ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-226-235

Об оценках линейных форм от логарифмов некоторых рациональных чисел¹

М. Ю. Лучин, В. Х. Салихов, Е. С. Золотухина

Салихов Владислав Хасанович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики, Брянский государственный технический университет (г. Брянск).

e-mail: svdh@rambler.ru

Золотухина Екатерина Сергеевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Брянский государственный технический университет (г. Брянск).

eszolotukhina@mail.ru

Лучин Михаил Юрьевич — Брянский государственный технический университет (г. Брянск).

m.y.luchin@mail.ru

Аннотация

В настоящее время одним из широко применяемых подходов при нахождении оценок показателя иррациональности является использование симметризованных интегралов. Они рассматривались и ранее (см., например, [1]), но наиболее динамичное развитие это направление приобрело в работах В. Х. Салихова и его учеников (см., например, [2]–[5]).

Отправной точкой стала статья В. Х. Салихова [6], в которой была усилена оценка меры иррациональности числа $\ln 3$: $\mu(\ln 3) \leq 5.125$. В 2014 г. К. Ву и Л. Ванг в [7] улучшили результат В. Х. Салихова, получив оценку $\mu(\ln 3) \leq 5.1163051$. В их работе применялись симметризованные многочлены первой степени. С помощью интегральной конструкции, основанной на симметризованных многочленах первой и второй степени, И. В. Бондарева, М. Ю. Лучин и В. Х. Салихов в [8], уточнили предыдущий результат К. Ву и Л. Ванга: $\mu(\ln 3) \leq 5.116201$.

Впервые квадратичные симметризованные многочлены были использованы в работе И. В. Бондаревой, М. Ю. Лучина и В. Х. Салихова [9]. Используя подобные многочлены, но рассматривая комплексный интеграл (модифицированный интеграл Е.Б.Томашевской) В. Х. Салихов и Е. С. Золотухина в [10] незначительно усилили оценку меры иррациональности числа $\ln \frac{5}{3}$: $\mu(\ln \frac{5}{3}) \leq 5.119417\dots$. Предыдущие результаты принадлежали Е. Б. Томашевской [11], Е. С. Золотухиной [12], К. Ваананену, А. Хеймонену и Т. Матала-ахо [13].

Цель данной работы — получить новые оценки совместных приближений чисел $1, \ln 2, \ln 3, \ln 5$ и чисел $1, \ln 2, \ln 3, \ln 5, \ln 7$, основываясь на интегральной конструкции, содержащей многочлены первой и второй степени.

Ключевые слова: мера иррациональности, совместные приближения, симметризованные многочлены.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

М. Ю. Лучин, В. Х. Салихов, Е. С. Золотухина. Об оценках линейных форм от логарифмов некоторых рациональных чисел // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 226–235.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00296 А

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-226-235

On estimate of irrationality measure of the logarithms of some rational numbers

M. Y. Luchinn, V. H. Salikhov, E. S. Zolotukhina

Salikhov Vladislav Khasanovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Docent, Professor of department “Higher mathematics”, Bryansk State technical university (Bryansk).

e-mail: svdh@rambler.ru

Zolotukhina Ekaterina Sergeevna — candidate of Physico-mathematical Sciences, docent of department “Higher mathematics”, Bryansk State technical university (Bryansk).

e-mail: eszolotukhina@mail.ru

Luchin Mikhail Yurevich — Bryansk State technical university (Bryansk).

e-mail: m.y.luchin@mail.ru

Abstract

At present the use of symmetrized integrals is one of the approaches to obtain estimates of irrationality measures. They were considered in the past (see [1]), but the most dynamic development of this direction acquired in the articles of V. H. Salikhov and his students (see [2]–[5]).

The beginning was V. H. Salikhov's article [6], in which the estimate of irrationality measure of the number $\ln 3$ was improved: $\mu(\ln 3) \leq 5.125$. In 2014 Q. Wu and L. Wang improved on this result and received the estimate $\mu(\ln 3) \leq 5.1163051$. In their work symmetrized polynomials of the first degree were used. With help of the integral construction based on symmetrized polynomials of first and second degree I. V. Bondareva, M. Y. Luchin and V. H. Salikhov in [8] improved the result of Q. Wu and L. Wang: $\mu(\ln 3) \leq 5.116201$.

For the first time quadratic symmetrized polynomials were used in [9]. Using similar polynomials in the complex integral (modified Tomashevskay integral) V. H. Salikhov and E. S. Zolotukhina improved the estimate of the irrationality measure of the number $\ln \frac{5}{3}$: $\mu(\ln \frac{5}{3}) \leq 5.119417\dots$. Previous estimates were found by E. B. Tomashevskay [11], E. S. Zolotukhina [12], K. Väänänen, A. Heimonen, T. Matala-aho [13].

The aim of this article is to obtain a new estimate of join approximations by the numbers 1, $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$ and 1, $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$, $\ln 7$ using polynomial of first and second degree in the integral construction.

Keywords: irrationality measure, join approximations, symmetrized integrals.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

M. Y. Luchinn, V. H. Salikhov, E. S. Zolotukhina, 2019, "On estimate of irrationality measure of the logarithms of some rational numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 226–235.

1. Введение

В 2002 г. в работе [15] были получены следующие оценки:

$$|p + q_1 \ln 2 + q_2 \ln 3 + q_3 \ln 5| > H^{-\gamma_1}, \quad (1)$$

где $p, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Z}$, $H = \max(|q_1|, |q_2|, |q_3|)$, $H \geq H_0$, $\gamma_1 = 15.27049$,

$$|p + q_1 \ln 2 + q_2 \ln 3 + q_3 \ln 5 + q_4 \ln 7| > H^{-\gamma_2}, \quad (2)$$

где $p, q_1, \dots, q_4 \in \mathbb{Z}$, $H = \max(|q_1|, \dots, |q_4|)$, $H \geq H_0$, $\gamma_2 = 256.865$.

В настоящей работе мы улучшим оценки (1) и (2).

ТЕОРЕМА 1. *Оценка (1) справедлива при значении показателя $\gamma_1 = 14.5640221$.*

ТЕОРЕМА 2. *Оценка (2) справедлива для $\gamma_2 = 135.898431$.*

Отметим, что для доказательства оценки (1) в работе [15] был использован интеграл вида

$$\int_a^b \frac{(x-15)^{\alpha_1 n} (x-16)^{\alpha_2 n} (x-18)^{\alpha_3 n} (x-20)^{\alpha_4 n} (87x^2 - 3024x + 25920)^{\alpha_5 n}}{x^{n+1}} dx. \quad (3)$$

В нашей работе вместо интеграла (3) применяется интеграл вида

$$\int_a^b \frac{(x-36)^{\beta_1 n} (x-40)^{\beta_2 n} (x-45)^{\beta_3 n} (x-48)^{\beta_4 n} (P_1(x))^{\beta_5 n} (P_2(x))^{\beta_6 n} (P_3(x))^{\beta_7 n}}{x^{n+1}} dx, \quad (4)$$

где $P_1(x) = 2x - 75$, $P_2(x) = x^2 - 84x + 1740$, $P_3(x) = 3x^2 - 242x + 4860$, $\beta_1 = 0.430511$, $\beta_2 = 0.580022$, $\beta_3 = 0.379311$, $\beta_4 = 0.33961$, $\beta_5 = 0.020431$, $\beta_6 = 0.020157$, $\beta_7 = 0.000079$; $n \in \mathbb{N}$, $n \rightarrow \infty$, n кратно 10^6 , пределы интегрирования a, b см. ниже.

Наконец, для получения оценки (2) в работе [15] применялся интеграл вида

$$\int_{35}^w \frac{(x-35)^{\alpha_1 n} (x-36)^{\alpha_2 n} (x-40)^{\alpha_3 n} (x-42)^{\alpha_4 n} (x-45)^{\alpha_5 n}}{x^{n+1}} dx. \quad (5)$$

В настоящей работе для доказательства теоремы 2 вместо интеграла (5) применяется интеграл вида

$$\int_{56}^w \frac{(x-56)^{\beta_1 n} (x-60)^{\beta_2 n} (x-63)^{\beta_3 n} (x-70)^{\beta_4 n} (x-72)^{\beta_5 n} (2x-135)^{\beta_6 n}}{x^{n+1}} dx. \quad (6)$$

где $\beta_1 = 0.244553$, $\beta_2 = 0.648682$, $\beta_3 = 0.432262$, $\beta_4 = 0.323185$, $\beta_5 = 0.215264$, $\beta_6 = 0.028133$; $n \in \mathbb{N}$, $n \rightarrow \infty$, n кратно 10^6 , $w \in \{60, 63, 70, 72\}$.

2. Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теорем 1 и 2 аналогично выводу оценок (1) и (2) работы [15]. Мы для полноты изложения приведем доказательство теоремы 1 и краткую схему доказательства теоремы 2.

Начнем доказательство теоремы 1 со следующей леммы, доказанной К. Ву в работе [15] (лемма 1).

ЛЕММА 1. *Пусть $t \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$; для всех $n \in \mathbb{N}$ существуют целые числа $r_n, p_n^{(1)}, \dots, p_n^{(m)}$ такие, что $\varepsilon_n^{(i)} = r_n \gamma_i - p_n^{(i)} \neq 0$, $i = 1, \dots, m$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |r_n| \leq \delta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\varepsilon_n^{(i)}| = -\tau^{(i)}, \quad (7)$$

где $\delta, \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(m)}$ – положительные числа.

Пусть также $\tau = \min(\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(m)})$, $\tau^{(i)} \neq \tau^{(j)}$ для всех $i \neq j$. Тогда числа $1, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $H_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|p + q_1\gamma_1 + \dots + q_m\gamma_m| \geq H^{-\frac{\delta}{\tau} - \varepsilon} \quad (8)$$

для любых целых чисел $p, q_1, \dots, q_m$ и $H = \max_{1 \leq i \leq m} |q_i|$, $H \geq H_0(\varepsilon)$.

Лемма 1 обобщает лемму 2.1 работы [14], в которой был рассмотрен случай $m = 2$.

Определим для несократимой дроби $\frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{N}$, показатель $\nu_p = \nu_p\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}$ простого числа p так, что $\frac{a}{b} = p^{\nu_p} \frac{a_1}{b_1}$, где $a_1 \in \mathbb{Z}$, $b_1 \in \mathbb{N}$, $(a_1, p) = (b_1, p) = 1$.

Пусть, наконец, для аналитической в точке $x = 0$ функции $f(x)$ $D_0(f(x)) = f(0)$, $D_N(f(x)) = \frac{f^{(N)}(0)}{N!}$, $N \in \mathbb{N}$.

Определим для многочлена $P = Ax - B$, $A \in \mathbb{N}$, $B \in \mathbb{N}$, $\nu_3(P) = \min(2, \nu_3(B))$, $\nu_5(P) = \min(1, \nu_5(B))$, а для многочлена $P^* = A_2x^2 + A_1x + A_0$, где $A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{Z}$, $A_2 \neq 0$, $(A_2, A_1, A_0) = 1$, $\nu_2(P^*) = \min(8, \nu_2(A_0), \nu_2(A_1) + 4)$, $\nu_3(P^*) = \min(4, \nu_3(A_0), \nu_3(A_1) + 2)$, $\nu_5(P^*) = \min(2, \nu_5(A_0), \nu_5(A_1) + 1)$.

ЛЕММА 2. Справедливы следующие оценки для $m \in \mathbb{Z}^+$:

$$\nu_3(D_N((P(x))^m)) \geq m\nu_3(P) - 2N; \quad (9)$$

$$\nu_5(D_N((P(x))^m)) \geq m\nu_5(P) - N; \quad (10)$$

$$\nu_2(D_N((P^*(x))^m)) \geq m\nu_2(P^*) - 4N; \quad (11)$$

$$\nu_3(D_N((P^*(x))^m)) \geq m\nu_3(P^*) - 2N; \quad (12)$$

$$\nu_5(D_N((P^*(x))^m)) \geq m\nu_5(P^*) - N. \quad (13)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} (P(x))^m &= (Ax - B)^m = \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+, m_1 + m_2 = m} \binom{m}{m_1} (Ax)^{m_1} (-B)^{m_2} = \\ &= \sum_{m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+, m_1 + m_2 = m} \binom{m}{m_1} (-1)^{m_2} A^{m_1} B^{m_2} x^{m_1}, \\ D_N((P(x))^m) &= \binom{m}{N} (-1)^{m-N_1} A^N B^{m-N_1}, \end{aligned}$$

$$\nu_3(D_N(P(x))^m) \geq N\nu_3(A) + (m - N)\nu_3(B) \geq m\nu_3(B) - N\nu_3(B) \geq m\nu_3(P) - 2N,$$

и неравенство (9) доказано.

Далее $\nu_5(D_N(P(x))^m) \geq N\nu_5(A) + (m - N)\nu_5(B) \geq m\nu_5(B) - N\nu_5(B) \geq m\nu_5(P) - N$, и неравенство (10) доказано.

Пусть далее $\bar{m} = (m_0, m_1, m_2) \in (\mathbb{Z}^+)^3$, $|\bar{m}| = m_0 + m_1 + m_2$,

$$\gamma(\bar{m}) = \frac{|m|!}{m_0!m_1!m_2!}, \quad \gamma(\bar{m}) \in \mathbb{N}.$$

Тогда для $P^*(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0$ имеем

$$(P^*(x))^m = \sum_{|\bar{m}|=m} \gamma(\bar{m}) A_2^{m_2} A_1^{m_1} A_0^{m_0} x^{m_1+2m_2},$$

$$D_N((P^*(x))^m) = \sum_{|\bar{m}|=m, m_1+2m_2=N} \gamma(\bar{m}) A_2^{m_2} A_1^{m_1} A_0^{m_0},$$

$$\begin{aligned} \nu_2(D_N(P^*(x))^m) &\geq m_2\nu_2(A_2) + m_1\nu_2(A_1) + m_0\nu_2(A_0) \geq \\ &\geq m_2(\nu_2(P^*) - 8) + m_1(\nu_2(P^*) - 4) + m_0\nu_2(P^*) = m\nu_2(P^*) - 4(2m_2 + m_1) = m\nu_2(P^*) - 4N, \end{aligned}$$

и неравенство (11) доказано.

Аналогично,

$$\begin{aligned} \nu_3(D_N(P^*(x))^m) &\geq m_2\nu_3(A_2) + m_1\nu_3(A_1) + m_0\nu_3(A_0) \geq \\ &\geq m_2(\nu_3(P^*) - 4) + m_1(\nu_3(P^*) - 2) + m_0\nu_3(P^*) = m\nu_3(P^*) - 2(2m_2 + m_1) = m\nu_3(P^*) - 2N, \end{aligned}$$

и неравенство (12) доказано.

Наконец,

$$\begin{aligned} \nu_5(D_N(P^*(x))^m) &\geq m_2\nu_5(A_2) + m_1\nu_5(A_1) + m_0\nu_5(A_0) \geq \\ &m_2(\nu_5(P^*) - 2) + m_1(\nu_5(P^*) - 1) + m_0\nu_5(P^*) = m\nu_5(P^*) - (2m_2 + m_1) = m\nu_5(P^*) - N, \end{aligned}$$

и неравенство (13) доказано.

Это завершает доказательство леммы 2.

Отметим, что для параметров $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_7$ интеграла (4) справедливы следующие соотношения:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + 2\beta_6 + 2\beta_7 = 1.790357; \quad (14)$$

$$2\beta_1 + 3\beta_2 + 4\beta_4 + 2\beta_6 + 2\beta_7 = 4; \quad (15)$$

$$2\beta_1 + 2\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + 2\beta_7 = 2; \quad (16)$$

$$\beta_2 + \beta_3 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 = 1. \quad (17)$$

Обозначим $\widetilde{P_n(x)}$ — многочлен, стоящий в числителе подынтегральной функции интеграла (4). Разложим $\frac{P_n(x)}{x^{n+1}}$ в сумму простейших дробей:

$$\frac{\widetilde{P_n(x)}}{x^{n+1}} = P_{dn-1}(x) + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_j}{x^j}, \quad (18)$$

где все $a_j \in \mathbb{Q}$, $d = 0.790357$, $\deg P_{dn-1}(x) = dn - 1$ (см. (14),

$$P_{dn-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{dn-1} b_\nu x^\nu, \quad (19)$$

все $b_\nu \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 3. *Справедливы следующие соотношения для $j = 1, \dots, n+1$*

$$a_j = 2^{4j-4} 3^{2j-2} 5^{j-1} A_j, \quad A_j \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Пусть $\bar{m} = (m_1, \dots, m_7) \in (\mathbb{Z}^+)^7$, $m = m_1 + \dots + m_7$.

Имеем стандартным образом

$$\begin{aligned} a_j = \sum_{\bar{m} \in (\mathbb{Z}^+)^7, m=n+1-j} D_{m_1} \left((x-36)^{\beta_1 n} \right) D_{m_2} \left((x-40)^{\beta_2 n} \right) D_{m_3} \left((x-45)^{\beta_3 n} \right) D_{m_4} \left((x-48)^{\beta_4 n} \right) \\ \times D_{m_5} \left((2x-75)^{\beta_5 n} \right) D_{m_6} \left((P_2(x))^{\beta_6 n} \right) D_{m_7} \left((P_3(x))^{\beta_7 n} \right), \quad (20) \end{aligned}$$

где $m_i \leq \beta_i n$, $i = 1, \dots, 5$, $m_6 \leq 2\beta_6 n$, $m_7 \leq 2\beta_7 n$.

Из определений показателей $\nu_p(P)$ и $\nu_p(P^*)$ следует $\nu_3(2x-75) = 1$, $\nu_5(2x-75) = 1$, $\nu_2(P_2(x)) = 2$, $\nu_3(P_2(x)) = 1$, $\nu_5(P_2(x)) = 1$, $\nu_2(P_3(x)) = 2$, $\nu_3(P_3(x)) = 2$, $\nu_5(P_3(x)) = 1$.

По лемме 2 из равенства (20) получим

$$\begin{aligned}\nu_2(a_j) &\geq 2\beta_1n - 4m_1 + 3\beta_2n - 4m_2 + 4\beta_4n - 4m_4 + 2\beta_6n - 4m_6 + 2\beta_7n - 4m_7 = (2\beta_1 + 3\beta_2 \\ &+ 4\beta_4 + 2\beta_6 + 2\beta_7)n - 4(m_1 + m_2 + m_4 + m_6 + m_7) \geq 4n - 4(n + 1 - j) \\ &= 4(j - 1),\end{aligned}\quad (21)$$

и мы воспользовались равенством (15). Аналогично

$$\begin{aligned}\nu_3(a_j) &\geq 2\beta_1n - 2m_1 + 2\beta_3n - 2m_3 + \beta_4n - 2m_4 + \beta_5n - m_5 + \beta_6n - 2m_6 + 2\beta_7n - 2m_7 \\ &= (2\beta_1 + 2\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + 2\beta_7)n - 2(m_1 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7) \\ &\geq 2n - 2(n + 1 - j) = 2(j - 1),\end{aligned}\quad (22)$$

и мы воспользовались равенством (16). Наконец, с помощью равенства (17),

$$\begin{aligned}\nu_5(a_j) &\geq \beta_2n - m_2 + \beta_3n - m_3 + \beta_5n - m_5 + \beta_6n - m_6 + \beta_7n - m_7 \\ &= (\beta_2 + \beta_3 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7)n - (m_2 + m_3 + m_5 + m_6 + m_7) \\ &\geq n - (n + 1 - j) = j - 1,\end{aligned}\quad (23)$$

Полученные выше неравенства (21)–(23) равносильны утверждению леммы.

Теперь можно закончить доказательство теоремы 1.

Обозначим $(c_0, c_1, c_2, c_3) = (36, 40, 45, 48)$; $q_n = \text{НОК}(1, 2, \dots, n)$;

$$\varepsilon_n^{(i)} = q_n \int_{c_{i-1}}^{c_i} \widetilde{\frac{P_n(x)}{x^{n+1}}} dx, \quad i = 1, 2, 3; \quad (24)$$

$$\gamma_1 = \ln \frac{c_1}{c_0} = \ln \frac{10}{9}, \quad \gamma_2 = \ln \frac{c_2}{c_1} = \ln \frac{9}{8}, \quad \gamma_3 = \ln \frac{c_3}{c_2} = \ln \frac{16}{15}. \quad (25)$$

Покажем, что

$$\varepsilon_n^{(i)} = r_n \gamma_i - p_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $r_n, p_n^{(1)}, p_n^{(2)}, p_n^{(3)} \in \mathbb{Z}$.

Вычислим последовательно интегралы (24). Имеем из (18)

$$\varepsilon_n^{(1)} = q_n \int_{36}^{40} P_{dn-1}(x) dx + a_1 q_n \ln x \Big|_{36}^{40} + q_n \sum_{j=2}^{n+1} \frac{a_j}{j-1} \frac{1}{x^{j-1}} \Big|_{36}^{40}.$$

Очевидно, $q_n \int_{36}^{40} P_{dn-1}(x) dx \in \mathbb{Z}$; по лемме 3 $a_1 \in \mathbb{Z}$, $q_n \frac{1}{j-1} \in \mathbb{N}$, $j = 2, \dots, n+1$, $\frac{a_j}{40^{j-1}} \in \mathbb{Z}$, $\frac{a_j}{36^{j-1}} \in \mathbb{Z}$, поэтому $\varepsilon_n^{(1)} = r_n \gamma_1 - p_n^{(1)}$, где $r_n = a_1 q_n \in \mathbb{Z}$, $p_n^{(1)} \in \mathbb{Z}$.

Аналогично

$$\begin{aligned}\varepsilon_n^{(2)} &= q_n \int_{40}^{45} P_{dn-1}(x) dx + r_n \ln x \Big|_{40}^{45} - q_n \sum_{j=2}^{n+1} \frac{a_j}{j-1} \frac{1}{x^{j-1}} \Big|_{40}^{45}, \quad \frac{a_j}{45^{j-1}} \in \mathbb{Z}; \\ \varepsilon_n^{(2)} &= r_n \gamma_2 - p_n^{(2)}, \quad p_n^{(2)} \in \mathbb{Z}; \\ \varepsilon_n^{(3)} &= r_n \gamma_3 - p_n^{(3)}, \quad p_n^{(3)} \in \mathbb{Z} \text{ ввиду } \frac{a_j}{48^{j-1}} \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Найдем асимптотику r_n и $\max_{i \in \{1,2,3\}} |\varepsilon_n^{(i)}|$ стандартным образом. Пусть (см. (4))

$$f(x) = \frac{(x-36)^{\beta_1}(x-40)^{\beta_2}(x-45)^{\beta_3}(x-48)^{\beta_4}(P_1(x))^{\beta_5}(P_2(x))^{\beta_6}(P_3(x))^{\beta_7}}{x}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |r_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln q_n + \ln |f(-52.415787)| = 1 + 4.183111 = 5.183111; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\varepsilon_n^{(1)}| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln q_n + \ln |f(37.740884)| = 1 - 1.356279 = -0.356279; \end{aligned}$$

аналогично

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\varepsilon_n^{(2)}| &= 1 + \ln |f(42.861134)| = 1 - 1.362953 = -0.362953; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\varepsilon_n^{(3)}| &= 1 + \ln |f(46.661613)| = 1 - 1.3562281 = -0.3562281. \end{aligned}$$

В обозначениях леммы 1 (см. (7)) получим $\delta = 5.183111$, $\tau^{(1)} = 0.356279$, $\tau^{(2)} = 0.362953$, $\tau^{(3)} = 0.356281$, $\tau = \min(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \tau^{(3)}) = \tau^{(1)}$, все $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \tau^{(3)}$ различны. По лемме 1 из (25) следует

$$|p + q_1 \ln \frac{10}{9} + q_2 \ln \frac{9}{8} + q_3 \ln \frac{16}{15}| > H^{-\frac{\delta}{\tau} - \varepsilon}. \quad (26)$$

Но

$$\begin{aligned} q_1 \ln \frac{10}{9} + q_2 \ln \frac{9}{8} + q_3 \ln \frac{16}{15} &= (q_1 - 3q_2 + 4q_3) \ln 2 + (-2q_1 + 2q_2 - q_3) \ln 3 + (q_1 - q_3) \ln 5; \\ q'_1 \ln 2 + q'_2 \ln 3 + q'_3 \ln 5 &= (2q'_1 + 3q'_2 + 5q'_3) \ln \frac{10}{9} + (3q'_1 + 5q'_2 + 7q'_3) \ln \frac{9}{8} + (2q'_1 + 3q'_2 + 4q'_3) \ln \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

Но тогда из (26) следует утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 совершенно аналогично, поэтому ограничимся краткой схемой. Для параметров $\beta_1, \dots, \beta_6$ интеграла (6) справедливы соотношения

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_6 = 1.892079; \quad (27)$$

$$3\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_4 + 3\beta_5 = 3;$$

$$\beta_2 + 2\beta_3 + 2\beta_5 + 2\beta_6 = 2; \quad (28)$$

$$\beta_2 + \beta_4 + \beta_6 = 1;$$

$$\beta_1 + \beta_3 + \beta_4 = 1.$$

Аналогичное (18) соотношение для подынтегральной функции интеграла (6) выполняется при $d = 0.892079$ (см. (27)).

Наконец вместо леммы 3 из равенств (28) получим соотношение вида

$$a_j = 2^{3j-3} 3^{2j-2} 5^{j-1} 7^{j-1} A_j, \quad A_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (29)$$

Обозначим $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4) = (56, 60, 63, 70, 72)$. Рассмотрим вместо интегралов (24) следующие интегралы

$$\varepsilon_n^{(i)} = q_n \int_{c_{i-1}}^{c_i} \widetilde{\frac{P_n(x)}{x^{n+1}}} dx, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Пусть $\gamma_1 = \ln \frac{c_1}{c_0} = \ln \frac{15}{14}$, $\gamma_2 = \ln \frac{c_2}{c_1} = \ln \frac{21}{20}$, $\gamma_3 = \ln \frac{c_3}{c_2} = \ln \frac{70}{63} = \ln \frac{10}{9}$, $\gamma_4 = \ln \frac{c_4}{c_3} = \ln \frac{72}{70} = \ln \frac{36}{35}$.

Как в доказательстве теоремы 1 с помощью соотношений (29) получим, что

$$\varepsilon_n^{(i)} = r_n \gamma_i - p_n^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

где $r_n, p_n^{(1)}, \dots, p_n^{(4)} \in \mathbb{Z}$.

Пусть (см. (6))

$$f(x) = \frac{(x-56)^{\beta_1}(x-60)^{\beta_2}(x-63)^{\beta_3}(x-70)^{\beta_4}(x-72)^{\beta_5}(2x-135)^{\beta_6}}{x}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |r_n| = 1 + \ln |f(-70.793856)| = 6.027489; \\ \tau &= -(1 + \ln |f(71.386304)|) = 0.044353, \end{aligned}$$

и с помощью леммы 1 получаем оценку теоремы 2.

3. Заключение

В работе усилены оценки совместных приближений чисел $1, \ln 2, \ln 3, \ln 5$ и $1, \ln 2, \ln 3, \ln 5, \ln 7$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rhin G. Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité // Progr. in Math. 1987. Vol. 71. P. 155-164.
2. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π // Успехи математических наук. 2008. Том 63, № 3. С. 163-164.
3. Сальникова Е. С. О мерах иррациональности некоторых значений функции Гаусса // Чебышевский сборник. 2007. Том 8, № 2. С. 88-96.
4. Башмакова М. Г. О приближении значений гипергеометрической функции Гаусса рациональными дробями // Математические заметки. 2010. Т.88, № 6. С. 785-797.
5. Лучин М. Ю. Оценка меры иррациональности числа $\ln \frac{7}{4}$ // Чебышевский сб. 2013. Том 14, № 2. С. 123-131.
6. Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 3$ // Доклады Академии наук. 2007. Том 417, № 6. С. 753-755.
7. Wu Q, L. Wang. On the irrationality measure of $\log 3$ // Journal of Number Theory. 2014. Vol. 142. P. 264-273.
8. Бондарева И. В., Лучин М. Ю., Симметризованные многочлены в задаче оценки меры иррациональности числа $\ln 3$ // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, № 1. С. 15-25.
9. Бондарева И. В., Лучин М. Ю., Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 7$ // Математические заметки (в печати).

10. Салихов В. Х., Золотухина Е. С., Томашевская Е. Б. О показателе иррациональности $\ln \frac{5}{3}$ // Чебышевский сборник (в печати).
11. Томашевская Е. Б. О диофантовых приближениях значений функции $\log x$ // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Том 16. № 6. С. 157-166.
12. Сальникова Е. С. Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов // Математические заметки. 2008. Том 83. № 3. С. 428-438.
13. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function // Manuscripta Math. 1993. Vol. 81. P. 183-202.
14. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arith. 1993. Vol. LXIII. № 4. P. 325-349.
15. Wu Q. 2002, "On the linear independence measure of logarithms of rational numbers", Math. Comput., vol. 72, № 242, pp. 901-911.

REFERENCES

1. Rhin G., 1987, "Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité", Progr. in Math., vol. 71, pp. 155-164.
2. Salikhov, V. H., 2008, "On the irrationality measures of π ", Russian Mathematical Surveys, vol. 63, № 3, pp. 163-164. (Russian)
3. Salnikova, E., S. 2007, "On irrationality measures of some values of the Gauss function", Chebyshevskii Sbornik, vol. 8, № 2, pp. 88-96. (Russian)
4. Bashmakova M. G., 2010, "Approximation of values of the Gauss hypergeometric function by rational fractions", Mathematical Notes, vol. 88, no. 6, pp. 785-797. (Russian)
5. Luchin M. Yu., 2013, "The estimate of the irrationality measures of number $\ln \frac{7}{4}$ ", Chebyshevskii Sbornik, vol. 14, no. 2, pp. 123-131. (Russian)
6. Salikhov, V. H. 2007, "On the irrationality measures of $\ln 3$ ", Doklady Mathematics, vol. 417, № 6, pp. 753-755. (Russian)
7. Wu Q, L. Wang. 2014, "On the irrationality measure of $\log 3$ ", Journal of Number Theory, vol. 142, pp. 264-273.
8. Bondareva I., Luchin M., Salikhov, V. H., 2018, "Symmetrized polynomials in a problem of estimating of the irrationality measure of number $\ln 3$ ", Chebyshevskii Sbornik, vol. 19, № 1, pp. 15-25. (Russian)
9. Bondareva I., Luchin M., Salikhov, V. H., "On the irrationality measure of $\ln 7$ ", Mathematical Notes (in print) (Russian)
10. Salikhov, V. H., Zolotukhina E.S., "On the irrationality measure of $\ln \frac{5}{3}$ ", Chebyshevskii Sbornik (in print) (Russian)
11. Tomashevskaya E. B., 2012, "On Diophantine approximations to $\log x$ ", J. Math. Sci., vol. 182, № 4, pp. 552-559.
12. Salnikova E., S. 2008, "Diophantine approximations of $\log 2$ and other logarithms", Mathematical Notes, vol. 83, № 3, pp. 428-438. (Russian)

13. Heimonen, A., Matala-aho, T., Väänänen, K. 1993, "On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function", *Manuscripta Math.*, vol. 81, pp. 183-202.
14. Hata M. 1993, "Rational approximations to π and some other numbers", *Acta Arith.*, vol. LXIII, № 4, pp. 325-349.
15. Wu Q. 2002, "On the linear independence measure of logarithms of rational numbers", *Math. Comput.*, vol. 72, № 242, pp. 901-911.

Получено 25.06.2019 г.

Принято в печать 20.12.2019 г.