{C_+(0, 2R/q)} G(w, \zeta) d\mu(\zeta) \leq M_{14}M_{15}V(R). \quad (3)$$

При $|t| \leq 2R/q$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{R} \leq M_{16} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G(w, t)}{\partial n}.$$

Это дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} |\nu| \left(\left[-\frac{2}{q}R, \frac{2}{q}R \right] \right) &= \frac{1}{R} \int_{-2R/q}^{2R/q} d|\nu|(t) \leq M_{16} \frac{1}{2\pi} \int_{-2R/q}^{2R/q} \frac{\partial G(w, t)}{\partial n} d|\nu|(t) \leq \\ &M_{14}M_{16}V(R). \end{aligned} \quad (4)$$

Из неравенств (3) и (4) следует

$$|\lambda| \left(\overline{C_+(0, 2R/q)} \right) \leq M_{17}RV(R).$$

Так как $r \in [qR/2, 2R/q]$, то

$$|\lambda|(\overline{C_+(0, r)}) \leq |\lambda| \left(\overline{C_+(0, 2R/q)} \right) \leq M_{17}RV(R) \leq M_{18}rV(r).$$

Утверждение 1 теоремы доказано.

Заметим, аналогично доказывается, что неравенство $|\lambda|(\overline{C_+(0, r)}) \leq M_{19}V(r)$ справедливо при $r \in \bigcup_{R \in A_N} [qR/4, 4R/q]$. Далее неравенство

$$\sin \theta \leq M_{20} \frac{R}{2\pi} \frac{\partial G(w, 4Re^{i\theta}/q)}{\partial n}$$

дает

$$\int_0^\pi \left| v \left(\frac{4}{q} Re^{i\theta} \right) \right| \sin \theta d\theta \leq M_{14}M_{20}V(R).$$

Напишем формулу Карлемана

$$\frac{1}{R_2} \int_0^\pi v \left(R_2 e^{i\theta} \right) \sin \theta d\theta = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda(t)}{t^3} dt + \frac{1}{R_1} \int_0^\pi v \left(R_1 e^{i\theta} \right) \sin \theta d\theta.$$

Из полученных ранее оценок и формулы Карлемана с $R_2 = 4R/q$, $R_1 = r$ следует

$$\left| \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \right| \leq M_{21}V(r).$$

Вместе с очевидной формулой $v_+(re^{i\theta}) \leq M_{22}V(r)$ это дает утверждение 6 теоремы 2.

Пусть теперь $\rho < 1$. Тогда, взяв в формуле Карлемана $R_1 = r$ и перейдя к пределу при $R_2 \rightarrow \infty$, $R_2 \in E_2$, мы получим

$$\int_r^\infty \frac{\lambda(t)}{t^3} dt = -\frac{1}{r} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta, \quad (5)$$

где интеграл в левой части понимается в особом смысле,

$$\int_r^\infty \frac{\lambda(t)}{t^3} dt = \lim_{\substack{R_2 \rightarrow \infty \\ R_2 \in E_2}} \int_r^{R_2} \frac{\lambda(t)}{t^3} dt.$$

Так как $v \in \text{SF}(\rho(r))$, то сингулярная граничная мера функции v отрицательна. Поэтому мера λ_- сосредоточена на вещественной оси и имеет вид $d\lambda_-(t) = v_+(t) dt$. Тогда

$$\lambda_1(r) = \lambda_-(B(0, r)) = \int_{-r}^r v_+(t) dt \leq M_{23}rV(r).$$

Отсюда следует сходимость интеграла $\int_r^\infty \frac{\lambda_1(t)}{t^3} dt$, абсолютная сходимость интеграла $\int_r^\infty \frac{\lambda(t)}{t^3} dt$

и, более того, сходимость интеграла $\int_r^\infty \frac{\lambda_2(t)}{t^3} dt$, где $\lambda_2(t) = |l|(B(0, t))$. Равенство

$$\int_r^\infty \frac{d\lambda_2(t)}{t^2} = -\frac{\lambda_2(r)}{r^2} + 2 \int_r^\infty \frac{\lambda_2(t)}{t^3} dt$$

вместе с (5) дает утверждение 3 теоремы 2.

В дальнейшем нам будет нужно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция во всей плоскости, $\rho(r)$ — её формальный порядок, E — измеримое множество на полуоси $[0, \infty)$, $E_R = E \cap [0, R]$. Тогда существует величина M_{24} , не зависящая от R и θ , такая, что

$$\int_0^R \chi_E(t) |v(te^{i\theta})| dt \leq M_{24} \frac{\text{mes } E_R}{R} \ln \frac{4R}{\text{mes } E_R} RV(R).$$

Теорема 3 — это аналог леммы Эдрея и Фукса о малых дугах, доказательство которой приведено в [4, глава I, теорема 7.3]. Теорема 3 доказывается тем же методом. Для полноты изложения приведем его.

Можно считать, что $\theta = 0$. Стандартным способом доказывается, что

$$v(t) = \iint_{C(t, \delta t)} \ln \left| 1 - \frac{t}{\zeta} \right| d\mu(\zeta) + d(t)V(t),$$

где $d(t)$ — ограниченная на полуоси $[1, \infty)$ функция при каждом фиксированном $\delta > 0$. В дальнейшем мы будем считать, что $\delta \in (0, 1/8)$. Пусть $\gamma(t) = \mu(B(0, t))$. Тогда $\gamma(t) \leq MV(t)$. Далее, поскольку $\ln |1 - t/\zeta|$ отрицательно при $\zeta \in C(t, \delta t)$, то

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R \chi_E(t) |v(t)| dt \leq \int_0^R \chi_E(t) \iint_{C(t, \delta t)} \ln \left| \frac{\zeta}{\zeta - t} \right| d\mu(\zeta) dt + \\ &M \text{mes } E_R V(R) \leq \int_0^R \int_{(1-\delta)t}^{(1+\delta)t} \ln \frac{\tau}{|\tau - t|} d\gamma(\tau) \chi_E(t) dt + \\ &M \text{mes } E_R V(R) \leq \int_0^{2R} \int_0^R \chi_E(t) \ln^+ \frac{\tau}{|\tau - t|} dt d\gamma(\tau) + M \text{mes } E_R V(R). \end{aligned}$$

Так как функция $\varphi(t) = \ln^+ \tau/|\tau - t|$ принимает наибольшее значение при $t = \tau$ и убывает на полуоси $[\tau, \infty)$, и так как функция $\psi(u) = \varphi(u + \tau)$ является четной, то

$$\begin{aligned} I &\leq \int_0^{2R} \int_{-\frac{1}{2} \text{mes } E_R}^{\frac{1}{2} \text{mes } E_R} \ln^+ \frac{\tau}{u} du d\gamma(\tau) + M \text{mes } E_R V(R) = \\ &2 \int_0^{2R} \int_0^{\min(\tau, \frac{1}{2} \text{mes } E_R)} \ln \frac{\tau}{|u|} du d\gamma(\tau) + M \text{mes } E_R V(R). \end{aligned}$$

Вычисляя внутренний интеграл, получим

$$\begin{aligned} I &\leq 2 \int_0^{\frac{1}{2} \text{mes } E_R} \tau d\gamma(\tau) + \text{mes } E_R \int_{\frac{1}{2} \text{mes } E_R}^{2R} \ln \frac{2\tau}{\text{mes } E_R} d\gamma(\tau) + \\ &\text{mes } E_R \int_{\frac{1}{2} \text{mes } E_R}^{2R} d\gamma(\tau) + M \text{mes } E_R V(R) \leq M \frac{\text{mes } E_R}{4R} \ln \frac{4R}{\text{mes } E_R} RV(R). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. Интегральная оценка разности субгармонических функций со смещёнными риссовскими мерами

В этом параграфе мы рассмотрим функцию $v_\Delta(z)$, которая получается из $v(z)$ смещением вдоль окружностей с центром в нуле части её риссовской меры, расположенной внутри угла $(\theta - \Delta, \theta + \Delta)$ на граничные лучи этого угла.

Пусть $v \in \text{SF}(\rho(r))$, $\rho < 1$, λ – полная мера, ν – граничная мера функции $v(z)$. Как мы уже отмечали, для функции $v(z)$ справедливо представление:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \alpha y = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu(t)}{(t-x)^2 + y^2} +$$

$$\iint_{\mathbb{C}_+} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right| d\mu(\zeta) + \alpha y, \quad z = x + iy.$$

Пусть $\theta \in (0, \pi)$ – некоторое фиксированное число, $\Delta > 0$, $[\theta - \Delta, \theta + \Delta] \subset (0, \pi)$. Пусть h – отображение $\mathbb{C}_+$ в себя, определяемое формулой

$$h(\zeta) = \begin{cases} \zeta, & \arg \zeta \notin (\theta - \Delta, \theta + \Delta), \\ |\zeta|e^{i(\theta - \Delta)}, & \arg \zeta \in (\theta - \Delta], \\ |\zeta|e^{i(\theta + \Delta)}, & \arg \zeta \in (\theta + \Delta). \end{cases} \quad (6)$$

Пусть $\mu_h(E) = \mu(h^{-1}(E))$. Мету μ_h мы называем мерой, полученной из меры μ смещением вдоль окружностей с центром в нуле части меры μ , расположенной внутри угла $(\theta - \Delta, \theta + \Delta)$ на стороны этого угла. По формуле замены переменной в интеграле получаем

$$\iint_{\mathbb{C}_+} \ln \left| \frac{z - h(\zeta)}{z - \overline{h(\zeta)}} \right| d\mu(\zeta) = \iint_{\mathbb{C}_+} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right| d\mu_h(\zeta).$$

Обозначим

$$S_\Delta = \{\zeta : \theta - \Delta < \arg \zeta < \theta + \Delta\},$$

$$v_\Delta(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu(t)}{(t-x)^2 + y^2} + \iint_{\mathbb{C}_+} \ln \left| \frac{z - h(\zeta)}{z - \overline{h(\zeta)}} \right| d\mu(\zeta) + \alpha y.$$

Отметим, что

$$v(z) - v_\Delta(z) = \iint_{S_\Delta} \ln \left| \frac{(z - \zeta)(z - \overline{h(\zeta)})}{(z - \bar{\zeta})(z - h(\zeta))} \right| d\mu(\zeta).$$

Пусть $\zeta \in S(\Delta)$, $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \tau e^{i(\theta + \varphi)}$, $h(\zeta) = \tau e^{i(\theta + \psi)}$. Тогда $\text{sign } \varphi = \text{sign } \psi$ при $\varphi \neq 0$, $|\varphi| \leq |\psi|$, $|\psi| = \Delta$. Рассмотрим величину

$$L(r, \tau) = \ln \left| \frac{z - h(\zeta)}{z - \zeta} \frac{z - \bar{\zeta}}{z - \overline{h(\zeta)}} \right| = \ln \left| \frac{r - \tau e^{i\psi}}{r - \tau e^{i\varphi}} \frac{r - \tau e^{-i(2\theta + \varphi)}}{r - \tau e^{-i(2\theta + \psi)}} \right| =$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{r^2 - 2r\tau \cos \psi + \tau^2}{r^2 - 2r\tau \cos \varphi + \tau^2} \frac{r^2 - 2r\tau \cos(2\theta + \varphi) + \tau^2}{r^2 - 2r\tau \cos(2\theta + \psi) + \tau^2}.$$

Выбирая $\theta = \pi/2$ (другие случаи в дальнейшем не используются), получим

$$L(r, \tau) = \frac{1}{2} \ln \frac{r^2 - 2r\tau \cos \psi + \tau^2}{r^2 + 2r\tau \cos \varphi + \tau^2} \frac{r^2 - 2r\tau \cos \varphi + \tau^2}{r^2 + 2r\tau \cos \psi + \tau^2} =$$

$$\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{4r\tau(r^2 + \tau^2)(\cos \varphi - \cos \psi)}{(r^2 - 2r\tau \cos \varphi + \tau^2)(r^2 + 2r\tau \cos \psi + \tau^2)} \right).$$

Отсюда, в частности, вытекают следующие свойства, которые необходимы для дальнейшего:

$$0 \leq L(r, \tau) \leq \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{2r\tau\Delta^2}{(r - \tau)^2} \right), \quad v(it) \leq v_\Delta(it).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $v \in \text{SF}(\rho(r))$ в $\mathbb{C}_+$, $\rho \in (0, 1)$,

$$h(\varphi) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{v(re^{i\varphi})}{V(r)} - - -$$

индикатор функции $v(z)$ относительно уточнённого порядка $\rho(r)$, $h(\varphi) \neq -\infty$. Пусть A_N и E_1 — те множества, которые определены в теореме 2, причём N выбрано таким образом, чтобы множество A_N было бы неограниченным. Пусть $\Delta_1 \in (0, 1/2)$, $\Delta \in (0, \Delta_1)$. Тогда существует величина M_{25} , не зависящая от R , Δ , Δ_1 такая, что при $R \in E_1$ выполняется неравенство:

$$\int_R^{(1+\Delta_1)R} |v(it) - v_\Delta(it)| dt \leq M_{25} \Delta R V(R).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$B = \int_R^{(1+\Delta_1)R} L(t, \tau) dt.$$

Имеем

$$B \leq \frac{1}{2} \int_R^{(1+\Delta_1)R} \ln \left(1 + \frac{2t\tau\Delta^2}{(t-\tau)^2} \right) dt = \frac{1}{2}\tau \int_{\frac{R}{\tau}}^{(1+\Delta_1)\frac{R}{\tau}} \ln \left(1 + \frac{2u\Delta^2}{(u-1)^2} \right) du.$$

Обозначим через $\gamma(u)$ подынтегральную функцию в последнем интеграле, далее обозначим $\varphi(u) = u\gamma(u)$, $R/\tau = s$,

$$a(s) = \int_s^{(1+\Delta_1)s} \gamma(u) du.$$

Имеем

$$a'(s) = (1 + \Delta_1)\gamma((1 + \Delta_1)s) - \gamma(s) = (\varphi((1 + \Delta_1)s) - \frac{\varphi(s)}{s}).$$

Вычисляем производные функции φ :

$$\varphi'(u) = \ln \left(1 + \frac{2u\Delta^2}{(u-1)^2} \right) - \frac{2\Delta^2 u(u+1)}{(u-1)((u-1)^2 + 2u\Delta^2)},$$

$$\varphi''(u) = -\frac{2\Delta^2(-2(2u+1)(u-1)^2 + 2\Delta^2 u(u^2 - 2u - 1))}{(u-1)^2((u-1)^2 + 2u\Delta^2)^2}.$$

Из формулы для $\varphi'(u)$ следует, что $\varphi'(u) > 0$ при $u \in (0, 1)$. Из формулы для $\varphi''(u)$ следует, что $\varphi''(u) > 0$ при $u \in (1, \infty)$ для достаточно малых Δ . Тогда $\varphi'(u)$ есть возрастающая функция на полуоси $(1, \infty)$. Так как $\varphi'(\infty) = 0$, то $\varphi'(u) < 0$ при $u \in (1, \infty)$. Таким образом, $\varphi(u)$ есть возрастающая функция на интервале $(0, 1)$ и убывающая функция на полуоси $(1, \infty)$. Поэтому, если s_0 — точка максимума функции $a(s)$, то $s_0 < 1 < (1 + \Delta_1)s_0$, в частности, $(1 + \Delta_1)s_0 < 1 + \Delta_1$. Заметим, что $a(s) \leq a(s_0)$.

Теперь из неравенства $u \leq 1 + |u - 1|$ следует, что

$$B \leq \tau \int_1^{1+\Delta_1} \ln \left(1 + \frac{2u\Delta^2}{(u-1)^2} \right) du = \tau \int_0^{\Delta_1} \ln \left(1 + \frac{2(1+t)\Delta^2}{t^2} \right) dt \leq$$

$$\tau \int_0^{\Delta_1} \ln \left(1 + \frac{4\Delta^2}{t^2} \right) dt = 2\Delta\tau \int_0^{\frac{\Delta_1}{2\Delta}} \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \leq 2\Delta\tau \int_0^\infty \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt .$$

Обозначим

$$S_{1,\Delta} = \left\{ \zeta : |\zeta| \leq \frac{1}{2}R, \left| \frac{\pi}{2} - \arg \zeta \right| \leq \Delta \right\} ,$$

$$S_{2,\Delta} = \left\{ \zeta : \frac{1}{2}R < |\zeta| < 2R, \left| \frac{\pi}{2} - \arg \zeta \right| \leq \Delta \right\} ,$$

$$S_{3,\Delta} = \left\{ \zeta : |\zeta| \geq 2R, \left| \frac{\pi}{2} - \arg \zeta \right| \leq \Delta \right\} ,$$

Тогда

$$\int_R^{(1+\Delta_1)R} |v(it) - v_\Delta(it)| dt = \sum_{k=1}^3 \int_R^{(1+\Delta_1)R} \iint_{S_{k,\Delta}} L(t, \tau) d\mu(\zeta) dt = \\ B_1(R) + B_2(R) + B_3(R) .$$

Пусть $t \in [R, (1 + \Delta_1)R]$, $\tau = |\zeta| \leq R/2$, $R \in E_1$. Тогда

$$\frac{1}{\tau} L(t, \tau) \leq \frac{1}{2\tau} \ln \left(1 + \frac{2t\tau\Delta^2}{(t-\tau)^2} \right) \leq \\ \frac{1}{2\tau} \ln \left(1 + \frac{2R\tau\Delta^2}{(R-\tau)^2} \right) \leq \frac{R\Delta^2}{(R-\tau)^2} \leq \frac{4\Delta^2}{R} .$$

Теперь из утверждения 1 теоремы 2 и соотношения $d\lambda(\zeta) = 2\pi \operatorname{Im} \zeta d\mu(\zeta)$ в $\mathbb{C}_+$ следует

$$B_1 \leq \frac{1}{2\pi \cos \Delta} \int_R^{(1+\Delta_1)R} \iint_{S_{1,\Delta}} \frac{1}{\tau} L(t, \tau) d\lambda(\zeta) dt \leq M_{26} \Delta_1 \Delta^2 R V(R) .$$

Пусть теперь $t \in [R, (1 + \Delta_1)R]$, $\tau \geq 2R$, $R \in E_1$. Тогда

$$\frac{1}{\tau} L(t, \tau) \leq \frac{1}{2\tau} \ln \left(1 + \frac{2t\tau\Delta^2}{(\tau-t)^2} \right) \leq \frac{1}{2\tau} \ln \left(1 + \frac{2R(1+\Delta_1)\tau\Delta^2}{(\tau - (1+\Delta_1)R)^2} \right) \leq \\ \frac{R(1+\Delta_1)\Delta^2}{(\tau - (1+\Delta_1)R)^2} \leq \frac{R(1+\Delta_1)\Delta^2}{(\tau - \frac{1}{2}(1+\Delta_1)\tau)^2} = \frac{4(1+\Delta_1)}{(1-\Delta_1)^2} \frac{\Delta^2 R}{\tau^2} \leq 24 \frac{\Delta^2 R}{\tau^2} .$$

Далее из утверждения 3 теоремы 2 следует

$$B_3 \leq \frac{1}{2\pi \cos \Delta} \int_R^{(1+\Delta_1)R} \iint_{S_{3,\Delta}} \frac{1}{\tau} L(t, \tau) d\lambda(\zeta) dt \leq \\ \frac{24R\Delta^2}{2\pi \cos \Delta} \int_R^{(1+\Delta_1)R} \int_{2R}^\infty \frac{d\lambda(\tau)}{\tau^2} dt \leq M_{27} \Delta_1 \Delta^2 R V(R) .$$

Воспользовавшись еще раз утверждением 1 теоремы 2 и оценкой для B , получим при $R \in E_1$

$$B_2 \leq \frac{1}{2\pi \cos \Delta} \int_R^{(1+\Delta_1)R} \iint_{S_{2,\Delta}} \frac{1}{\tau} L(t, \tau) d\lambda(\zeta) dt =$$

$$\frac{1}{2\pi \cos \Delta} \iint_{S_{2,\Delta}} \int_R^{(1+\Delta_1)R} L(t, \tau) dt \frac{d\lambda(\zeta)}{\tau} \leq \Delta \int_0^\infty \ln \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) du \iint_{S_{2,\Delta}} d\lambda(\zeta) \leq M_{28} \Delta R V(R).$$

Из полученных оценок следует утверждение теоремы.

4. Исключительное множество в окрестности луча, на котором конечен нижний индикатор

В этом параграфе мы продолжим изучение функции $v_\Delta(z)$. Оказывается, что если нижний индикатор $\underline{h}(\theta)$ функции $v(z)$ на луче $\arg z = \theta$ конечен, то исключительное множество для риссовской меры функции $v_\Delta(z)$ обладает некоторыми свойствами, которых нет в общем случае.

Мы напомним определение нижнего индикатора.

$$\underline{h}(\theta) = \liminf_{r \rightarrow \infty}^* \frac{v(re^{i\theta})}{V(r)} = \sup \liminf_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \notin E}} \frac{v(re^{i\theta})}{V(r)},$$

где супремум берется по всем множествам нулевой линейной плотности.

Мы будем пользоваться обозначениями, введенными перед формулировкой теоремы 1. В следующей теореме мы введем величины Δ, Δ_1, η , связанные некоторыми соотношениями. Эти соотношения подобраны таким образом, чтобы используемый метод давал наилучшую оценку для величины $w(\alpha)$ из теоремы 7. Далее мы используем такое обозначение для итерированного логарифма: $\ln_2 x = \ln \ln x$, $\ln_{k+1} x = \ln(\ln_k x)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $v \in \text{SHF}(\rho(r))$, $\rho \in (0, 1)$, $\theta \in (0, \pi)$, $\underline{h}(\pi/2) > -\infty$,

$$[\pi/2 - \Delta, \pi/2 + \Delta] \subset (\theta_1, \theta_2) \subset [\theta_1, \theta_2] \subset (0, \pi).$$

Пусть

$$\Delta = \Delta_1 \sqrt{\frac{\ln_2(3/\Delta_1)}{\ln(3/\Delta_1)}}, \quad \eta = \frac{1}{M_{28}} \Delta_1 \sqrt{\ln_2 \frac{3}{\Delta_1} \ln \frac{3}{\Delta_1}},$$

где $M_{28} = M_{28}(v)$ — специально выбираемая константа. Пусть $h(\zeta)$ — функция, определяемая равенством (6), с $\theta = \pi/2$, μ — риссовская мера функции $v(z)$, $\mu_h(E) = \mu(h^{-1}(E))$, μ_1 — ограничение меры μ_h на угол $\arg z \in [\theta_1, \theta_2]$. Пусть F — исключительное множество, построенное для меры μ_1 с помощью функций $A(r) = V(r)$, $\varphi(\alpha) = M_4 \alpha / \eta$ (M_4 из теоремы 1).

Тогда существуют $\Delta_0 > 0$ и R_0 такие, что если $\Delta_1 \in (0, \Delta_0)$, то

$$G \cap \{z : \arg z = \frac{\pi}{2}, \quad |z| \geq R_0\} = \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сформулированная теорема имеет несколько длинное доказательство и мы разбиваем его на несколько этапов.

Первый этап. Пусть

$$-N < \underline{h}\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad N > 1, \quad M_{29} = \sup_{r_2 \leq (1+\exp(-e))r_1} \frac{V(r_2)}{V(r_1)}, \quad N_1 = NM_{29}, \quad \Delta_1 < e^{-e}.$$

На первом этапе мы докажем, что для всех достаточно больших R каждый сегмент $[R, (1+\Delta_1)R]$ имеет точку ξ такую, что $v_\Delta(i\xi) \geq -N_1 V(R)$. Пусть $A_N = \{r : v(ir) \geq -NV(r)\}$.

Из определения нижнего индикатора следует, что линейная плотность множества A_N равна единице. Поэтому для любого достаточно большого R сегмент $[R, (1 + \Delta_1)R]$ содержит точку ξ такую, что $v(i\xi) \geq -NV(\xi)$. Тогда $v_\Delta(i\xi) \geq v(i\xi) \geq -NV(\xi) \geq -N_1V(R)$.

Второй этап. На этом этапе мы докажем, что при подходящем выборе числа M_{28} в формуле для η из неравенства $v_\Delta(i\tau) \geq -(N_1 + 2)V(R)$ будет следовать соотношение $i\tau \notin G$. Отсюда, в частности, будет следовать, что $i\xi \notin G$. Допустим, что $v_\Delta(i\tau) \geq -(N_1 + 2)V(R)$, и что $i\tau \in G$. Тогда существует $z \in F$ такое, что $i\tau \in C(z, \alpha_z r)$. Поэтому $\tau = |i\tau - z + z| \geq (1 - \alpha_z)r$. Пусть $w \in C(z, \alpha_z r)$. Тогда

$$|w - i\tau| \leq 2\alpha_z r \leq 2\frac{\alpha_z}{1 - \alpha_z}\tau.$$

Таким образом,

$$C(z, \alpha_z r) \subset C\left(i\tau, 2\frac{\alpha_z}{1 - \alpha_z}\tau\right).$$

Предположим теперь, что $\alpha_z < \Delta/3$. Так как $\Delta < \Delta_1 \leq \exp(-e^e) < 1/2$, то

$$2\frac{\alpha_z}{1 - \alpha_z} < \frac{2}{1 - 1/6}\alpha_z < \frac{12}{5}\frac{\Delta}{3} = \frac{4}{5}\Delta.$$

В этом случае круги $C(z, \alpha_z r)$, $C(i\tau, 2\alpha_z \tau / (1 - \alpha_z))$ целиком лежат внутри угла $(\pi/2 - \Delta, \pi/2 + \Delta)$. Однако мера μ_1 не нагружает этого угла. Поэтому $\mu_1(C(z, \alpha_z r)) = 0$. Это противоречит определению числа α_z . Тем самым предположение $\alpha_z < \Delta/3$ приводит к противоречию и, следовательно, выполняется неравенство $\alpha_z \geq \Delta/3$.

По теореме 1

$$\alpha_z \leq \eta = \frac{1}{M_{28}}\Delta_1 \sqrt{\ln_2 \frac{3}{\Delta_1} \ln \frac{3}{\Delta_1}} =: b(M_{28}, \Delta_1).$$

Будем считать, что $M_{28} \geq 1$ и пусть $\delta = 2b(1, e^{-e})/(1 - b(1, e^{-e}))$. Тогда будет выполняться соотношение

$$C(z, \alpha_z r) \subset C\left(i\tau, \frac{2\alpha_z}{1 - \alpha_z}\tau\right) \subset C(i\tau, \delta\tau).$$

Кроме того, из теоремы 2, пункт 4, следует, что существует величина M_{30} , не зависящая от τ такая, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} v_\Delta(i\tau) &\leq \iint_{C(i\tau, \delta\tau)} \ln \left| \frac{i\tau - \zeta}{i\tau - \bar{\zeta}} \right| d\mu_1(\zeta) + M_{30}V(R) \leq \\ &\iint_{C(z, \alpha_z r)} \ln \left| \frac{i\tau - \zeta}{i\tau - \bar{\zeta}} \right| d\mu_1(\zeta) + M_{30}V(R). \end{aligned}$$

Так как $i\tau \in C(z, \alpha_z r)$, то при $\zeta \in C(z, \alpha_z r)$ выполняется неравенство $|i\tau - \zeta| \leq 2\alpha_z r$. Кроме того, $|i\tau - \bar{\zeta}| \geq \tau \geq (1 - \alpha_z)r$. Поэтому

$$\begin{aligned} v_\Delta(i\tau) &\leq -\ln \frac{1}{\alpha_z} \iint_{C(z, \alpha_z r)} d\mu_1(\zeta) + \iint_{C(z, \alpha_z r)} \ln \frac{2}{(1 - \alpha_z)} d\mu_1(\zeta) + \\ &M_{30}V(R) \leq -\mu_1(C(z, \alpha_z r)) \ln \frac{1}{\alpha_z} + M_{31}V(R), \end{aligned}$$

где величина M_{31} также не зависит от τ .

По свойству числа α_z справедливо равенство

$$\mu_1(C(z, \alpha_z r)) = M_{32}\alpha_z \frac{V(r)}{\eta}.$$

Следовательно,

$$v_{\Delta}(i\tau) \leq -M_4 \frac{\alpha_z}{\eta} \ln \frac{1}{\alpha_z} V(r) + M_{31} V(R) \leq -M_{32} \frac{\alpha_z}{\eta} \ln \frac{1}{\alpha_z} V(R) + M_{31} V(R).$$

Функция $-\alpha_z \ln 1/\alpha_z$ является убывающей функцией на интервале $(0, e^{-1})$ и $\alpha_z \geq \Delta/3$. Поэтому

$$\begin{aligned} v_{\Delta}(i\tau) &\leq -\frac{1}{3} M_{32} \frac{\Delta}{\eta} \ln \frac{3}{\Delta} V(R) + M_{31} V(R) = \\ &= \left(-\frac{1}{3} M_{32} M_{28} \frac{\Delta_1 \sqrt{\frac{\ln_2 \frac{3}{\Delta_1}}{\ln \frac{3}{\Delta_1}}} \left(\ln \frac{3}{\Delta_1} + \frac{1}{2} \ln_2 \frac{3}{\Delta_1} - \frac{1}{2} \ln_3 \frac{3}{\Delta_1} \right)}{\Delta_1 \sqrt{\ln_2 \frac{3}{\Delta_1} \ln \frac{3}{\Delta_1}}} + M_{31} \right) V(R). \end{aligned}$$

При соответствующем выборе числа M_{28} полученное неравенство противоречит неравенству $v_{\Delta}(i\tau) \geq -(N_1 + 2)V(R)$. Таким образом, сформулированное нами выше утверждение доказано.

Третий этап. На этом этапе мы докажем, что при достаточно малых Δ_1 из соотношений $\tau \in [R, (1 + \Delta_1)R]$, $i\tau \notin G$ следует неравенство

$$v_{\Delta}(i\tau) \geq -(N_1 + 1)V(R).$$

Обозначим

$$v_1(z) = \iint \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu_1(\zeta), \quad v_2(z) = v_{\Delta}(z) - v_1(z).$$

Из теоремы 2, пункт 10, следует, что существует величина M_{33} , не зависящая от z , h , r такая, что при $\arg z, \arg(z + hz) \in [\pi/2 - \Delta, \pi/2 + \Delta]$, выполняется неравенство $|v_2(z + hz) - v_2(z)| \leq M_{33}|h|V(r)$. Кроме того, как следует из теоремы 1, существует величина M_{34} , не зависящая от z , h , η такая, что при $z, z + hz \notin F$ выполняется неравенство

$$|v_1(z + hz) - v_1(z)| \leq M_{34} \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{|h|}{\eta t} \right) dt V(r).$$

Таким образом, при $z, z + hz \notin F$, $\arg z, \arg(z + hz) \in [\pi/2 - \Delta, \pi/2 + \Delta]$, выполняется неравенство

$$|v_{\Delta}(z + hz) - v_{\Delta}(z)| \leq M_{35} \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{|h|}{\eta t} \right) dt V(r).$$

Пусть теперь $\tau \in [R, (1 + \Delta_1)R]$, $i\tau \notin G$. Тогда, учитывая, что $\xi \in [R, (1 + \Delta_1)R]$, $i\xi \notin G$, $|\tau - \xi| \leq \Delta_1 \xi$, получим

$$|v_{\Delta}(i\tau) - v_{\Delta}(i\xi)| \leq M_{35} \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{M_{28}}{\sqrt{\ln_2(3/\Delta_1) \ln(3/\Delta_1) t}} \right) dt V(R).$$

Поэтому при достаточно малом Δ_1 будут выполняться неравенства

$$|v_{\Delta}(i\tau) - v_{\Delta}(i\xi)| \leq V(R), \quad v_{\Delta}(i\tau) \geq -(N_1 + 1)V(R).$$

Четвёртый этап. Это заключительный этап доказательства. Пусть Δ_0, R_0 — такие числа, что при $\Delta_1 \in (0, \Delta_0)$, $R \geq R_0$ все три предыдущих утверждения верны. Множество

$G \cap \{z : |z| > 0, \arg z = \pi/2\}$ есть объединение непересекающихся интервалов (ia_k, ib_k) . Предположим, что для некоторого $R \geq R_0$ и некоторого k пересечение $[R, (1 + \Delta_1)R] \cap (a_k, b_k)$ не пусто. Так как точка $i\xi \notin G$, то отрезок $[R, (1 + \Delta_1)R]$ не принадлежит интервалу (a_k, b_k) . Тогда хотя бы одна из точек a_k, b_k принадлежит сегменту $[R, (1 + \Delta_1)R]$. Пусть $a_k \in [R, (1 + \Delta_1)R]$. Тогда $a_k \in [R, (1 + \Delta_1)R]$. Так как $ia_k \notin G$, то $v_\Delta(ia_k) \geq -(N_1 + 1)V(R)$. Так как функция v_Δ непрерывна в точке ia_k , то для некоторого $r \in (a_k, b_k) \cap [R, (1 + \Delta_1)R]$ будет выполняться неравенство $v_\Delta(ir) \geq -(N_1 + 2)V(R)$. Это противоречит второму доказанному утверждению.

Теорема доказана.

Замечание. Фактически мы доказали несколько более общее утверждение. Сформулируем его в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $v \in \text{SF}(\rho(r))$, $\rho \in (0, 1)$, N — некоторое фиксированное число, $N > 1$, $\pi/2 \in (\theta_1, \theta_2) \subset [\theta_1, \theta_2] \subset (0, \pi)$. Пусть μ — риссовская мера функции v , h — функция определяемая равенством (6) при $\theta = \pi/2$, $\mu_h(E) = \mu(h^{-1}(E))$, μ_1 — ограничение меры μ_h на угол $[\theta_1, \theta_2]$, F — исключительное множество, построенное для меры μ_1 с помощью функций $A(r) = V(r)$, $\varphi(\alpha) = M_4\alpha/\eta$ (M_4 — константа из теоремы 1), $G = \bigcup_{z \in F} C(z, \alpha_z|z|)$. Тогда существуют величина $M_{28} = M_{28}(v, N, \theta_1, \theta_2)$ и числа $\Delta_0 > 0$, $R_0 > 0$ такие, что если

$$\Delta = \Delta_1 \sqrt{\frac{\ln_2(3/\Delta_1)}{\ln(3/\Delta_1)}}, \quad \eta = \frac{1}{M_{28}} \Delta_1 \sqrt{\ln_2 \frac{3}{\Delta_1} \ln \frac{3}{\Delta_1}},$$

$\Delta_1 \in (0, \Delta_0)$, $R > R_0$, выполняется неравенство $\sup_{r \in [R, (1+\Delta_1)R]} v(ir) \geq -NV(R)$, то

$$G \cap [iR, i(1 + \Delta_1)R] = \emptyset.$$

5. Формулы для индикатора и нижнего индикатора

В этом параграфе мы доказываем основную теорему нашего исследования.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $v(z) \in \text{SF}(\rho(r))$ внутри угла (θ_1, θ_2) , $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, $\rho > 0$, s — произвольное вещественное число,

$$w_s(\alpha) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{1+s}V(r)} \int_r^{(1+\alpha)r} t^s v(te^{i\theta}) dt,$$

$$\underline{w}_s(\alpha) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{1+s}V(r)} \int_r^{(1+\alpha)r} t^s v(te^{i\theta}) dt.$$

Пусть $h(\theta)$ и $\underline{h}(\theta)$ — индикатор и нижний индикатор функции $v(z)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$. Тогда

1) существуют пределы

$$w_s = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{w_s(\alpha)}{\alpha}, \quad \underline{w}_s = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\underline{w}_s(\alpha)}{\alpha};$$

2) выполняются равенства: $h(\theta) = w_s$, $\underline{h}(\theta) = \underline{w}_s$;

3) если $H \in (-\infty, \infty) \cap [\underline{h}(\theta), h(\theta)]$,

$$w(\alpha) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{rV(r)} \int_r^{(1+\alpha)r} |v(te^{i\theta}) - HV(t)| dt;$$

то

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{w(\alpha)}{\alpha} = 0;$$

4) если $H \in (\underline{h}(\theta), h(\theta)]$, то существует величина $M = M(H, v)$ такая, что при $\alpha \in (0, e^{-e})$ выполняется неравенство

$$w(\alpha) \leq M\alpha \sqrt{\frac{\ln_2(1/\alpha)}{\ln(1/\alpha)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказывать теорему для функции $v(z)$ и уточнённого порядка $\rho(r)$ или для функции $v(e^{i\beta}\zeta^\gamma)$ и уточнённого порядка $\rho_1(\tau) = \gamma\rho(\tau^\gamma)$ — это эквивалентные задачи. Поэтому можно считать, что $[0, \pi] \subset (\theta_1, \theta_2)$, $\theta = 0$, $\rho \in (0, 1)$. Если $h(\theta) = -\infty$, то $\underline{w}_s(\alpha) = w_s(\alpha) = -\infty$ и все утверждения теоремы становятся тривиальными. Поэтому можно считать, что $h(\theta) > -\infty$.

Дальнейшее доказательство теоремы мы разбиваем на несколько этапов.

Первый этап. На этом этапе мы докажем, что существуют пределы

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{w_s(\alpha)}{\alpha}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\underline{w}_s(\alpha)}{\alpha}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{w(\alpha)}{\alpha}.$$

Из свойств верхнего и нижнего пределов и соответствующих свойств уточнённого порядка следует, что выполняются неравенства

$$w_s(\alpha + \beta) \leq w_s(\alpha) + (1 + \alpha)^{1+\rho+s} w\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}\right),$$

$$\underline{w}_s(\alpha + \beta) \geq \underline{w}_s(\alpha) + (1 + \alpha)^{1+\rho+s} \underline{w}_s\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}\right),$$

$$w(\alpha + \beta) \geq w(\alpha) + (1 + \alpha)^{1+\rho} w\left(\frac{\beta}{1 + \alpha}\right).$$

Так как $w_s(\alpha) \leq (h(0) + 1)\alpha$ при малых α , то $\limsup_{\alpha \rightarrow +0} w_s(\alpha) \leq 0$. Теперь из теоремы 7 работы [18] следует существование первого из написанных пределов. Если $\underline{w}_s(\alpha) \equiv -\infty$, то существование второго предела очевидно. Если для некоторого $\alpha > 0$ $\underline{w}_s(\alpha) > -\infty$, то отсюда следует, что $v(z) \in SHF(\rho(r))$. Тогда из теоремы 2, пункты 7 и 9, и теоремы 3 следует оценка $|\underline{w}_s(\alpha)| \leq M_{33}\alpha \ln(4/\alpha)$ и равенство $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \underline{w}_s(\alpha) = 0$.

Вновь применяя теорему 7 из [18], получим, что существует второй из написанных пределов. Так как функция $w(\alpha)$ возрастающая, то из этой же теоремы следует существование и третьего из написанных пределов.

Второй этап. На этом этапе мы докажем неравенства $w_s \leq h(0)$, $\underline{w}_s \geq h(0)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует число R_0 такое, что при $t \geq R_0$ выполняется неравенство $v(t) \leq (h(0) + \varepsilon)V(t)$. Тогда при $R \geq R_0$

$$\frac{1}{R^{1+s}V(R)} \int_R^{(1+\alpha)R} t^s v(t) dt \leq \frac{h(0) + \varepsilon}{R^{1+s}V(R)} \int_R^{(1+\alpha)R} t^s V(t) dt.$$

Далее, применяя теорему 21 из [18], получаем

$$w_s(\alpha) \leq (h(0) + \varepsilon) \int_1^{1+\alpha} t^{\rho+s} dt, \quad w_s \leq h(0).$$

Докажем теперь второе неравенство. Оно очевидно, если $\underline{h}(0) = -\infty$. Поэтому будем считать, что $\underline{h}(0) > -\infty$. Тогда $v(z) \in SHF(\rho(r))$. Пусть

$$E = \{t : t > 0, \quad v(t) < (\underline{h}(0) - \varepsilon)V(t)\}.$$

По определению нижнего индикатора множество E имеет линейную плотность ноль. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^{1+s}V(R)} \int_R^{(1+\alpha)R} t^s v(t) dt &= \frac{1}{R^{1+s}V(R)} \int_R^{(1+\alpha)R} \chi_{CE}(t) t^s v(t) dt + \\ &+ \frac{1}{R^{1+s}V(R)} \int_R^{(1+\alpha)R} \chi_E(t) t^s v(t) dt = I_1(R) + I_2(R), \\ I_1(R) &\geq \frac{\underline{h}(0) - \varepsilon}{R^{1+s}V(R)} \int_R^{(1+\alpha)R} \chi_{CE}(t) t^s V(t) dt = \\ &= \frac{\underline{h}(0) - \varepsilon}{R^{1+s}V(R)} \int_R^{(1+\alpha)R} t^s V(t) dt - \frac{\underline{h}(0) - \varepsilon}{R^{1+s}V(R)} \int_R^{(1+\alpha)R} \chi_E(t) t^s V(t) dt = \\ &= I_3(R) + I_4(R). \end{aligned}$$

По теореме 21 из [18]

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_3(R) = (\underline{h}(0) - \varepsilon) \int_1^{1+\alpha} t^{\rho+s} dt.$$

Так как множество E имеет линейную плотность ноль, то $\lim_{R \rightarrow \infty} I_4(R) = 0$. Из теоремы 3 и теоремы 2, пункты 7 и 9, следует, что $\lim_{R \rightarrow \infty} I_2(R) = 0$. Из доказанных утверждений легко следует, что $\underline{w}_s \geq \underline{h}(0)$.

Третий этап. На этом этапе мы докажем неравенство $h(0) \leq w_s$, а, следовательно, и равенство $h(0) = w_s$. Обозначим

$$A = \{t : t > 0, \exists \theta \in [0, \pi/8] \text{ такое, что } v(te^{i\theta}) > (h(\theta) - 1)V(t)\}.$$

При некотором $\delta \in (0, \pi/8)$ функция $v(z)$ является субгармонической в угле $\delta < \arg z < \pi - \delta$. Из этого нетрудно вывести, что при $q \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$N = \inf_{r \in A} \sup_{t \in [qr, r/q]} \frac{v(it)}{V(t)} > -\infty.$$

Пусть

$$A_N = \{t : t > 0, \quad v(it) \geq (N - 1)V(t)\}, \quad E_N = \bigcup_{r \in A_N} \left[q^2 r, \frac{1}{q^2} r \right].$$

Тогда для любого $\theta \in [0, \pi/8]$ выполняется равенство

$$h(\theta) = \limsup_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E_N}} \frac{v(re^{i\theta})}{V(r)}. \quad (7)$$

Далее мы будем рассматривать $v(z)$ как функцию субгармоническую в полуплоскости $\text{Im} z > 0$. Пусть λ — её полная мера. Тогда по теореме 2, пункт 4, справедливо равенство

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{C(z, r/2)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \sin \theta d(r, \theta) V(r),$$

где $d(r, \theta)$ — функция, ограниченная на множестве $E_N \times (0, \pi/8]$. Пусть (R_1, R_2) — есть пересечение круга $C(z, r/2)$ с вещественной осью. Тогда $R_1 = \alpha(\theta)r$, $R_2 = \beta(\theta)r$, где

$$\alpha(\theta) = \cos \theta - \sqrt{1/4 - \sin^2 \theta}, \quad \beta(\theta) = \cos \theta + \sqrt{1/4 - \sin^2 \theta}.$$

Так как ядро $K(z, \zeta)$ отрицательно при $\text{Im} z > 0$, $\text{Im} \zeta \geq 0$, а ограничение меры λ на полуплоскость $\text{Im} \zeta > 0$ — есть положительная мера, то

$$v(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} K(z, t) d\lambda(t) + \sin \theta d(r, \theta) V(r).$$

Так как $v(z)$ является субгармонической функцией и на вещественной оси, то

$$d\lambda(t) = -v(t) dt.$$

Поэтому

$$v(z) \leq \frac{y}{\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{v(t) dt}{(t-x)^2 + y^2} + \sin \theta d(r, \theta) V(r) = \frac{y}{\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{t^s v(t) dt}{t^s ((t-x)^2 + y^2)} + \sin \theta d(r, \theta) V(r).$$

Если $d\nu_1(t) = t^s v(t) dt$, то

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu_1(r + \alpha r) - \nu_1(r)}{r^{1+s} V(r)} = w_s(\alpha).$$

Мера ν_1 абсолютно непрерывна и плотность её положительной составляющей удовлетворяет неравенству

$$\frac{d\nu_1^+(t)}{dt} = t^s v_+(t) \leq M_{34} t^s V(t) = M_{34} V_1(t),$$

где $V_1(t) = t^{\rho_1(t)}$, $\rho_1(t) = s + \rho(t)$.

Теперь из теоремы 23 [18] и равенства (7) следует

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \limsup_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E_N}} \frac{v(re^{i\theta})}{V(r)} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{r^s}{V_1(r)} \frac{r \sin \theta}{\pi} \int_{\alpha(\theta)r}^{\beta(\theta)r} \frac{d\nu_1(t)}{t^s ((t-x)^2 + y^2)} + \\ &+ \limsup_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E_N}} \sin \theta d(r, \theta) \leq w_s \frac{\sin \theta}{\pi} \int_{\alpha(\theta)}^{\beta(\theta)} \frac{t^\rho dt}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} + \sin \theta d_1(\theta), \end{aligned}$$

где $d_1(\theta)$ — ограниченная функция на интервале $(0, \pi/8)$. Переходя в полученном неравенстве к пределу при $\theta \rightarrow +0$, получим неравенство $h(0) \leq w_s$.

Четвёртый этап. На этом этапе мы докажем равенство $\underline{w}_s = \underline{h}(0)$, когда хотя бы одна из двух указанных величин равна минус бесконечности. Из неравенства $\underline{w}_s \geq \underline{h}(0)$ следует, что

если $\underline{w}_s = -\infty$, то $\underline{h}(0) = -\infty$. Покажем теперь, что если $\underline{h}(0) = -\infty$, то $\underline{w}_s = -\infty$. Допустим противное, что $\underline{w}_s > -\infty$. Тогда можно считать, что $\underline{w}_s = 0$. Пусть $E_1 = \{r : v(r) \leq -2V(r)\}$. Поскольку $\underline{h}(0) = -\infty$, то $l^*(E_1) \geq 3\gamma > 0$. Поэтому существует последовательность $\{r_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty$, такая, что $\text{mes}(E_1 \cap [r_n, 2r_n]) \geq \gamma r_n$.

Поскольку $\underline{w}_s = 0$, то $\underline{w}_s(\alpha)$ не равно тождественно $-\infty$. Поэтому $v(z) \in SHF(\rho(r))$. Тогда по теореме 2 справедливо разложение $v(z) = v_1(z) + v_2(z)$, где $v_2(z)$ — гармоническая функция на множестве $S_\delta = \{z : |z| \geq 1, |\arg z| \leq \delta\}$, которая удовлетворяет неравенствам

$$|v_2(z)| \leq M_{35}V(r), \quad |v_2(z + hz) - v_2(z)| \leq M_{36}|h|V(r),$$

когда $z, z + hz \in S_\delta$, а $v_1(z)$ — субгармоническая во всей плоскости функция формального порядка $\rho(r)$. Пусть μ_1 — риссовская мера функции $v_1(z)$, $\eta_1 \in (0, 0.01)$, M_4, M_6 — те величины, о которых говорится в теореме 1. Пусть F — исключительное множество для меры μ_1 , построенное с помощью функций $A(r) = V(r)$, $\varphi(\alpha) = M_4\alpha/\eta_1$. Пусть A — та система кругов, которая построена перед формулировкой теоремы 1. По теореме 1 выполняются неравенства: $l^*(A) \leq \eta_1$,

$$|v_1(z + hz) - v_1(z)| \leq M_{37} \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{|h|}{\eta_1 t} \right) dt V(r), \quad z, z + h \notin F.$$

Поэтому при $z, z + hz \in \{\zeta : |\zeta| \geq 1, |\arg \zeta| \leq \delta\} \setminus F$ будет выполняться неравенство

$$|v(z + hz) - v(z)| \leq M_{37} \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{|h|}{\eta_1 t} \right) dt V(r).$$

Число α мы будем называть относительным радиусом круга $C(z, \alpha r)$. Пусть $A = A_1 \cup A_2$, где A_1 — те круги из набора A , чей относительный радиус строго меньше чем η_1^2 , а A_2 — остальные круги набора A . Заменяем каждый круг из набора A_2 кругом с тем же центром и в десять раз большим радиусом. Набор таких кругов обозначим $\tilde{A}_2$. Пусть $\tilde{A} = A_1 \cup \tilde{A}_2$. Тогда $l^*(\tilde{A}) \leq 10\eta_1$. Пусть $10\eta_1 < \gamma^2$. Мы можем также считать, что $\gamma < 0.1$. Тогда $l^*(A) \leq 0.1\gamma$. Пусть E_2 — объединение кругов, входящих в систему $\tilde{A}$. Тогда существует номер n_1 такой, что при $n \geq n_1$ будет выполняться соотношение

$$(E_1 \cap [r_n, 2r_n]) \setminus E_2 \neq \emptyset.$$

Пусть $R_n \in (E_1 \cap [r_n, 2r_n]) \setminus E_2$. Поскольку $R_n \in E_1$, то $v(R_n) \leq -2V(R_n)$. Поскольку $R_n \notin E_2$, то круг $C(R_n, 3\eta_1^2 R_n)$ не пересекается ни с одним из кругов набора A_2 . Кроме того, $R_n \notin F$. Если $z \in C(R_n, 3\eta_1^2 R_n) \setminus F$, то выполняется неравенство

$$|v(R_n) - v(z)| \leq M_{37} \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{3\eta_1}{t} \right) dt V(R_n).$$

Теперь, если η_1 таково, что

$$M_{37} \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{3\eta_1}{t} \right) dt \leq 1, \quad (8)$$

то при $z \in C(R_n, 3\eta_1^2 R_n) \setminus F$ будет выполняться неравенство $v(z) \leq -V(R_n)$. Пусть $z_0 \in C(R_n, \eta_1^2 R_n) \cap F$. Тогда для некоторого номера i $z_0 \in G_i$. Пусть $C(g_i, \alpha_i |g_i|)$ — круг

наименьшего радиуса, содержащий G_i . Тогда $\alpha_i < \eta_1^2$ и поэтому $\bar{G}_i \subset C(R_n, 3\eta_1^2 R_n)$. Поскольку различные множества G_i не пересекаются между собой, то $\partial G_i \cap G = \emptyset$, $\partial G_i \cap F = \emptyset$. Тогда при $z \in \partial G_i$ будет выполняться неравенство $v(z) \leq -V(R_n)$. По принципу максимума это неравенство будет выполняться при $z \in G_i$. В частности, $v(z_0) \leq -V(R_n)$. Таким образом, во всём круге $C(R_n, \eta_1^2 R_n)$ справедливо неравенство $v(z) \leq -V(R_n)$. Из этого следует, что при $\alpha < \eta_1^2$ выполняется неравенство

$$\underline{w}_s(\alpha) \leq - \int_1^{1+\alpha} t^s dt.$$

Поэтому $\underline{w}_s \leq -1$. Мы получили противоречие, и равенство $\underline{w}_s = -\infty$ доказано.

Пятый этап. На этом этапе мы докажем равенство $\underline{w}_s = \underline{h}(0)$. При этом доказательство достаточно получить в том случае, когда $\underline{h}(0) > -\infty$. В дальнейшем мы будем предполагать, что это неравенство выполнено. Доказательство будет в основном проходить по схеме четвёртого этапа. Пусть ε — произвольное строго положительное число. На этот раз множество E_1 мы определяем следующим образом

$$E_1 = \{r : v(r) < (\underline{h}(0) + \varepsilon)V(r)\}.$$

Заключение о свойствах множества E_1 остаётся прежним. Выбор числа η_1 на четвёртом этапе определялся из неравенства (8). Сейчас мы это неравенство заменим на неравенство

$$M_{37} \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{3\eta_1}{t} \right) dt \leq \varepsilon.$$

Тогда теми же рассуждениями, что и на четвёртом этапе, мы получаем, что в круге $C(R_n, \eta_1^2 R_n)$ при $n \geq n_1$ выполняется неравенство $v(z) \leq (\underline{h}(0) + 2\varepsilon)V(R_n)$. Откуда легко следует, что $\underline{w}_s \leq \underline{h}(0)$, $\underline{w}_s = \underline{h}(0)$.

Следующее утверждение, доказательство которого следует из рассуждений, проведенных на четвёртом и пятом этапах, мы выделим в виде отдельной теоремы.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $v(z)$ — субгармоническая функция внутри угла (θ_1, θ_2) , $\rho(r)$ — её формальный порядок, $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$. Пусть M — произвольное вещественное число, если $\underline{h}(\theta) = -\infty$, и $M = \underline{h}(\theta) + \varepsilon$, где ε — произвольное строго положительное число, если $\underline{h}(\theta) > -\infty$. Тогда существуют число $\delta > 0$ и последовательность R_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$, такие, что в круге $B(R_n e^{i\theta}, R_n)$ выполняется неравенство: $v(z) \leq MV(|z|)$.

Эта теорема является уточнением теоремы В.С. Азарина [1] о "ямах" и в существенном совпадает с теоремой 7 из [5].

Шестой этап. На этом этапе мы докажем утверждение 3 теоремы, когда $H = \underline{h}(0) > -\infty$. Пусть R_n и δ те числа, о которых идёт речь в теореме 8. Обозначим

$$E_3 = \{r : v(r) < (\underline{h}(0) - \varepsilon)V(r)\}.$$

По определению нижнего индикатора $l^*(E_3) = 0$. На множестве $[R_n, (1 + \delta)R_n] \setminus E_3$ выполняется неравенство $|v(r) - \underline{h}(0)V(r)| \leq \varepsilon V(r)$. Поэтому при $\alpha \in (0, \delta]$ имеем

$$\int_{R_n}^{(1+\alpha)R_n} |v(t) - \underline{h}(0)V(t)| dt \leq \varepsilon \int_{R_n}^{(1+\alpha)R_n} V(t) dt + \int_{R_n}^{(1+\alpha)R_n} \chi_{E_3}(t) |v(t) - \underline{h}(0)V(t)| dt.$$

Теперь из теорем 21 [18], 3 легко следует, что $\lim_{\alpha \rightarrow +0} w(\alpha)/\alpha = 0$.

Седьмой этап. На этом этапе мы докажем утверждение 3 теоремы при $H = h(\theta)$. В дальнейшем нам удобно считать, что v — субгармоническая функция в верхней полуплоскости и что $\theta = \pi/2$. Из определения индикатора следует, что существует функция $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ такая, что

$$I = \int_r^{(1+\Delta_1)r} \left| v(it) - h\left(\frac{\pi}{2}\right) V(t) \right| dt = \int_r^{(1+\Delta_1)r} \left(h\left(\frac{\pi}{2}\right) V(t) - v(it) \right) dt + \varepsilon(r)rV(r).$$

Пусть $h_\Delta(\theta)$ — индикатор функции v_Δ . Далее мы имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_r^{(1+\Delta_1)r} \left(h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h_\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) V(t) dt + \int_r^{(1+\Delta_1)r} h_\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right) (V(t) - V(r)) dt + \\ &+ \int_r^{(1+\Delta_1)r} \left(h_\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right) V(r) - v_\Delta(ir) \right) dt + \int_r^{(1+\Delta_1)r} (v_\Delta(ir) - v_\Delta(it)) dt + \\ &+ \int_r^{(1+\Delta_1)r} (v_\Delta(it) - v(it)) dt + \varepsilon(r)rV(r) = \sum_{k=1}^6 b_k. \end{aligned}$$

Так как $v(it) \leq v_\Delta(it)$, то $h\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq h_\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $b_1 \leq 0$. Из теоремы 21 [18] следует, что $b_2 \leq M_{38}\Delta_1^2 rV(r)$. Из определения индикатора следует, что существует неограниченное множество E такое, что $b_3 = \varepsilon_1(r)rV(r)$, где $\varepsilon_1(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$, $r \in E$. Далее пусть μ_1 — мера, введенная в теореме 5, а M_{28} — константа из этой же теоремы. Мы выбираем

$$\Delta = \Delta_1 \sqrt{\frac{\ln_2(3/\Delta_1)}{\ln(3/\Delta_1)}}, \quad \eta = \frac{1}{M_{28}} \Delta_1 \sqrt{\ln_2 \frac{3}{\Delta_1} \ln \frac{3}{\Delta_1}}.$$

Далее мы строим исключительное множество F для меры μ_1 с помощью функций $A(r) = V(r)$, $\varphi(\alpha) = M_4 \eta / \alpha$ (M_4 — константа из теоремы 1). На третьем этапе доказательства теоремы 5 мы показали, что при $z, z + hz \notin F$, $z \in C(ir, \delta r/2)$, $|h| < \delta/4$, выполняется неравенство

$$|v_\Delta(z + hz) - v_\Delta(z)| \leq M_{35} \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{|h|}{u\eta} \right) du V(r).$$

Согласно теореме 6 при $r \in E$ отрезок $[ir, i(1 + \Delta_1)r]$ не пересекается с множеством F . Поэтому

$$\begin{aligned} |b_4| &\leq M_{35} \int_r^{(1+\Delta_1)r} \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{M_{28}}{\sqrt{\ln_2(3/\Delta_1) \ln(3/\Delta_1) u}} \right) du dt V(r) = \\ &= M_{35} M_{28} r V(r) \frac{\Delta_1}{\sqrt{\ln_2(3/\Delta_1) \ln(3/\Delta_1)}} \int_0^{\sqrt{\ln_2(3/\Delta_1) \ln(3/\Delta_1)}/M_{28}} \ln \left(1 + \frac{1}{s} \right) ds \leq \\ &\leq M_{35} M_{28} r V(r) \frac{\Delta_1}{\sqrt{\ln_2(3/\Delta_1) \ln(3/\Delta_1)}} \left(\int_0^1 \ln \left(1 + \frac{1}{s} \right) ds + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \ln_2 \frac{3}{\Delta_1} + \frac{1}{2} \ln_3 \frac{3}{\Delta_1} - \ln M_{28} \Big) \leq M_{39} r V(r) \Delta_1 \sqrt{\frac{\ln_2(3/\Delta_1)}{\ln(3/\Delta_1)}}.$$

Согласно теореме 4 выполняется неравенство

$$|b_5| \leq M_{25} r V(r) \Delta = M_{25} r V(r) \Delta_1 \sqrt{\frac{\ln_2(3/\Delta_1)}{\ln(3/\Delta_1)}}.$$

Из полученных оценок следуют утверждения 3 и 4 теоремы при $H = h(\theta)$.

Восьмой этап. Нам осталось доказать утверждение 4 теоремы при $\underline{h}(\theta) < H < h(\theta)$. Мы по-прежнему считаем, что $v(z)$ — есть субгармоническая функция в верхней полуплоскости, $\rho(r)$ — её формальный порядок, причём $\rho \in (0, 1)$, $\theta = \pi/2$. На этом этапе мы докажем, что если число H удовлетворяет написанным выше условиям, то для любого достаточно малого строго положительного числа Δ существует последовательность r_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty$, такая, что $v_\Delta(ir_n) = HV(r_n)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и такое, что

$$\underline{h}\left(\frac{\pi}{2}\right) < H - 8\varepsilon < H + 8\varepsilon < h\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Пусть $\Delta_1 \in (0, \exp(-e))$, и по-прежнему

$$\Delta = \Delta_1 \sqrt{\frac{\ln_2(3/\Delta_1)}{\ln(3/\Delta_1)}}.$$

Тогда из теоремы 4 вытекает, что

$$\int_R^{(1+\Delta_1)R} |v(it) - v_\Delta(it)| dt \leq M_{25} \Delta R V(R), \quad R \in E_1. \quad (9)$$

где E_1 — множество, определенное в этой теореме.

Согласно уже доказанному утверждению 3 теоремы при $H = h(\pi/2)$ получаем, что для любого достаточно малого Δ_1 существует последовательность R_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$, такая, что

$$\int_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v(it) - h\left(\frac{\pi}{2}\right) V(t)| dt \leq \varepsilon \Delta_1 R_n V(R_n).$$

Причем, как следует из приведенного доказательства последовательность R_n можно выбрать из множества E_1 . Тогда

$$\int_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v_\Delta(it) - h\left(\frac{\pi}{2}\right) V(t)| dt \leq \Delta_1 \left(\varepsilon + M_{25} \frac{\Delta}{\Delta_1} \right) R_n V(R_n) \leq 2\varepsilon \Delta_1 R_n V(R_n),$$

если Δ_1 достаточно малое число.

Пусть

$$B = \{t : t \in [R_n, (1 + \Delta_1)R_n], \quad \left| v_\Delta(it) - h\left(\frac{\pi}{2}\right) V(t) \right| > 4\varepsilon V(R_n)\}.$$

Тогда $\text{mes } B < \Delta_1 R_n/2$. Поэтому при некотором $t \in [R_n, (1 + \Delta_1)R_n]$ выполняется неравенство

$$\left| v_\Delta(it) - h\left(\frac{\pi}{2}\right) V(t) \right| \leq 4\varepsilon V(R_n).$$

Из этого следует, что существует последовательность $R_{2,n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2,n} = \infty$, такая, что

$$v_{\Delta}(iR_{2,n}) \geq (H + 3\varepsilon)V(R_{2,n}). \quad (10)$$

По теореме 8 существуют число $\delta > 0$ и последовательность $R_{3,n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{3,n} = \infty$, такие, что при $z \in C(iR_{3,n}, \delta R_{3,n})$ выполняется неравенство $v(z) < (H - 8\varepsilon)V(|z|)$. Предположим дополнительно, что $v(z) \in \text{SHF}(\rho(r))$. В этом случае множество E_1 , о котором идет речь в теореме 4, можно считать равным лучу $[1, \infty)$. Если теперь написать неравенство, аналогичное (9), с $R = R_{3,n}$, то из него можно получить, что существует последовательность $R_{1,n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{1,n} = \infty$, такая, что

$$v_{\Delta}(iR_{1,n}) \leq (H - 3\varepsilon)V(R_{1,n}). \quad (11)$$

Как следует из теоремы 2, функции $v(z)$ и $v_{\Delta}(z)$ принадлежат или не принадлежат классу $\text{SHF}(\rho(r))$ одновременно. Если $v_{\Delta}(z) \notin \text{SHF}(\rho(r))$, то нижний индикатор этой функции в точке $\pi/2$ равен минус-бесконечности. В этом случае условие (11), очевидно, выполняется. Функция $v_{\Delta}(it)/V(t)$ является непрерывной на оси $[1, \infty)$. Теперь из условий (10), (11) и теоремы о промежуточном значении для непрерывных функций следует, что существует такая последовательность R_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$, что $v_{\Delta}(iR_n) = HV(R_n)$.

Девятый этап. На этом этапе мы закончим доказательство утверждения 4 теоремы. Пусть R_n — та последовательность, которая построена на предыдущем этапе,

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ z : qR_n \leq |z| \leq \frac{R_n}{q}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4} \right\},$$

$$D_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ z : \frac{qR_n}{2} \leq |z| \leq \frac{2R_n}{q}, \quad \frac{\pi}{8} \leq \arg z \leq \frac{7\pi}{8} \right\}.$$

Пусть μ_1 — риссовская мера функции $v_{\Delta}(z)$, а μ_2 — ограничение меры μ_1 на множество D_1 . Тогда по теореме 2 $\rho(r)$ будет формальным порядком меры μ_2 и функции

$$v_1(z) = \iint \ln \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu_2(\zeta),$$

причём функция $v_2(z) = v_{\Delta}(z) - v_1(z)$ при $z, z + hz \in D$ будет удовлетворять неравенству

$$|v_2(z + hz) - v_2(z)| \leq M_{39}|h|V(r).$$

Пусть M_4 и M_6 — те величины, о которых идёт речь в теореме 1. Для меры μ_2 построим исключительное множество F с помощью функций $A(r) = V(r)$, $\varphi(\alpha) = M_4\alpha/\eta$. Тогда по теореме 1 выполняются соотношения $l^*(A) \leq \eta$,

$$|v_1(z + hz) - v_1(z)| \leq M_6V(r) \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{|h|}{\eta t} \right) dt, \quad z, z + hz \notin F.$$

Таким образом, существует величина M_{40} , не зависящая от η , такая, что при $z, z + hz \in D \setminus F$ будет выполняться неравенство

$$|v_{\Delta}(z + hz) - v_{\Delta}(z)| \leq M_{40}V(r) \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{|h|}{\eta t} \right) dt.$$

По-прежнему считаем

$$\Delta = \Delta_1 \sqrt{\frac{\ln_2(3/\Delta_1)}{\ln(3/\Delta_1)}}, \quad \eta = \frac{1}{M_{28}} \Delta_1 \sqrt{\ln_2 \frac{3}{\Delta_1} \ln \frac{3}{\Delta_1}}.$$

Тогда из теоремы 6 следует, что существуют числа Δ_0 и n_0 такие, что при $\Delta_1 \in (0, \Delta_0)$, $n > n_0$ сегменты $[iR_n, i(1 + \Delta_1)R_n]$ не будут пересекаться с множеством F . Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v(it) - HV(t)| dt \leq \int_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v(it) - v_\Delta(it)| dt + \\ & + \int_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |v_\Delta(it) - v_\Delta(iR_n)| dt + |H| \int_{R_n}^{(1+\Delta_1)R_n} |V(R_n) - V(t)| dt. \end{aligned}$$

Теперь, повторяя некоторые из рассуждений пункта 7 получим

$$w(\Delta_1) \leq M_{41} \Delta_1 \sqrt{\frac{\ln_2(3/\Delta_1)}{\ln(3/\Delta_1)}}.$$

Теорема полностью доказана.

Отметим, что при $H \in (\underline{h}(\theta), h(\theta)]$ мы доказали, что величина $w(\alpha)$ допускает оценку

$$w(\alpha) \leq M\alpha \sqrt{\frac{\ln_2(1/\alpha)}{\ln(1/\alpha)}}.$$

Для случая $H = \underline{h}(\theta)$ мы получили только соотношение $\lim_{\alpha \rightarrow 0} w(\alpha)/\alpha = 0$. Отметим, что в этом случае никакой иной оценки для $w(\alpha)$ в классе всех субгармонических функций полужормального порядка $\rho(r)$ не существует. Соответствующий пример будет построен.

6. Пример

Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и пусть $\gamma(u)$ строго возрастающая функция на сегменте $[0, \alpha]$, дифференцируемая на полуинтервале $(0, \alpha]$, $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = +\infty$ и такая, что сходится интеграл

$$\int_0^\alpha \ln \left(\frac{1}{t} \right) d\gamma(t).$$

Сходимость последнего интеграла эквивалентна сходимости интеграла

$$\int_0^\alpha \frac{\gamma(t)}{t} dt.$$

Пусть $\rho \in (0, 1)$. Пусть r_n , $r_1 \geq 1$, — быстро возрастающая числовая последовательность, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{k=1}^{n-1} r_k^\rho \leq r_n^{\rho/2}, \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k^{\rho-1} \leq 1/r_n.$$

Пусть, наконец,

$$\varphi_n(s) = r_n^\rho \gamma \left(\frac{s}{r_n} \right).$$

Обозначим

$$v_n(z) = \int_0^{\alpha r_n} \ln \left| 1 - \frac{z}{r_n + is} \right| d\varphi_n(s) = r_n^\rho \int_0^\alpha \ln \left| 1 - \frac{z}{r_n(1 + iu)} \right| d\gamma(u),$$

$$v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z).$$

Исследуем некоторые свойства функции $v(z)$. Пусть q — произвольное число из интервала $(0, 1)$ и пусть $r = |z| \in [qr_n, r_n/q]$. Пусть $m < n$. Тогда

$$v_m(z) = r_m^\rho \int_0^\alpha \ln \left| 1 - \frac{z}{r_m(1 + iu)} \right| d\gamma(u) = (1 + o(1)) r_m^\rho \gamma(\alpha) \ln r \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$\left| \sum_{m=1}^{n-1} v_m(z) \right| \leq A_1 r^{\rho/2} \ln r.$$

При $m > n$ выполняется неравенство

$$|v_m(z)| \leq \gamma(\alpha) r_m^{\rho-1} r, \quad \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} v_m(z) \right| \leq \gamma(\alpha) \frac{r}{r_n} \leq A_2.$$

Таким образом, при $r \in [qr_n, r_n/q]$ справедливо представление

$$v(z) = v_n(z) + \psi_n(z), \quad |\psi_n(z)| \leq A_1 r^{\rho/2} \ln r + A_2. \quad (12)$$

Изучим динамическую систему Азарина: $v_t(z) = v(tz)/t^\rho$, $t \in (0, \infty)$. Для этого зафиксируем t и рассмотрим функцию

$$\frac{v_n(tr_n z)}{t^\rho r_n^\rho} = \frac{1}{t^\rho} \int_0^\alpha \ln \left| 1 - \frac{tz}{1 + iu} \right| d\gamma(u) = a_t(z).$$

Из соотношения (12) следует, что для любого $t \in (0, \infty)$ функция $a_t(z)$ принадлежит предельному множеству Азарина $Fr(v)$ функции v . Мы используем определение Азарина [1] предельного множества $Fr(v)$ субгармонической функции v . Очевидно, что если K — компакт, не содержащий нуля, то $a_t(z) \rightarrow 0$, если $t \rightarrow 0$ или $t \rightarrow \infty$ равномерно на компакте K . Можно также показать, что множество функций $a_t(z)$, $t \in (0, \infty)$ и 0 совпадает с $Fr v$. Детали рассуждения будут приведены позже по другому поводу.

Обозначим

$$\varphi(t) = a_t(1) = \frac{1}{2t^\rho} \int_0^\alpha \ln \frac{(t-1)^2 + u^2}{1 + u^2} d\gamma(u).$$

Теорема Азарина [1] утверждает, что если $h(\theta)$ и $\underline{h}(\theta)$ — индикатор и нижний индикатор субгармонической функции v , то выполняются равенства

$$h(\theta) = \sup_{u \in Fr v} u(e^{i\theta}), \quad \underline{h}(\theta) = \inf_{u \in Fr v} u(e^{i\theta}).$$

По теореме Азарина для индикаторов введенной нами функции v выполняются равенства

$$h(0) = \sup_{t \in (0, \infty)} \varphi(t), \quad \underline{h}(0) = \inf_{t \in (0, \infty)} \varphi(t).$$

В частности, $\varphi(1) \in [\underline{h}(0), h(0)]$. Легко видеть, что $\varphi(+0) = \varphi(2) = 0$ и что $\varphi(t) < 0$ при $t \in (0, 2)$, $\varphi(t) > 0$ при $t > 2$. Имеем

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{t^{\rho+1}} \int_0^\alpha \left(-\rho \ln \frac{(t-1)^2 + u^2}{1+u^2} + \frac{2t(t-1)}{(t-1)^2 + u^2} \right) d\gamma(u).$$

При $t \in (1, 2)$ оба слагаемых в скобках положительны, и поэтому функция $\varphi(t)$ возрастает на сегменте $[1, 2]$. Так как $\gamma'(+0) = +\infty$, то, применяя рассуждения, связанные с доказательством теоремы Фату [14, глава 1, пункт D3], можно доказать, что $\varphi'(1+0) = +\infty$, $\varphi'(1-0) = -\infty$. Таким образом, точка 1 есть, по крайней мере, точка локального минимума функции $\varphi(t)$. Мы не нашли простого доказательства, что точка 1 есть точка минимума функции $\varphi(t)$ на оси $(0, \infty)$. В дальнейшем, применяя теорему 7, мы докажем это утверждение. Всюду в дальнейшем предполагается, что $\beta \in (0, \alpha]$.

Рассмотрим величины

$$w(\beta) = \liminf_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{1+\rho}} \int_r^{(1+\beta)r} |v(t) - \varphi(1)t^\rho| dt, \quad w_1(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n^{1+\rho}} \int_{r_n}^{(1+\beta)r_n} |v(t) - \varphi(1)t^\rho| dt.$$

Из дальнейшего будет видно, что второй из написанных выше пределов существует. Из соотношения (12) следует, что

$$\begin{aligned} w_1(\beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n^{1+\rho}} \int_{r_n}^{r_n(1+\beta)} |v_n(t) - \varphi(1)t^\rho| dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_n^{1+\rho}} \int_{r_n}^{r_n(1+\beta)} \left| r_n^\rho \int_0^\alpha \ln \left| 1 - \frac{t}{r_n(1+iu)} \right| d\gamma(u) - \frac{1}{2} t^\rho \int_0^\alpha \ln \frac{u^2}{1+u^2} d\gamma(u) \right| dt. \end{aligned}$$

Сделаем в интеграле замену $t = r_n + \tau r_n$. Мы получим

$$\begin{aligned} w_1(\beta) &= \int_0^\beta \left| \int_0^\alpha \ln \left| 1 - \frac{1+\tau}{1+iu} \right| d\gamma(u) - \frac{1}{2} (1+\tau)^\rho \int_0^\alpha \ln \frac{u^2}{u^2+1} d\gamma(u) \right| d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\beta \left| (1+\tau)^\rho \int_0^\alpha \ln \frac{1+u^2}{u^2} d\gamma(u) - \int_0^\alpha \ln \frac{1+u^2}{\tau^2+u^2} d\gamma(u) \right| d\tau. \end{aligned}$$

Выражение под знаком модуля имеет вид

$$((1+\tau)^\rho - 1) \int_0^\alpha \ln \frac{1+u^2}{u^2} d\gamma(u) + \int_0^\alpha \ln \frac{\tau^2+u^2}{u^2} d\gamma(u)$$

и поэтому положительно при $\tau > 0$. Таким образом,

$$w_1(\beta) = \frac{1}{2} \int_0^\beta \int_0^\alpha \left[(1+\tau)^\rho \ln \frac{1+u^2}{u^2} - \ln \frac{1+u^2}{\tau^2+u^2} \right] d\gamma(u) d\tau. \quad (13)$$

Из определений $w(\beta)$ и $w_1(\beta)$ следует, что

$$w(\beta) \leq w_1(\beta). \quad (14)$$

Пусть $t_k, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$, — такая последовательность, что

$$w(\beta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k^{1+\rho}} \int_{t_k}^{(1+\beta)t_k} |v(t) - \varphi(1)t^\rho| dt.$$

Прореживая, если нужно эту последовательность можно добиться того, что на каждом из полуинтервалов $[r_n, r_{n+1})$ будет находится не более одной точки t_k . Прореживая, если нужно, последовательность t_k ещё раз можно добиться чтобы любая точка t_k находилась бы только в одном из множеств $\left[r_n, \sqrt{r_n r_{n+1}}\right], (\sqrt{r_n r_{n+1}}, r_{n+1})$ (разумеется, каждому k отвечает свое n). Так как оба случая изучаются одинаково, то можно дополнительно предположить, что для каждого k однозначно определяется номер n_k такой, что $t_k \in \left[r_{n(k)}, \sqrt{r_{n(k)} r_{n(k)+1}}\right]$, причём разным k отвечают различные n_k . Пусть

$$s = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k}{r_{n_k}}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$s = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k}{r_{n_k}}.$$

Очевидно, что $s \in [1, \infty]$. Докажем, что $s < \infty$. Предположим, что $s = \infty$. Имеем

$$\left| \sum_{m=1}^{n_k-1} v_m(z) \right| \leq A_1 r^{\rho/2} \ln r, \quad r \geq r_{n_k},$$

$$\frac{1}{|z|^\rho} \left| \sum_{m=n_k+1}^{\infty} v_m(z) \right| \leq \gamma(\alpha) \frac{r^{1-\rho}}{r_{n_k+1}^{1-\rho}} + \frac{r^{1-\rho}}{r_{n_k+1}}, \quad r \in [r_{n_k}, \sqrt{r_{n_k} r_{n_k+1}}].$$

Из полученных оценок следует, что

$$\begin{aligned} w(\beta) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k^{1+\rho}} \int_{t_k}^{(1+\beta)t_k} |v_{n_k}(t) - \varphi(1)t^\rho| dt = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k^{1+\rho}} \int_{t_k}^{(1+\beta)t_k} \left| r_{n_k}^\rho \int_0^\alpha \ln \left| 1 - \frac{t}{r_{n_k}(1+iu)} \right| d\gamma(u) - \varphi(1)t^\rho \right| dt = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\beta \left| \int_0^\alpha \left(\frac{r_{n_k}}{t_k} \right)^\rho \ln \left| 1 - \frac{t_k}{r_{n_k}} \frac{1+\tau}{1+iu} \right| d\gamma(u) - \varphi(1)(1+\tau)^\rho \right| d\tau. \end{aligned}$$

Учитывая равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{n_k}}{t_k} = 0,$$

получим

$$w(\beta) = \int_0^\beta |\varphi(1)|(1+\tau)^\rho d\tau = \frac{1}{2} \int_0^\beta \int_0^\alpha (1+\tau)^\rho \ln \frac{1+u^2}{u^2} d\gamma(u) d\tau.$$

Сравнивая с (13), получим $w(\beta) > w_1(\beta)$. Это противоречит (14). Таким образом случай, $s = \infty$ невозможен. Покажем что случай $s \in (1, \infty)$ также невозможен. В противном случае из соотношения (12) следует, что

$$\begin{aligned} w(\beta) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k^{1+\rho}} \int_{t_k}^{t_k(1+\beta)} |v_{n_k}(t) - \varphi(1)t^\rho| dt = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k^{1+\rho}} \int_{t_k}^{t_k(1+\beta)} \left| r_{n_k}^\rho \int_0^\alpha \ln \left| 1 - \frac{t}{r_{n_k}(1+iu)} \right| d\gamma(u) - \varphi(1)t^\rho \right| dt = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\beta \left| \left(\frac{r_{n_k}}{t_k} \right)^\rho \int_0^\alpha \ln \left| 1 - \frac{t_k}{r_{n_k}} \frac{1+\tau}{1+iu} \right| d\gamma(u) - \varphi(1)(1+\tau)^\rho \right| d\tau = \\ &= \int_0^\beta \left| \frac{1}{s^\rho} \int_0^\alpha \ln \left| 1 - \frac{s(1+\tau)}{1+iu} \right| d\gamma(u) - \varphi(1)(1+\tau)^\rho \right| d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\beta \left| \int_0^\alpha \left[(1+\tau)^\rho \ln \frac{1+u^2}{u^2} - \frac{1}{s^\rho} \ln \frac{1+u^2}{(s-1+s\tau)^2+u^2} \right] d\gamma(u) \right| d\tau. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках совпадает по знаку с выражением

$$\begin{aligned} (1+\tau)^\rho s^\rho \ln \frac{1+u^2}{u^2} - \ln \frac{1+u^2}{(s-1+s\tau)^2+u^2} &= \\ &= (s^\rho(1+\tau)^\rho - 1) \ln \frac{1+u^2}{u^2} + \ln \frac{(s-1+s\tau)^2+u^2}{u^2} \end{aligned}$$

и поэтому положительно. Таким образом, мы получаем

$$w(\beta) = \frac{1}{2} \int_0^\beta \int_0^\alpha \left((1+\tau)^\rho \ln \frac{1+u^2}{u^2} - \frac{1}{s^\rho} \ln \frac{1+u^2}{(s-1+s\tau)^2+u^2} \right) d\gamma(u) d\tau.$$

Вместе с (13) это даёт

$$w(\beta) - w_1(\beta) = \frac{1}{2} \int_0^\beta \int_0^\alpha \left(\ln \frac{1+u^2}{\tau^2+u^2} - \frac{1}{s^\rho} \ln \frac{1+u^2}{(s-1+s\tau)^2+u^2} \right) d\gamma(u) d\tau.$$

Подынтегральная функция совпадает по знаку с функцией

$$\begin{aligned} s^\rho \ln \frac{1+u^2}{\tau^2+u^2} - \ln \frac{1+u^2}{(s-1+s\tau)^2+u^2} &= (s^\rho - 1) \ln \frac{1+u^2}{\tau^2+u^2} + \ln \frac{(s-1+s\tau)^2+u^2}{\tau^2+u^2} = \\ &= (s^\rho - 1) \ln \frac{1+u^2}{\tau^2+u^2} + \ln \left(1 + \frac{(s-1+(s+1)\tau)(s-1)(1+\tau)}{\tau^2+u^2} \right). \end{aligned}$$

Так как $s > 1$, $\tau \in [0, \beta] \subset [0, 1]$, то написанная выше функция строго положительна. Это даёт $w(\beta) - w_1(\beta) > 0$, что противоречит (14). Таким образом, осталась единственная возможность $s = 1$. Это даёт

$$w(\beta) = \frac{1}{2} \int_0^\beta \int_0^\alpha \left[(1 + \tau)^\rho \ln \frac{1 + u^2}{u^2} - \ln \frac{1 + u^2}{\tau^2 + u^2} \right] d\gamma(u) d\tau,$$

$$w(\beta) = w_1(\beta).$$

Таким образом, функция $w(\beta)$ вычислена. Далее имеем

$$\begin{aligned} w(\beta) &\geq \frac{1}{2} \int_0^\beta \int_0^\alpha \ln \frac{\tau^2 + u^2}{u^2} d\gamma(u) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^\alpha u \int_0^{\beta/u} \ln(1 + \tau_1^2) d\tau_1 d\gamma(u) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\alpha u \left(\frac{\beta}{u} \ln \left(1 + \frac{\beta^2}{u^2} \right) - 2 \frac{\beta}{u} + 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta}{u} \right) d\gamma(u) \geq \\ &\geq \frac{\beta}{2} \int_0^\alpha \ln \left(1 + \frac{\beta^2}{u^2} \right) d\gamma(u) \geq \frac{\beta}{2} \int_0^\beta \ln \left(1 + \frac{\beta^2}{u^2} \right) d\gamma(u) \geq \\ &\geq \beta \int_0^\beta \ln \frac{\beta}{u} d\gamma(u) = \beta \int_0^\beta \frac{\gamma(u)}{u} du. \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть $\varepsilon(\beta)$ произвольная положительная функция, сходящаяся к нулю при $\beta \rightarrow 0$. Ограничения, наложенные на функцию γ , не исключают возможность выполнения неравенства

$$\int_0^\beta \frac{\gamma(u)}{u} du \geq \varepsilon(\beta) \quad (16)$$

в некоторой правой окрестности нуля. В частности, если $\varepsilon(\beta) = (M + 1) \sqrt{\frac{\ln_2(1/\beta)}{\ln(1/\beta)}}$, где M — константа из теоремы 7, то тогда неравенства (15), (16), соотношение $\varphi(1) \in (\underline{h}(0), h(0)]$ и теорема 7 вместе дают противоречие. Тем самым, если функция γ удовлетворяет неравенству (16) с написанной выше функцией $\varepsilon(\beta)$, то $\underline{h}(0) = \varphi(1) = \min_{t \in (0, \infty)} \varphi(t)$. Кроме того, неравенства (15) и (16) показывают, что при $H = \underline{h}(\theta)$ в теореме 7 условие $w(\alpha) \leq \varepsilon(\alpha)\alpha$ не выполняется ни для какой функции $\varepsilon(\alpha)$, сходящейся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, в классе всех субгармонических функций, удовлетворяющих условиям теоремы 7.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азарин В.С. Об асимптотическом поведении субгармонических функций // Матем. сб. 1979. Т. 108, № 2. С. 147–167.
2. Говоров Н.В. Об индикаторе функций нецелого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162, № 3. С. 495–498.
3. Говоров Н.В. Об индикаторе функций целого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости // Докл. АН СССР. 1967. Т. 172, № 4. С. 763–766.

4. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970. 592 с.
5. Гольдберг А. А., Островский И. В. Индикаторы целых функций конечного порядка, представимых рядом Дирихле // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, № 3. С. 144–170.
6. Гришин А. Ф. О регулярности роста субгармонических функций. I // Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения". 1968. Вып. 6. С. 3–29.
7. Гришин А. Ф. О регулярности роста субгармонических функций. II // Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения". 1968. Вып. 7. С. 59–84.
8. Гришин А. Ф. О регулярности роста субгармонических функций. III // Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения". 1969. Вып. 8. С. 126–135.
9. Гришин А. Ф. Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. I // Матем. физика, анализ, геом. 1994. Т. 1, № 2. С. 193–215.
10. Гришин А. Ф. Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций. II // Матем. физика, анализ, геом. 1995. Т. 2, № 2. С. 177–193.
11. Кондратюк А. А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста // Матем. сб. 1978. Т. 106, № 3. С. 386–408.
12. Кондратюк А. А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. II // Матем. сб. 1980. Т. 113, № 1. С. 118–132.
13. Кондратюк А. А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. III // Матем. сб. 1983. Т. 120, № 3. С. 331–343.
14. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984. 368 с.
15. Левин Б. Я. О росте целой функции по лучу и о распределении ее нулей по аргументам // Матем. сб. 1937. Т. 2(44), № 6. С. 1097–1142.
16. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.
17. Малютин К. Г. Ряды Фурье и δ -субгармонические функции конечного γ -типа в полуплоскости // Матем. сб. 2001, Т. 192, № 6. С. 51–70.
18. Малютин К. Г., Кабанко М. В., Малютин Т. И. Интегралы и индикаторы субгармонических функций. I // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, Вып. 2. С. 272–303.
19. Малютин К. Г., Садик Н. 2001 Дельта-субгармонические функции вполне регулярного роста в полуплоскости // Доклады РАН. 2001. Т. 380, № 3. С. 1–3.
20. Bernstein V. Sopra una proposizione relativa alla crescita delle funzioni holomorfe // Ann. Scuola norm sup. Pisa. 1933. Vol 2, No 2. P. 381–399.
21. Fedorov M. A., Grishin A. F. Some Questions of the Nevanlinna Theory for the Complex Half-Plane // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 1998. Vol 1, No 3. P. 1–49.
22. Pfluger A. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen. I // Comm. Math. Helv. 1938. Vol. 11. P. 180–213.
23. Pfluger A. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen. II // Comm. Math. Helv. 1939. Vol. 12. P. 25–69.

REFERENCES

1. Azarin, V. S. 1980, "On the asymptotic behavior of subharmonic functions of finite order", *Math. USSR-Sb.*, vol. 36, no. 2, pp. 135–154.
2. Govorov, N. V. 1965, "On the indicator of functions of non-integer order, analytic and completely regular growth in the half-plane", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 162, no. 3, pp. 495–498.
3. Govorov, N. V. 1967, "On the indicator of functions of integer order, analytic and completely regular growth in the half-plane", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 172, no. 4, pp. 763–766.
4. Gol'dberg, A. A. & Ostrovskii, I. V. 1970, *Value Distribution of Meromorphic Functions*. M., Nauka.
5. Gol'dberg, A. A. & Ostrovskii, I. V. 1991, "Indicators of entire functions of finite order that can be represented by Dirichlet series", *Leningrad Mathematical Journal*, vol. 2, no 3, pp. 589–612.
6. Grishin, A. F. 1968, "On regularity of the growth of subharmonic functions. I", *Teor. funktsii, funkts. analiz i ih pril.*, vol. 6, pp. 3–29.
7. Grishin A. F. 1968., "On regularity of the growth of subharmonic functions. II", *Teor. funktsii, funkts. analiz i ih pril.*, vol. 7, pp. 59–84.
8. Grishin, A. F. 1969, "On regularity of the growth of subharmonic functions. III", *Teor. funktsii, funkts. analiz i ih pril.*, vol. 8, pp. 126–135.
9. Grishin, A. F. 1994, "Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions. I", *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, vol. 1, no 2, pp. 193–215.
10. Grishin, A. F. 1995, "Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions. II", *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, vol. 2, no 2, pp. 177–193.
11. Kondratyuk, A. A. 1979, "The Fourier series method for entire and meromorphic functions of completely regular growth", *Math. USSR-Sb.*, vol. 35, no 1, pp. 63–84.
12. Kondratyuk, A. A. 1982, "The Fourier series method for entire and meromorphic functions of completely regular growth. II", *Math. USSR-Sb.*, vol. 41, no 1, pp. 101–113.
13. Kondratyuk, A. A. 1984, "The Fourier series method for entire and meromorphic functions of completely regular growth. III", *Math. USSR-Sb.*, vol. 48, no 2, pp. 327–338.
14. Koosis, Paul. 1980, *Introduction to H_p Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge – London – New York – New Rochelle – Melbourne – Sydney.
15. Levin, B. Ya. 1937, "On the growth of an entire function along a ray, and the distribution of its zeros with respect to their arguments", *Math. USSR-Sb.*, vol. 2(44), no. 6, pp. 1097–1142.
16. Levin, B. Ya. 1980, *Distribution of zeros of entire functions*. Providence, RI: Amer. Math. Soc.
17. Malyutin, K. G. 2001, "Fourier series and δ -subharmonic functions of finite γ -type in a half-plane", *Sb. Math.*, vol. 192, no 6, pp. 843–861.
18. Malyutin, K. G., Kabanko, M. V. & Malyutina, T. I. 2018, "Integrals and indicators of subharmonic functions. I", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no 2, pp. 272–303.

19. Malyutin, K. G., Sadik, N. 2001, "Delta-subharmonic functions of a completely regular growth in the half-plane", *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 380, no. 3, pp. 1–3.
20. Bernstein, V. 1933, "Sopra una proposizione relativa alla crescita delle funzioni holomorfe", *Ann. Scuola norm sup. Pisa*, vol 2, no 2, pp. 381–399.
21. Fedorov, M. A. & Grishin, A. F. 1998, "Some Questions of the Nevanlinna Theory for the Complex Half-Plane", *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, vol. 1, no. 3, pp. 1–49.
22. Pfluger, A. 1938, "Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen I", *Comm. Math. Helv.*, vol. 11, pp. 180–213.
23. Pfluger, A. 1939, "Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen II", *Comm. Math. Helv.*, vol. 12, pp. 25–69.

Получено 15.11.2019 г.

Принято в печать 20.12.2019 г.