ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.5 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-4-208-225

# Функционально-дифференциальные включения типа Хейла с дробным порядком производной в банаховом пространстве

М. И. Илолов, Д. Н. Гулджонов, Дж. Ш. Рахматов

**Илолов Мамадшо Илолович** — доктор физико-математических наук, профессор, Центр инновационного развития науки и новых технологий Академии наук Республики Таджикистан (г. Душанбе).
*e-mail: ilolov.mamadsho@gmail.com*
**Гулджонов Диловар Нусайриевич** — Институт математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан (г. Душанбе).
*e-mail: gdilovar@gmail.com*
**Рахматов Джамшед Шавкатович** — Заместитель директора Центра инновационного развития науки и новых технологий Академии наук Республики Таджикистан (г. Душанбе).
*e-mail: jamesd007@rambler.ru*

**Аннотация**

За последние десятилетия значительное развитие получила теория функционально-дифференциалных включений, прежде всего, функционально-дифференциальное включение запаздывающего типа. Ученые разных стран ведут исследования в области теории начально-краевых задач для различных классов дифференциальных, интегро-дифференциальных и функционально-дифференциальных включений в частных производных с целым и дробным порядками производных. Настоящая работа посвящена дробным функционально-диференциальным и интегродифференциальным включениям типа Хейла занимающие промежуточное место между функционально-дифференциальными включениями с запаздыванием и включениями нейтрального типа. Установлены достаточные условия существования слабых решений включений типа Хейла с дробным порядком производной. Методы дробного интегро-дифференциального исчисления и теории непод-вижных точек многозначных отображений лежат в основе настоящего исследования. Известно, что динамика экономических, социальных и экологических макросистем представляет собой многозначный динамический процесс и дифференциальные и интегро-дифференциальные включения дробного порядка являются естественными моделями динамики макросистем. Такие включения используются также для описания некоторых физических и механических систем с гистерезисом. В конце работы приводится пример иллюстрирующий абстрактные результаты.

*Ключевые слова:* функционально-дифференциальное включение, дробная производная Капуто, многозначное отображение, неподвижная точка.

*Библиография:* 27 названий.

**Для цитирования:**
М. И. Илолов, Д. Н. Гулджонов, Дж. Ш. Рахматов. Функционально-дифференциальные включения типа Хейла с дробным порядком производной в банаховом пространстве // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 208–225.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.5 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-4-208-225

# Functional differential inclusions of Hale type with fractional order of derivative in a Banach space

M. I. Ilolov, D. N. Guljonov, J. Sh. Rahmatov

**Ilolov Mamadsho Hilolovich** — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Center of Innovative Development of Science and New Technologies of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan (Dushanbe).
*e-mail: ilolov.mamadsho@gmail.com*
**Guljonov Dilovar Nusayrievich** — Institute of Mathematics named after A. Dzhuraev of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan (Dushanbe).
*e-mail: gdilovar@gmail.com*
**Rahmatov Jamshed Shavkatovich** — Deputy Director of the Center of Innovative Development of Science and New Technologies of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan (Dushanbe).
*e-mail: jamesd007@rambler.ru*

**Abstract**

Over the past decades, the theory of functional differential inclusions, primarily, the delayed functional differential inclusion, has received significant development. Scientists from different countries conduct research in the theory of initial-boundary value problems for various classes of differential, integro-differential and functional differential inclusions in partial derivatives with integer and fractional orders of derivatives.

The present work is devoted to fractional functional-differential and integro-differential inclusions of Hale type, which occupy an intermediate place between functional-differential inclusions with delay and inclusions of a neutral type. Sufficient conditions for the existence of weak solutions of inclusions of Hale type with fractional order of the derivative are established. The methods of fractional integro-differential calculus and the theory of fixed points of multivalued mappings are the basis of this study. It is known that the dynamics of economic, social, and ecological macrosystems is a multi-valued dynamic process, and fractional differential and integro-differential inclusions are natural models of macrosystem dynamics. Such inclusions are also used to describe some physical and mechanical systems with hysteresis. At the end of the paper, an example illustrates abstract results.

*Keywords:* functional differential inclusion, Caputo fractional derivative, multivalued mapping, fixed point.

*Bibliography:* 27 titles.

**For citation:**
M. I. Ilolov, D. N. Guljonov, J. Sh. Rahmatov, 2019, "Functional differential inclusions of Hale type with fractional order of derivative in a Banach space", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 208–225.

## 1. Введение

Исследование функционально-дифференциальных включений восходит к работам А.А. Толстоногова [1], R.P. Agarval и др. [2], M.I. Kamenskii, V.V. Obukhovskii, P. Zecca [3], в которых найдены условия существования решений для различных классов начальных и граничных задач для включений запаздывающего типа целого и дробного порядков производных. Прежде всего, изучение дифференциальных и интегро-дифференциальных включений мотивировано развитием теории управления динамических систем, описываемые начальными задачами вида

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-h), u(t)), h > 0, x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $u(t) \in U$ является функцией-параметром и которая "управляет"системой (1.1). Если ввести многозначное отображение

$$F(t, x, [x(t-h)) \stackrel{def}{=} \{f(t, x(t), x(t-h), u(t))\}_{u \in U},$$

где U - множество допустимых управлений, то решения дифференциального уравнения (1.1) будут решениями дифференциального включения с запаздыванием

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t), x(t-h)), x(0) = x_0,$$

в котором управление присутствует в неявном виде.

Отметим, что еще в 60-70 годах прошлого столетия в работах [4-6] рассматривались некоторые частные классы дифференциальных включений, а именно, включения вида

$$x'(t) \in -A(x(t)), x(0) = x_0,$$

где A представляет собой максимально монотонное (линейное или нелинейное) отображение действующее в гильбертовом пространстве. В общем случае банахова пространства в качестве отображения берутся аккретивные операторы. Более узким классом таких включений являются так называемые "градиентные"включения, которые являются обобщениями уравне-ний градиентного типа

$$x'(t) = -\nabla V(x(t)), x(0) = x_0, \tag{1.2}$$

где $V$-дифференцируемый потенциал.

Как известно, в большинстве случаев, потенциальная функция не является дифференцируемой. Однако, когда функция $V$ полунепрерывная снизу и выпуклая в (1.2), то градиент потенциала $\nabla\ V(x)$ можно заменить субдифференциалом $\partial V(x)$ (или "обощенным потенциалом"). Субдифференциал $\partial V(x)$ удовлетворяет градиентному включению вида

$$x'(t) \in -\partial\ V(x(t)), x(0) = x_0,$$

которое обладает следующим важным свойством:

*Если состояние $\bar{x}$ минимизирует потенциал $V$, то траектории градиентного включения сходятся к этому минимуму.*

Еще одним источником возникновения дифференциальных включений являются дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями в смысле А. Филиппова [7]. При этом вложение правой части $f(t, x)$ в многозначное отображение $F(t, x)$ позволяет легко доказать свойства регулярности траекторий исходного дифференциального уравнения.

За последние два десятилетия значительное развитие получила теория функционально-дифференциальных включений, прежде всего, функционально-дифференциальные включения запаздывающего типа. Вышли в свет монографии [1,3,8,9], которые полностью или частично посвящены указанной проблематике. Большой отряд ученых разных стран ведет исследования различных задач для дробных дифференциальных, интегро-дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и их приложений (см.напр.[10-13]).

Настоящая работа посвящена дробным функционально-дифференциальным и интегро-дифференциальным включениям типа Хейла, занимающие промежуточное место между функционально-дифференциальными включениями с запаздыванием и включениями нейтрального типа. Соответствующим уравнениям в конечномерном случае посвящена монография американского математика Дж. Хейла [14]. Обобщение и развитие результатов из [14] на случай банаховых пространств дано в работах автора [15-18]. Некоторые классы дробных интегро-дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах были предметом изучения в статьях [19-21].

Переходим к формулировке основных результатов.

Пусть $h \geq 0$ - заданное вещественное число, $R = (-\infty, \infty)$, E - сепарабельное банаховое пространство с нормой $\|.\|, C([a,b],E)$-банаховое пространство непрерывных функций отображающих интервал $[a,b]$ в E с топологией равномерной сходимости. Если $[a,b] = [-h,0]$, то положим $C = C([-h,0],E)$ вводя норму элемента $\varphi$ в $C$ формулой

$$\|\varphi\|_C = \max_{-h \leq \theta \leq \theta} \|\varphi(\theta)\|.$$

Если $\delta \in R, d \geq 0$ и $x \in C([\delta - h, \delta + d], E)$, то для любого $t \in [\delta, \delta + d]$ определим $x_t \in C$ с помощью равенства

$$x_\Theta = x(t + \Theta), -h \leq \Theta \leq 0.$$

Рассмотрим начальную задачу для дробного дифференциального включения типа Хейла

$${}^cD_t^\alpha[x(t) - g(t,x_t)] \in Ax(t) + F(t,x_t), t \in [0,T], x_0 = \varphi \in C, x(0) = x \in E, \tag{1.3}$$

где ${}^cD_t$ - дробная производная Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$, $F : [0,T] \times C \to 2^C$ - замкнутое выпуклое многозначное отображение, $g : [0,T] \times C \to E$ - заданная функция, A - генератор компактной и равномерно ограниченной полугруппы операторов $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ на E.

Условия существования слабых решений задачи (1.3) указаны в разделе 3. В разделе 4 исследуется вопрос существования слабых решений для интегро-дифференциальных включений типа Хейла

$${}^cD_t^\alpha[x(t) - g(t,x_t)] \in Ax(t) + \int_0^t a(t,s)F(s,x_s ds, t \in J,$$

$$x_0 = \varphi, x(0) = x, \tag{1.4}$$

где $A, F, g, \varphi$ такие же как в задаче (1.3) и

$$a : D \to R_+, D = \{(t,s) \in J \times J : t \leq S\}.$$

## 2. Предварительные сведения

В этом разделе приводятся необходимые в дальнейшем обозначения, определения и предварительные результаты из многозначного выпуклого анализа и дробного интегродифференциального исчисления.

Пусть $J = [0, T]$ и пусть $C(J, E)$ - банахово пространство непрерывных функций из $J$ в $E$ с нормой

$$\|x\|_{C(J)} = sup\{\|x(t)\| t \in J\}.$$

Через $B(E)$ обозначим банахово пространство всех линейных ограниченных операторов действующих из E в E.

Измеримая функция $x : J \to E$ интегрируема в смысле Бохнера, если и только если, $\|x\|$ интегрируема в смысле Лебега (см. напр. [22]).

Пусть $L^1(J, E)$ - банахово пространство непрерывных функций $x : J \to E$ интегрируемые в смысле Бохнера с нормой

$$\|x\|_{L^1} = \int_0^t \|x(t)\| dt \text{ для всех } x \in L^1(\partial, E).$$

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ банахово пространство.

Многозначное отображение $G : X \to 2^X$ является выпуклым (замкнутым), если $G(\cdot)$ выпукло (замкнуто) для всех $x \in X$. Отображение $G$ ограничено на ограниченных множествах, если $G(D) = \bigcup_{x \in D} G(x)$ ограничено в $X$ для любого ограниченного множества $D$ из $X$, т.е.

$$\sup_{x \in D}\{\sup\{\|y\| : y \in G(x)\}\} < \infty.$$

Отображение $G$ называется полунепрерывным сверху на $X$, если для каждого $x_0 \in X$ множество $G(x_0)$ непустое замкнутое подмножество $X$ и если для каждого открытого множества $V$ из $X$ содержащее $G(x_0)$ существует открытая окрестность $A$ точки $x_0$ такая, что $G(A) \subset V$.

Отображение $G$ называется вполне непрерывным, если $G(D)$ является относительно компактным для каждого ограниченного подмножества $D \subseteq X$. Если многозначное отображение $G$ вполне непрерывно с непустыми компактными значениями, то $G$ полунепрерывно сверху, если и только если $G$ имеет замкнутый график, т.е. для $x_n \to x_*$, $y_n \to y_*$ при $y_n \in Gx_n$ будем иметь $y_* \in Gx_*$.

Отображение $G$ имеет неподвижную точку если существует $x \in X$ такой, что $x \in Gx$.

Далее, через $BCC(X)$ обозначим множество всех непустых ограниченных замкнутых и выпуклых подмножеств $X$. Многозначное отображение $G : J \to BCC(X)$ называется измеримым, если для каждого $x \in X$ расстояние между $x$ и $G(x)$ является измеримой функцией на $J$. Полунепрерывное сверху отображение $G : X \to 2^X$ называется уплотняющим, если для любого ограниченного подмножества $D \subseteq X$ с $\alpha(D) \neq 0$ имеем

$$\alpha(G(D)) < \alpha(D),$$

где через $\alpha$ обозначена мера некомпактности Куратовского. Свойства меры некомпактности Куратовского подробнейшим образом изложены в книге [23].

Отметим, что вполне непрерывные многозначные отображения являются простым примером уплотняющего отображения.

Следующее утверждение представляет собой нужную нам теорему о неподвижной точке.

*Лемма 2.1.([24]). Пусть $X$ банахово пространство и $N : X \to BCC(X)$ уплотняющее отображение. Если множество*

$$\Omega = \{x \in X : \lambda x \in Nx \text{ для некоторого } \lambda \geq 1\}$$

*ограничено, то $N$ имеет неподвижную точку.*

Далее приводим некоторые основные определения и утверждения из дробного интегро-дифференциального исчисления необходимые при изложении основных результатов.

*Определение 2.2. Пусть $\alpha > 0$ и $f : R_+ \to X$ принадлежит $L^1(R_+, X)$. Тогда интеграл Римана - Лиувилля определяется в виде*

$$I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds,$$

*где $\Gamma(.)$ - гамма-функция Эйлера.*

*Определение 2.3.([25]). Производная Капуто порядка $\alpha$ от функции $f : R_+ \to X$ задается следующей формулой*

$$^cD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f^n(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds = I_t^{n-\alpha} f^n(t),$$

$$t > 0, n-1 < \alpha < n.$$

Если $0 < \alpha \leq 1$, то

$$^cD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f'(s)ds}{(t-s)^\alpha}.$$

Очевидно, что производная Капуто от постоянной функции равна нулю.

Установим еще одно предварительное утверждение которое понадобится нам при доказательстве основных теорем.

Пусть $S_{F,x}$ множество функций определенное с помощью равенства

$$S_{F,x} = \{v \in L^1(J, X) : v(t) \in F(t, x_t) \text{ п.в. для } t \in J\}.$$

*Лемма 2.4. Пусть $X$ банахово пространство. Пусть $F : [0, T] \times C \to BCC(X)$ является $L^1$ - многозначным отображением Каратеодори из $C(J, X)$ в $L^1(J, X)$. Тогда многозначный оператор*

$$\Psi_0 S_F : C(J, X) \to BCC(C(J, X)),$$

$$x \to (\Psi_0 S_F)(x) \Psi(S_{F,x})$$

*является замкнутым графиком оператора в $C(J, X) \times C(J, X)$.*

Отметим, что лемма 2.4 является бесконечномерным аналогом известной теоремы Losota, Opial [26].

## 3. Функционально-дифференциальное включение типа Хейла

В этом разделе приводим теорему существования слабых решений функционально-дифференциального включения (1.3).

Сначала дадим определение слабого решения.

*Определение 3.1. Функция $x : [-h, T] \to E$ называется слабым решением задачи (1.3), если существует $f(\cdot) \in L^1(J, E)$ такая, что $f(t) \in F(t, x_t)$ для п. в. $t \in J$ и $x$ удовлетворяет соотношению*

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), t \in [-h, 0] \\ q(t, x_t) + Q(t)[\varphi(0) - g(o, \varphi)] + \int\limits_0^t R(t-s) f(s) ds, \end{cases}$$

*где*

$$Q(t) = \int\limits_0^\infty \xi_\alpha(\sigma) T(t^\alpha \sigma),\ R(t) = \alpha \int\limits_0^\infty \sigma t^{\alpha-1} \xi_\alpha(\sigma) T(t^\alpha \sigma) d\sigma$$

*и для $\sigma \in (0, \infty)$*

$$\xi_\alpha(\sigma) = \frac{1}{\alpha} \sigma^{-1-\frac{1}{\alpha}} w_\sigma(\sigma^{-1/\alpha}) \geq 0,$$

$$w_\sigma(\sigma) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \sigma^{-\alpha n - 1} \frac{\Gamma(n\alpha + 1)}{n!} sin(n\pi\alpha).$$

Здесь $\xi_\alpha$ - функция плотности вероятности определенной на $(0, \infty)$, так что

$$\xi_\alpha \geq 0, \sigma \in (0, \infty) \text{ и } \int\limits_0^\infty \xi_\alpha(\sigma) d\sigma = 1.$$

Нетрудно проверить, что

$$\int\limits_0^\infty \alpha \xi_\alpha(\sigma) d\sigma = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

*Замечание 3.2. Семейство $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ является равномерно ограниченной полугруппой, т.е. существует постоянная $M > 0$, такая что $\|T(t)\| \leq M$ для всех $t \in J$.*

*Замечание 3.3. Легко установить, что*

$$\|R(t)\| \leq c_{\varphi,M} t^{\alpha-1}, t > 0 \tag{3.2}$$

*где $c_{\varphi,M} = \frac{\varphi.M}{\Gamma(1+\alpha)}$.*

Пусть выполняются следующие предположения:

(H1) $F : Y \times C \to BCC(E)$, отображение $(t, u) \to F(t, u)$ измеримое относительно $t$ для каждого $u \in C$ полунепрерывная сверху функция относительно $u$ для каждого $t \in [0, T]$ и для каждого фиксированного $u \in C$ множество

$$S_{f,n} = \{f \in L^1(J, E) : f(t) \in F(t, u) \text{ для п.в. } t \in J\}$$

непустое.

(H2) Функция $g(t, x_t)$ липшиц-непрерывная, т.е. существует постоянная $q < 1$ такая, $\|g(t_1, x_t) - g(t_2, x_{t_2})\| \leq q\|x_{t_1} - x_{t_2}\|$. Функция $g : [0, T] \times C \to E$ вполне непрерывная и для любого ограниченного множества $K$ в $C([-h, T], E)$ множество функций $\{t \to g(t, x_t) : x \in K\}$ равностепенно непрерывное в $C([0, T], E)$.

(H3) Существуют постоянные $c_1$ и $c_2$ такие, что

$$\|g(t, v)\| \leq c_1\|v\|_C + c_2, t \in J, v \in C.$$

(H4) $\|F(t, u)\| = \sup\{\|v\| : v \in F(t, u)\} \leq p(t)\Psi(\|u\|_C)$ для почти всех $t \in [0, T]$ и $v \in C$, где $p \in L^1([0, T], R_+)$ и $\Psi : R_+ \to (0, \infty)$, является непрерывной возрастающей функцией удовлетворяющей оценке

$$\int\limits_0^t m(s)ds < \int\limits_c^\infty \frac{ds}{s + \Psi(s)},$$

где

$$c = M\|\varphi\|_c + MT[\|x\| + C_1\|\varphi\|_C + 2C_2]$$

$$m(t) = \max\{MC_1, MTp(t)\} \text{ и } \sup\{\|T(t)\|, t \in [0, t]\}.$$

*Замечание 3.4. Если $dimE < \infty$, то для каждого $u \in C, S_{F,u} \neq \oslash$ [26].*

*$S_{F,u}$ непустое тогда и только, когда функция определенной как*

$$Y(t) = \inf\{\|v\| : v \in F(t, u)\}$$

*принадлежит* $L^1([0, T], R)$ [27].

Будем ставить в соответствие задачи (1.3) следующее функционально - интегральное уравнение

$$x(t) = g(t, x_t) + Q(t)[\varphi(0) - g(0, \varphi)] + \int\limits_0^t R(t - s)f(s)ds, \tag{3.3}$$

где

$$f \in S_{F,x} = \{f \in L^1(J, E) : f(t) \in F(t, x_t) \text{ для п.в. } t \in J\}.$$

*Определение 3.5. Функция $x : (-h, T) \to E, T > 0$ называется слабым решением задачи (1.3), если $x(t) = f(t), t \in [-h, 0]$ и существует $v \in L^1(J, E)$ такая, что $v(t) \in F(t, x_t)$ п.в. на $[0, T]$ и удовлетворяет уравнение (3.3).*

Теперь можно сформулировать и доказать основной результат этого раздела.

*Теорема 3.6. Пусть выполняются условия (H1)-(H4). Тогда задача (1.2) имеет слабое решение на $[-h, T]$.*

Доказательство. Переходим от задачи (1.3) к задаче о неподвижной точке. Рассмотрим многозначный оператор

$N : C([-h, t], E) \to P(C)(P(C)$ - непустое подмножество в пространстве C) определенный равенством $N(h) = h$ в виде

$$h(t) = \begin{cases} \varphi(t), t \in [-h, 0] \\ g(t, x_t) + Q(t)[\varphi(0) - g(o, \varphi)] + \int\limits_0^t R(t - s)f(s)ds, F, x. \end{cases}$$

Ясно, что неподвижные точки оператора $N$ являются слабыми решениями задачи (1.3).

Докажем, что оператор $N$ является вполне непрерывным, ограниченным, замкнутым и выпуклым множеством значений, и кроме того, $N$ будет полунепрерывным сверху. Доказательство состоит из нескольких шагов.

Шаг 1. Установим, что $Nx$ выпуклое для каждого $x \in C$. В самом деле, если $h_1$ и $h_2$ принадлежат $Nx$, то существуют $f_1, f_2 \in S_{F,x}$ такие, что для каждого $t \in J$ и $i = 1, 2$ получим

$$h_i(t) = g(t, x_t) + Q(t)[\varphi(0) - g(0, \varphi)] + \int\limits_0^t R(t-s) f_i(s) ds.$$

Пусть $0 \le \lambda \le 1$. Тогда для каждого $t \in J$ имеем

$$(\lambda h_1 + (1-\lambda) h_2)(t) = q(t, x_t) + Q(t)[\varphi(0) - g(0, \varphi)] + \int\limits_0^t R(t-s)[\lambda_1 f_1(s) + (1-\lambda) f_2(s)] ds.$$

Известно, что из выпуклости $F$ следует выпуклость $S_{F,x}$. Тогда $\lambda h_1 + (1-\lambda) h_2 \in Nx$.

Шаг 2. Здесь докажем, что $N$ отображает ограниченные множества в ограниченные множества в $C$. Для этого достаточно показать, что существует положительная постоянная $c$ такая, что для каждого $h \in Nx, x \in B_r = \{x \in C : \|x\| \le r\}$ если только $\|h\|_c \le c$. Пусть $h \in Nx$. Тогда существует $f \in S_{F,x}$ такая что для каждого $t \in J$ имеем

$$h(t) = g(t, x_t) + Q(t)[\varphi(0) - g(0, \varphi)] + \int\limits_0^t R(t-s) f(s) ds.$$

Из условий (H3) и (H4) получим для каждого $t \in J$,

$$\|h(t)\| \le c_1 \|x_t\|_C + c_2 + \|Q(t)\| \|\varphi(0) - g(0, \varphi)\|_C + \| \int\limits_o^t R(t-s) f(s) ds \| \le$$

$$\le M \|\varphi\|_c + Mt[\|\varphi\| + c_1 \|\varphi\|_C + 2c_2] + Mt \sup_{x \in [0,c]} \Psi(x) ( \int\limits_0^t P(s) ds).$$

Тогда для каждого $h \in N(B_0)$ имеем

$$\|h\|_{C([-h,T]),E} \le N \|\varphi\|_C + MT[\|x_0\| + c\|\varphi\|_C + 2c_2] +$$

$$+ Mt \sup_{x \in [0,r]} \Psi(x) ( \int\limits_0^T P(s) ds) = C_3.$$

Шаг 3. На этом шаге покажем, что $N$ отображает ограниченные множества в равностепенно непрерывные множества. Пусть $t_1, t_2 \in J, 0 < t_1 < t_2$ и пусть $Br = \{x \in C : \|x\|_{C(J.E)} \le r\}$ ограниченные множества в $C(J.E)$. Для каждого $x \in Br$ и $h \in Nx$ найдется $f \in S_{F,x}$ такой, что для $t \in J$

$$h(t) = g(t, x_t) + Q(t)[\varphi(o) - g(0, \varphi)] + \int\limits_0^t R(t-s) f(s) ds.$$

Таким образом,

$$\|h(t_1)-h(t_2)\| \leq \|g(t_1,x_{t_1})-g(t_2,x_{t_2})\|+$$

$$+\|Q(t_1)-Q(t_2)\|\|\varphi(0)-g(0,\varphi)\|+$$

$$\int\limits_0^{t_2}\|R(t_2-s)-R(t_1-s)\|dt+\|\int\limits_{t_1}^{t_2}R(t_1-s)f(s)ds\| \leq$$

$$\leq q\|x_{t_1}-x_{t_2}\|_C+\|Q(t_1)-Q(t_2)\|[\|\varphi(0)\|+c_1\|\varphi\|_C+c_2]+$$

$$+\int\limits_0^{t_2}\|R(t_2-s)-R(t_1-s)\|\|f(s)\|ds+\int\limits_{t_1}^{t_2}\|R(t_1-s)\|\|f(s)\|ds.$$

При $t_1 \to t_2$ правая часть неравенства стремится к нулю. Равностепенная непрерывность для случаев $t_1 < t_2 \leq 0$ и $t_1 \leq 0 \leq t_2$ очевидна.

Как следствие шагов 1 и 2, (H2) и (H1) вместе с теоремой Арцела-Асколи получим, что $N : C \to 2^C$ является компактным многозначным оператором, и следовательно, является уплотняющим отображением.

Шаг 4. $N$ имеет замкнутый график. Пусть $y_n \to y_*, h_n \in Ny_n$ и $h_n \to h_*$. Мы должны доказать, что существует $f_n \in S(F,x_n)$ такая, что для $t \in J$

$$h_n(t)=g(t,(x_t)_n)+Q(t)[\varphi(0)-g(0,\varphi)]+\int\limits_0^t R(t-s)f_n(s)ds.$$

Докажем, что существует $f_* \in S_{F,x}$ такая, что для $t \in J$

$$h_*(t)=g(t,(x_t)_*)+Q(t)[\varphi(0)-g(0,\varphi)]+\int\limits_0^t R(t-s)f_*(s)ds.$$

Более конкретно, при $n \to \infty$ имеем

$$\|(h_n-Q(t)[\varphi(0)-g(0,\varphi)])-(h_*-Q(t))[\varphi(0)-g(0,\varphi)]\| \to 0$$

Рассмотрим теперь линейный непрерывный оператор $\Gamma : L^1(J,E) \to C(J,E)$ определенный равенством

$$f \to \Gamma(f)(t)=\int\limits_0^t R(t-s)f(s)ds$$

Из леммы 2 следует, что $\Gamma \circ S_F$ является замкнутым графиком оператора. Более того

$$h_n(t)-Q(t)[\varphi(0)-g(0,\varphi)]+g(t,(x_t)_n) \in \Gamma(S_{F,x}).$$

Поскольку $y_n \to y_*$, то из леммы 2 следует, что

$$h_*(t)-Q(t)[\varphi(0)-g(0,\varphi)]-g(t,(x_t)n)=\int\limits_0^t K(t-s)f_*(s)ds,$$

для некоторого $f_* \in S_{F,x}$. Следовательно, $N$ является вполне непрерывное многозначное отображение полунепрерывное сверху с замкнутыми выпуклыми значениями.

Чтобы доказать, что $N$ имеет неподвижную точку, нам понадобится еще один шаг.

Шаг 5. Множество

$$\Omega = \{x \in C : \lambda x \in Nx \text{ для некоторого } \lambda > 1\}$$

ограниченное. Пусть $x \in \Omega$. Тогда $\lambda x \in Nx$ для некоторого $\lambda \geq 1$. Таким образом существует $f \in S_{F,x}$ такая, что

$$x(t) = \lambda^{-1}[Q(t)[\varphi(0) - g(0,\varphi)] + \lambda^{-1} g(t, x_t) + \lambda^{-1} \int\limits_0^t R(t-s) f(s) ds, t \in J].$$

Отсюда и из (H3)-(H4) следует, что для каждого $t \in J$ получаем

$$\|x(t)\| \leq MT[\|\varphi(0)\| + c_1\|\varphi\|_C + 2c_2] + MT \int\limits_0^t p(s)\Psi(\|x_s\|)ds.$$

Рассмотрим функцию

$$\mu(t) = \sup\{\|x(s)\| : -h \leq s \leq t\}, t \in J$$

Пусть $t^* \in [-h, t]$ такое, что $M(t) = \|x(t^*)\|$. Если $t^* \in J$ то из предыдущего неравенства следует

$$\mu(t) \leq MT[\|\varphi(0)\| + c_1\|\varphi\|_C + 2c_2] + MT \int\limits_0^{t^*} p(s)\Psi(\|x_s\|)ds \leq$$

$$\leq MT[\|\varphi(0)\| + c_1\|\varphi\|_C + 2c_2] + MT \int\limits_0^{t^*} p(s)\Psi(\|M(s)\|)ds.$$

Если $t^* \in [-h, 0]$, то $\mu(t) \leq \|\varphi\|$ и предыдущее неравенство выполнено очевидным образом.

Тогда имеем

$$c = v(0) = MT[\|\varphi(0)\| + c_1\|\varphi\|_C + 2c_2]$$

$$\mu(t) \leq V(t), t \in J$$

$$v'(t) = Mc_1\mu(t) + MTp(t)\Psi(\mu t), t \in J.$$

Учитывая невозрастающий характер функции $\Psi$ получим

$$v'(t) \leq Mc_1 v(t) + MTp(t)\Psi(v(t)) \leq m(t)[v(t) + \Psi(v(t))], t \in J.$$

Отсюда следует, что для каждого $t \in J$

$$\int\limits_{v(0)}^{v(t)} \frac{ds}{S + \Psi(s)} \leq \int\limits_0^T m(s)ds < \int\limits_{v(0)}^{\infty} \frac{ds}{S + \Psi(s)}.$$

Из этого неравенства следует, что существует постоянная $L$ такая, что $v(t) \leq L, t \in J$ и следовательно, $\mu(t) \leq L, t \in J$. Поскольку, для каждого $t \in J$, $\|x_t\| < \mu(t)$, то имеем

$$\|x\|_{C([-h,T],E)} = \sup\{\|x(t)\| : -h \leq t \leq T\} \leq L,$$

где $L$, зависит только от $T$ и функций $p$ и $\varphi$. Это означает, что $\Omega$ ограничено.

Пусть $X := C$. Как следствие леммы 2.1 сделаем вывод о том, что $N$ имеет неподвижную точку, которая, которая является слабым решением (1.3).

## 4. Интегро-дифференциальные включения типа Хейла

В этом разделе рассмотрим разрешимость задачи (1.4). Пусть выполняются следующие дополнительные предположения:

(H5) Для каждого $t \in O$, $a(t,s)$ измерима на $[0,t]$ и

$$a(t) = esssup\{|a(t,s)|, 0 \leq s \leq t\}$$

ограничено на $J$.

(H6) Отображение $t \to a_t$ непрерывное из $J$ в $L^\infty(J,R)$, где $a_t(s) = a(t,s)$.

(H7) $\|F(t,u)\| = \sup\{|v| : v \in F(t,u)\} \leq p(t)\Psi(\|u\|)$ для п.в. $t \in J$ и $u \in J$ и $u \in C$, где $p \in L^1(J,R_+)$ и $\Psi : R_+ \to (0,\infty)$ непрерывная и возрастающая функция с оценкой

$$\int\limits_0^T m(s)ds < \int\limits_c^\infty \frac{ds}{s + \Psi(s)},$$

где $c = M\|\varphi\|_C + MT\{\|x\| + c_1\|\varphi\|_C + 2c_2\}$,

$$m(t) = \max\{Mc_1, MT^2 \sup_{t\in J} a(t)p(t)\} \text{ и } M = \sup\{\|Q(t)\|\}, t \in J.$$

Определим слабое решение задачи (1.4) с помошью функционально-интегрального уравнения

$$x(t) = g(t,x_t) + Q(t)[\varphi(0) + g(0,\varphi)]+$$

$$+\int\limits_0^t R(t-s)\int\limits_0^s a(s,\tau)f(\tau)d\tau ds, t \in J, \tag{4.1}$$

где

$$f \in S_{F,x} = \{f \in L^1(J,E) : f(t) \in F(t,x_t) \text{ для п.в. } t \in J\}.$$

*Определение 4.1. Функция $x : (-h,T) \to E, T > 0$ называется слабым решением задачи (1.4), если $x(t) = \varphi(t), t \in [-h,0]$ и существует $v \in L^1(J,E)$ такая, что $v(t) \in F(t,x_t)$ п.в. на $J$ и удовлетворяет функционально-интегральному уравнению (4.1).*

*Теорема 4.2. Пусть выполняются предположения (H1)-(H4) и (H5)-(H7). Тогда система (1.4) имеет по крайней мере одно слабое решение на $[-h,T]$.*

Доказательство. Пусть $C([-h,T],E)$ банаховое пространство непрерывных функций из $[-h,T]$ в $E$ оснащенное нормой

$$\|x\|_{C([-h,T],E)} = \sup\{\|x(t)\| : t \in [-h,T]\}.$$

Преобразуем задачу (1.4) в задачу о неподвижной точке. Рассмотрим многозначное отображение $N_1 : C([-h,T],E) \to 2^{C([-h,T],E)}$ определенное через $N_1 x$ и множества функций $h \in C$ таких, что

$$h(t) = \begin{cases} \varphi(t), \text{если } t \in [-h,0] \\ q(t,x_t) + Q(t)[\varphi(0) + g(o,\varphi)] + \int\limits_0^t R(t-s) \int\limits_0^s a(s,\tau) f(\tau) d\tau ds, t \in J, \end{cases}$$

где

$$f \in S_{F,x} = \{f \in L(J,E), f(t) \in F(t,x_t) \text{ для п.в. } t \in J\}.$$

Заметим, что неподвижные точки $N_1$ являются слабыми решениями (1.4).

Подобно тому как в теореме (3.1) мы можем показать, что $N_1$ является вполне непрерывным отображением имеющим ограниченную замкнутую выпуклую область значений и, кроме того, оно полунепрерывное сверху. Следовательно отображение $N_1$ является уплотняющим.

Мы повторим только шаг 5, т.е. покажем, что множество

$$N_1 = \{x \in C : \lambda x \in N_1 x \text{ для некоторых } \lambda > 1\}$$

является ограниченным.

Пусть $x \in N_1$. Тогда $\lambda x \in N_1 x$ для некоторого $\lambda > 1$. Таким образом, существует $f \in S_{f,x}$ такая, что

$$x(t) = \lambda^{-1} g(t,x_t) + \lambda^1 Q(t)[\varphi(0) + g(0,\varphi)] +$$

$$+\lambda^{-1} \int\limits_0^t R(t-s) \int\limits_0^s a(s,\tau) f(\tau) d\tau ds, t \in J.$$

Тогда из (H3)-(H4) вытекает, что для каждого $t \in J$ имеем

$$\|x(t)\| \leq M\|\varphi\| + MT[\|x(0)\| + C_1\|\varphi\|_C + 2C_2] +$$

$$+MT^2 \sup_{t \in J} a(t) \int\limits_0^t p(s)\Psi(\|x_s\|) ds.$$

Рассмотрим функцию

$$\mu(t) = \sup\{\|x(s)\| : -h \leq S \leq T\}, t \in J.$$

Пусть $t^* \in [-h,t]$ такая точка, что $\mu(t) = \|x(t^*)\|$. Если $t^* \in J$, то из предыдущего неравенства имеем для $t \in J$,

$$\mu(t) \leq M\|\varphi\| + MT[\|x\| + C_1\|\varphi\|_C + 2C_2] +$$

$$+MT^2 \sup_{t \in J} a(t) \int\limits_0^t P(s)\Psi(\|x_s\|) ds \leq$$

$$\leq M\|\varphi\| + MT[\|x\| + C_1\|\varphi\|_C + 2C_2] +$$

$$+MC_1\int\limits_0^t \mu(s)ds + MT^2\sup_{t\in J} a(t)\int\limits_0^t P(s)\Psi(\|x_s\|)ds.$$

Если $t \in [-h, 0]$, то $\mu(t) \leq \|\varphi\|$ и предыдущее неравенство выполняется.
Обозначим правую часть предыдущего неравенства через $v(t)$. Тогда имеем

$$C = v(0) = M\|\varphi\| + MT[\|x\| + C_1\|\varphi\|_C + 2C_2],$$

$$\mu(t) \leq v(t), t \in J,$$

$$v'(t) = M_1C_1\mu(t) + MT^2\sup_{t\in J} a(t)p(t)\Psi(\mu(t)), t \in J.$$

Пользуясь тем, что $\varphi$ является неубывающей функцией для $t > J$ получим

$$v'(t) \leq M_1C_1v(t) + MT^2\sup_{t\in J} a(t)\mu(t)\Psi(v(t)) \leq$$

$$\leq m(t)[v(t) + \Psi(v(t))].$$

Отсюда для каждого $t \in J$ имеем

$$\int\limits_{v(0)}^{v(t)} \frac{ds}{s+\Psi(s)} \leq \int\limits_0^T m(s)ds < \int\limits_{v(0)}^{\infty} \frac{ds}{s+\Psi(s)}.$$

Из этого неравенства следует, что существует постоянная $L$ такая, что $v(t) \leq L, t \in J$ и следовательно, $\mu(t) \leq L, t \in J$. Поскольку для каждого $t \in J, \|x_t\| \leq \mu(t)$ то имеем

$$\|x\|_{C([-h,T],E)} = \sup\{\|x(t)\|, -h < t \leq T\} < L,$$

где $L$ зависит только от $T$ и от функций $p$ и $\Psi$. Это означает, что $N_1$ ограниченное отображение.
Пусть $X = C$. Тогда из леммы 2.4 следует, что $N_1$ имеет слабое решение.

## 5. Пример

Для иллюстрации полученных выше абстрактных результатов рассмотрим дробное функциональное интегродифференциальное включение в частных производных вида

$$\frac{\partial^\alpha[v(t,\zeta) - qv(t-h,\zeta)]}{\partial t^\alpha} \in \frac{\partial^2 v(t,\zeta)}{\partial\zeta^2}+$$

$$\int\limits_0^t (t-s)\int\limits_{-\infty}^{S} \eta(s,\tau-s,\zeta)G(\tau,v(t-h),\zeta)d\tau ds, t\in[0,T], \zeta\in[0,\pi] \tag{5.1}$$

$$v(t,0) = v(t,\pi) = 0, t \in [0,T]$$

$$v(\theta,\zeta) = v_0(\theta,\zeta), \theta \in (\infty,0], \zeta = [0,\pi],$$

где $0 < \alpha < 1, G : [0,T] \times E \times [0,\pi] \to P(R)$ - многозначное отображение с компактным и выпуклым множеством значений.

Пусть $E = L^2[0,\pi]$. Определим оператор $A$ в виде

$$D(A) = \{u \in E : u'' \in E, u(0) = u(\pi) = 0\},$$

$$Au = u''.$$

Хорошо известно, что А является инфинитеземальным производящим оператором (генератором) аналитической полугруппы $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ на Е. В качестве фазового пространства берем $C_\gamma((-\infty,0],E)$ в виде

$$C_\gamma = \{\varphi \in C((-\infty,0]E) : \lim_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta}\varphi(\theta) \text{ существует в } E\}$$

с нормой

$$\|\varphi\|_{C_\gamma} = \sup\{e^{\gamma\theta}\|\varphi(\theta)\| : \theta \leq 0\}.$$

Для $t \in [0,T], \zeta \in [0,\pi]$ и $\varphi \in C_\gamma$ положим

$$x(t)(\zeta) = v(t,\zeta)$$

$$\varphi(\theta)(\zeta) = v_0(\theta,\zeta), \theta \in [-\infty,0],$$

$$a(t,s) = t - s$$

$$F(t,x_t)(\zeta) = \int_{-\infty}^{0} \eta(t,\theta,\zeta)G(t,\varphi(0,\zeta))d\theta.$$

Тогда задача (5.1) может быть представлена в виде (4.1). Приложение теоремы 4.2 дает следующий результат.

*Теорема 5.1. Пусть* $0 < \alpha < 1, q < 1, \varphi \in C_\gamma$. *Тогда система (5.1) допускает слабое решение на* $(-\infty,T]$.

## 6. Заключение

Найдены достаточные условия существования слабых решений дробных дифференциальных и интегро-дифференциальных включений типа Хейла в банаховом пространстве. Приводится пример иллюстрирующий абстрактные результаты статьи.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tolstonogov A., Differential Inclusions in a Banach Space // Springer, Netherlands, 2000.

2. Agarval R.P. et all, Viability theory and fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Functions, 151(3), pp. 563-580, 2005.

3. Kamenskii M.I. , Obukhovskii V.V. and Zecca P., Condencing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces // Walter de Grayter, Berlin, 2001.

4. Aubin J-P., Cellina A., Differential Inclusions-Set-valued Maps and Viability Theory// Springer, Berlin, 1984.

5. Auman R.J., Integrals of set-valued functions// An. Appl., 12, p. 1-12, 1965.

6. Aubin J.P., Clarke F.H., Monotone invariant solutions to differential inclusions. // J. London Math. Soc., 16, pp. 357-366, 1977.

7. Filippov A., Differential Equations with Discontinous Righthand Sides. // Control Systems, Springer, Netherlands, 1988.

8. Smirnov G.V., Introduction to the theory of Differential Inclusons. // Graduate Studies in Mathematics, v. 41, AMS, Providence, Rhode Island, 2002.

9. Feckan M., Wang J.R., Pospishil M., Fractional-Order Equations and Inclusions. // De Grayter, Berlin, 2017.

10. Benchohra M., Henderson J., Ntougas S. and Quahab A., Existence results for fractional order functional differential equations with infinity delay // J. Math. Anal. Appl., v.338, pp. 1340-1350, 2008.

11. Aissani Kh., Benchohra M., Ezzinbi K., Fractional Integro-Differential Inclusions with state-dependent delay. // Differential Inclusions, Control and Optimization, v. 34, pp.153-167, 2014.

12. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-G., On semilinear fractional order differential inclusions in Banach Spaces. // Fixed Point Theory, v. 18(1), pp. 269-292, 2017.

13. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-G., Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach Space. // Applicable Analys J., v. 96(4), pp. 571-591, 2017.

14. Hale J., Theory of Functional Differential Equations. // Springer, New York, 1977.

15. Илолов М., К теории абстракных эволюционных уравнений Хейла. // Докл. АН РТадж ССР, т. 33(7), сс. 430-433, 1990.

16. Илолов М., Функционально дифференциальные уранения Хейла с неограниченными операторами. // Вестник Тадж.Госуниверситета, №5: Математика, сс. 65-69, 1990.

17. Илолов М., Функционально-дифференциальные уравнения Хейла в банаховом пространстве. // Украинский математический журнал, т. 42(7), сс. 918-924, 1990.

18. Илолов М., Об уравнениях Хейла с неограниченными операторами в банаховом пространстве. // Докл. АН Тадж. ССР, т. 34(5), сс. 267-270, 1991.

19. Илолов М., Х.С. Кучакшоев, Д.Н. Гулджонов, О дробных линейных уравнениях Вольтерра в банаховых пространствах. // Доклады АН РТ, т. 61(2), сс. 113-120. 2018.

20. Илолов М., Гулджонов Д.Н., Рахматов Дж.Ш., Дробные интегро-дифференциальные включения типа Хейла в банаховом прострастве. //Известия АН РТ, отделение физ.-мат., хим.геол. и тех. наук, №1(174), сс. 7-17, 2019.

21. Илолов М., Обобщенные дробные производные Лиувилля-Лизоркина и некоторые их свойства. // Материалы Межд. научной Конференции, посвященной 80-летию академика В.А. Садовничего. // Москва, МАКС-Пресс, сс. 64-66. 2019.

22. Иосида К., Функциональный анализ. // Изд. "Мир Москва, 1967.

23. Akhmerov R.R., Kamenskii M.I., Potapov A.S., Rodkina A.E., Sadovskii B.N., Measures of Noncompactness and Condencing Operators. // Springer, Berlin, 1992.

24. Martelli M., A Rothe's Type Theorem for Noncompact A cyclic valued Map. // Bull. Un. Math. Ital., v. 4, pp.70-76, 1975/

25. Kilbas A.A., Srivastava Hary M. and Trujillo Juan J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations. // Elsevier Science BoV., Amsterdam, 2006.

26. Lasota A. and Opial Z., An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations. // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 13, pp. 781-786, 1965.

27. Hu S., Papageorgiou N.S., Handbook of Multivalued Analysis: Volume II. Applications. // Springer Science and Business Media, 2013.

## REFERENCES

1. Tolstonogov, A. “Differential Inclusions in a Banach Space“ 2000, *Springer, Netherlands.*

2. Agarval, R. P., et all. 2005, “Viability theory and fuzzy differential equations“. *Fuzzy Sets and Functions*, vol.151, no.3, pp. 563-580.

3. Kamenskii, M. I., Obukhovskii, V. V., & Zecca, P. 2001, “ Condencing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces “ *Walter de Grayter, Berlin,.*

4. Aubin, J.-P. Cellina, A. 1984, “Differential Inclusions-Set-valued Maps and Viability Theory“, *Springer, Berlin.*

5. Auman, R. J., 1965, “Integrals of set-valued functions“// *An. Appl.*, 12, p. 1-12.

6. Aubin, J.-P. Clarke, F. H., 1977, “Monotone invariant solutions to differential inclusions.“, *J. London Math. Soc.*, 16, pp. 357-366.

7. Filippov, A. 1988, “Differential Equations with Discontinous Righthand Sides.“, *Control Systems, Springer*, Netherlands.

8. Smirnov, G. V., 2002, “Introduction to the theory of Differential Inclusons.“, *Graduate Studies in Mathematics*, v. 41, AMS, Providence, Rhode Island.

9. Feckan, M. Wang, J. R., Pospishil, M. 2017, “Fractional-Order Equations and Inclusions.“, *De Grayter, Berlin.*

10. Benchohra, M. Henderson, J. Ntougas, S. & Quahab, A. 2008, “Existence results for fractional order functional differential equations with infinity delay“, *J. Math. Anal. Appl.*, v.338, pp. 1340-1350.

11. Aissani, Kh. Benchohra, M. Ezzinbi, K. 2014, “Fractional Integro-Differential Inclusions with state-dependent delay.“, *Differential Inclusions, Control and Optimization*, v. 34, pp.153-167.

12. Kamenskii, M. Obukhovskii, V. Petrosyan, G. Yao, J.-G. 2017, “ On semilinear fractional order differential inclusions in Banach Spaces.“, *Fixed Point Theory*, v. 18(1), pp. 269-292.

13. Kamenskii, M. Obukhovskii, V. Petrosyan, G. Yao, J.-G. 2017, "Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach Space.", *Applicable Analys J.*, v. 96(4), pp. 571-591.

14. Hale, J. 1977, "Theory of Functional Differential Equations.", *Springer, New York.*

15. Ilolov, M. 1990, "On the theory of abstract evolutionary Hale equations.", *Docl. AS Taj SSR*, т. 33(7), pp. 430-433.

16. Ilolov, M. 1990, " Functional differential Hale equations with unbounded operators.", *Bulletin of the Taj State University, Mathematics*, №5, pp. 65-69.

17. Ilolov, M. 1990, " Functional differential Hale equations in a Banach space.", *Ukrainian Mathematical Journal*, т. 42(7), pp. 918-924.

18. Ilolov, M. 1991, " On Hale equations with unbounded operators in a Banach space.", *Docl. AS Taj. SSR*, т. 34(5), pp. 267-270.

19. Ilolov, M. Kuchakshoev, Kh. S., Guljonov, D. N., 2018, " On fractional linear Volterra equations in Banach spaces.", *Reports of the Academy of Sciences of the RT*, т. 61(2), pp. 113-120.

20. Ilolov, M. Guljonov, D. N., Rahmatov, J. Sh., 2019, " Hale type fractional integro-differential inclusions in Banach space.", *News of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Department of Physical, Mathematical, Chemical, Geological and Technical Sciences*, №1(174), pp. 7-17, .

21. Ilolov, M. 2019, " Generalized fractional Liouville-Lizorkin derivatives and some of their properties. // Materials Int. scientific conference dedicated to the 80th anniversary of academician V. A. Sadovnichii. ", *Moscow, MAKS-Press*, pp. 64-66.

22. Yosida, K. 1967, " Functional analysis ", *"Mir Moscow.*

23. Akhmerov, R. R., Kamenskii, M. I., Potapov, A. S., Rodkina, A. E., Sadovskii, B. N., 1992, " Measures of Noncompactness and Condencing Operators.", *Springer, Berlin.*

24. Martelli, M. 1975, "A Rothe's Type Theorem for Noncompact A cyclic valued Map.", *Bull. Un. Math. Ital.*, v. 4, pp.70-76.

25. Kilbas, A. A., Srivastava, Hary M. & Trujillo, Juan J. 1975, " Theory and Applications of Fractional Differential Equations.", *Elsevier Science BoV., Amsterdam.*

26. Lasota, A. & Opial, Z. 1965, "An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations.", *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 13, pp. 781-786.

27. Hu, S. Papageorgiou, N. S., 2013, "Handbook of Multivalued Analysis: Volume II. Applications.", *Springer Science and Business Media.*


Получено 14.08.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.