ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196

Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея–Касса–Купманса

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

Козко Артем Иванович — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Лужина Любовь Михайловна — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: lluzhina@gmail.com
Попов Антон Юрьевич — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, кафедра математического анализа, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: —
Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В статье исследуется полная полезность экономической деятельности на конечном отрезке времени в случае, когда функция полезности допускает с высокой точностью приближение линейной функцией. Приводится оценка наилучшего приближения функции полезности на отрезке с заданным отношением концов линейной функцией.

Ключевые слова: математическая модель, задача Рамсея-Касса-Купманса, конкурентные домохозяйства, максимизация полной полезности, аналитическая аппроксимация.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Оценка необходимости начального экономического ресурса в задаче Рамсея-Касса-Купманса // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 188–196.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196

Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey–Kass–Koopmans problem

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii

Kozko Artem Ivanovich — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Department of mathematical analysis, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Luzhina Lyubov Mihailovna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Department of mathematical analysis, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: lluzhina@gmail.com
Popov Anton Yurievich — doctor of physical and mathematical Sciences, leading researcher, Department of mathematical analysis, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: —
Chirskii Vladimir Grirorevich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Department of mathematical analysis, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

The article investigates the full utility of economic activity in a finite period of time in the case when the utility function admits with high accuracy the approximation of a linear function. The estimation of the best approximation of the utility function on the segment with a given ratio of the ends of the linear function is given.

Keywords: mathematical model, Ramsey-Kass-Koopmans problem, competitive households, maximizing total utility, analytical approximation.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii, 2019, "Assessment of the need for an initial economic resource in the Ramsey-Kass-Koopmans problem" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 188–196.

1. Введение

В данной работе продолжаются исследования, начатые в [1], [2].

Предполагается заданным начальный капитал $K(0) = K_0$. Требуется вложить в производство часть имеющегося капитала K_0 в период времени $0 \leqslant t \leqslant T$, в течение которого планируется экономическая деятельность, уменьшив капитал до заданного значения $K_1 = K_1(T)$ таким образом, чтобы полная полезность экономической деятельности, выражаемая интегралом

$$P = \int_0^T U\left(f(K(t)) - \dot{K}(t)\right)e^{-\rho t}dt \tag{1}$$

была максимальной.

В данном исследовании мы рассмотрим случай, когда функция полезности U на области значений, которые она может принимать в изучаемом процессе, «достаточно хорошо» аппроксимируется линейной функцией. Такая ситуация имеет место для степенных функций $U(x) = x^d$, когда показатель степени d лежит на интервале $(0,1)$, а отрезок изменения переменной x имеет «не очень большое» отношение правого конца к левому (например, $a \leqslant x \leqslant 2a$ или $a \leqslant x \leqslant 3a$ и т.п.). Вопрос оценки погрешности приближения степенной функции линейной мы обсудим в §3. Сейчас лишь отметим, что относительная погрешность приближения функции $U(x) = x^d$ на отрезке вида $a \leqslant x \leqslant \lambda a, \quad \lambda > 1$, линейной функцией не превышает

$$\frac{(\lambda-1)^2}{64} \tag{2}$$

независимо от значения $d \in (0,1)$. В частности, относительная погрешность приближения x^d линейной функцией на отрезке $a \leqslant x \leqslant 2a$ оказывается заведомо меньше 1.6%, какой бы показатель степени $d \in (0,1)$ мы ни взяли. Такой уровень погрешности обычно не выше даваемой самой моделью при использовании ее для описания реального процесса.

Отметим, что функция полезности чаще используется вида $U(x) = \frac{x^{1-\theta}-1}{1-\theta}$, $\theta > 0$, $\theta \neq 1$ и при $\theta = 1$ вида $U(x) = \ln x$ см. [4], [11], [12], [13], также применяется $U(x) = \frac{(c/x^{\gamma})^{1-\sigma}}{1-\sigma}$, $\gamma \in [0;1)$, $\sigma > 1$ см. [14], [15] или $U(x) = \frac{x^{1-\theta}}{1-\theta}$, $\theta > 0$, $\theta \neq 1$ см. [16]. Ограничимся в дальнейшем случаем $U(x) = x^d$.

2. Необходимый уровень начального капитала

Предположим, что с достаточно высокой точностью имеет место приближенное равенство

$$U(x) \approx Ax + B, \tag{3}$$

где A, B – некоторые постоянные. Тогда полная полезность (1) приближенно равна

$$P \approx \int_0^T \Big(A\Big(f(K(t)) - \dot{K}(t)\Big) + B\Big)e^{-\rho t}dt. \tag{4}$$

Заметим, что в силу возрастания функции U постоянная A в приближенном равенстве (3) положительна. Поэтому приближенное равенство (4) показывает, что требуется максимизировать интеграл

$$P_1 = \int_0^T \Big(f(K(t)) - \dot{K}(t)\Big)e^{-\rho t}dt \tag{5}$$

на классе непрерывных невозрастающих функций $K(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, имеющих на интервале $0 < t < T$ кусочно непрерывную производную и удовлетворяющих граничным условиям

$$K(0) = K_0, \quad K_1(T) = K_1. \tag{6}$$

Преобразуем интеграл (5), проинтегрировав по частям входящее в него выражение

$$\int_0^T \dot{K}(t)\, e^{-\rho t}dt = \int_0^T e^{-\rho t}dK(t) = K(t)\, e^{-\rho t}\Big|_0^T - \int_0^T K(t)\, de^{-\rho t} =$$

$$K(T)\, e^{-\rho T} - K(0) + \rho \int_0^T K(t)\, e^{-\rho t}dt. \tag{7}$$

Из (5), (7), (6) находим

$$P_1 = K_0 - K_1 e^{-\rho T} + \int_0^T [f(K(t)) - \rho K(t)]e^{-\rho t}\, dt.$$

В результате мы пришли к задаче максимизации интеграла

$$P_2 = \int_0^T [f(K(t)) - \rho K(t)] e^{-\rho t}\, dt$$

на описанном выше классе функций $K(t)$.

Положим

$$f_\rho(K) = f(K) - \rho K.$$

Согласно введенным обозначениям

$$P_2 = \int_0^T f_\rho(K(t))\, e^{-\rho t}\, dt. \tag{8}$$

Ясно, что чем $f_\rho(K(t))$ больше, тем больше интеграл (8). В рассматриваемой задаче функция $K(t)$ является убывающей. Эти соображения подсказывают необходимость исследования монотонности функции $f_\rho(K)$. В рассматриваемых экономических моделях функцию f, выражающую зависимость производства продукта от капитала, обычно берут дифференцируемой, возрастающей и вогнутой см. [3]–[6]. Потребуем также, чтобы выполнялось предельное соотношение

$$\lim_{K \to +\infty} f'(K) = 0.$$

(Это верно, если, например, $f(K) = c \cdot K^p$, $0 < p < 1$, или $f(K) = c \cdot \ln(1 + K)$, $c > 0$ см. [4], [13].) Из сказанного видно, что, когда положительное число ρ «невелико» (меньше $f'_{\text{пр}}(0)$), имеет место следующая картина. Уравнение $f'(K) = \rho$ имеет единственный корень (обозначим его $\varkappa_\rho$), функция f_ρ возрастает на интервале $(0,\ \varkappa_\rho)$, в точке $\varkappa_\rho$ достигает своего максимума и убывает на луче $(\varkappa_\rho, +\infty)$. (Заметим, что производная f' является непрерывной в силу ее монотонности и теоремы Дарбу, согласно которой производная всюду дифференцируемой функции принимает все промежуточные значения; это показывает, что корень уравнения $f'(K) = \rho$ действительно существует, а единственен он также ввиду монотонности f'.) Следующий рисунок демонстрирует типичное поведение функции f_ρ.

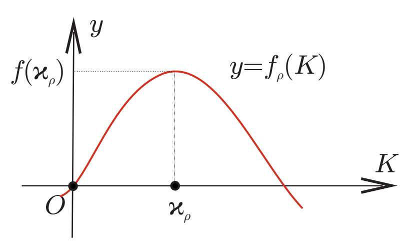

Рис. 1

Возможны два случая: либо $K_0 \leqslant \varkappa_\rho$, либо $K_0 > \varkappa_\rho$.

Рассмотрим первый из этих случаев, когда имеющийся в начальный момент времени в нашем распоряжении капитал относительно невелик – не превосходит «критического» значения $\varkappa_\rho$. Возрастание функции f_ρ на полуинтервале $0 < K \leqslant \varkappa_\rho$ показывает, что, как бы мы ни выбирали убывающую функцию $K(t)$, функция $f_\rho(K(t))$ также окажется убывающей и интеграл P_2 будет меньше, чем если бы мы держали $K(t)$ на постоянном уровне. Другими словами, как бы мы ни вкладывали капитал в дело в данной ситуации, эффект не будет больше, чем если не расходовать ресурс K_0 вообще. Этот (на первый взгляд) парадоксальный вывод имеет простое объяснение. Для рассматриваемого вида экономических систем, определяемых (в математическом плане) функцией f и числом ρ, имеется минимальное критическое значение первоначального капитала, не обладая которым предпочтительнее устраниться от вложений в такую экономическую систему. Относительно небольшой (не превосходящий $\varkappa_\rho$) первоначальный капитал не позволит эффективно развить данный бизнес, и с таким уровнем начального экономического ресурса в данном деле разумнее вообще не участвовать.

Рассмотрим второй случай: $K_0 > \varkappa_\rho$. В этом случае вкладывать капитал в данное дело имеет смысл, но не рекомендуется его «спускать» ниже критического уровня $\varkappa_\rho$: то есть разумно сохранить неравенство $\varkappa_\rho < K_1$. Уменьшение $K(t)$ ниже $\varkappa_\rho$ уже не даст в данной системе экономического эффекта. Поэтому, если K_0 не слишком значительно превосходит $\varkappa_\rho$ (например, $K_0 = \frac{3}{2}\varkappa_\rho$ или $K_0 = 2\varkappa_\rho$), то можно порекомендовать использовать более сложную экономическую схему, где часть капитала дается в рост под проценты, а часть вкладывается в производство. Анализ таких схем см. в [3]–[6].

3. Оценка наилучшего приближения степенной функции линейной на отрезке с заданным отношением концов

Сначала сделаем общие замечания. Пусть U – действительнозначная вогнутая либо выпуклая функция на отрезке $[a,b]$. Через $\mathcal{L}_U$ обозначим линейную функцию, совпадающую с U на концах отрезка:

$$\mathcal{L}_U\,(x) = U\,(a) + \frac{U\,(b) - U\,(a)}{b-a}\,(x-a) \equiv U\,(b) + \frac{U\,(b) - U\,(a)}{b-a}(b-x). \tag{9}$$

Введем разность

$$\triangle\,(x) = U\,(x) - \mathcal{L}_U\,(x)\,. \tag{10}$$

Если функция U вогнута, то $\triangle\,(x) > 0$ на (a,b), а если выпукла, то $\triangle\,(x) < 0$ на (a,b). Поскольку функция $\triangle\,(x)$ обращается в нуль на концах отрезка $[a,b]$ и знакопостоянна внутри отрезка, то наибольшее значение (в случае вогнутости U) и наименьшее значение (в случае выпуклости U) она принимает в некоторой точке интервала (a,b). Обозначим эту точку ξ. Предполагая функцию U дифференцируемой на интервале (a,b), получаем необходимое условие экстремума

$$\triangle'\,(\xi) = 0. \tag{11}$$

Из (9), (10) видно, что равенство (11) равносильно следующему:

$$U'\,(\xi) = \frac{U\,(b) - U\,(a)}{b-a}. \tag{12}$$

Тем самым, точка, в которой модуль разности (10) достигает максимума, является точкой, существование которой (для произвольной функции $U \in C[a,b] \cap D(a,b)$) утверждается в теореме Лагранжа о конечных приращениях. В случае строгой вогнутости (или выпуклости) функции U, то есть отсутствия у ее графика линейных участков, такая точка ξ единственна ввиду строгой монотонности производной U'. Поведение функций U и $\mathcal{L}_U$ изображено на следующем рисунке.

Обозначим

$$\triangle = \begin{cases} \max_{a\leqslant x\leqslant b} \triangle\,(x) = \triangle(\xi), \text{если функция } U \text{ вогнута}, \\ \min_{a\leqslant x\leqslant b} \triangle\,(x) = \triangle(\xi), \text{если функция } U \text{ выпукла}, \end{cases} \tag{13}$$

и положим

$$\widetilde{\mathcal{L}_U}\,(x) = \mathcal{L}_U\,(x) + \frac{\triangle}{2}. \tag{14}$$

Поскольку разность

$$\widetilde{\triangle}\,(x) = U\,(x) - \widetilde{\mathcal{L}_U}\,(x) \tag{15}$$

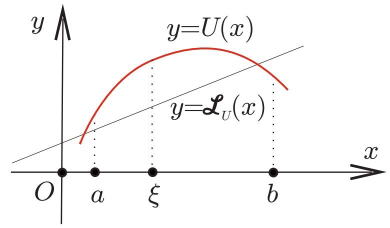

Рис. 2

отличается от $\triangle(x)$ на константу, то она также имеет на интервале (a, b) единственный экстремум, причем в той же самой точке ξ. Следовательно,

$$\max_{x\in[a,b]}\left|\widetilde{\triangle}(x)\right| = \max\left(\left|\widetilde{\triangle}(a)\right|, \left|\widetilde{\triangle}(\xi)\right|, \left|\widetilde{\triangle}(b)\right|\right).$$

Но, как видно из соотношений (13)–(15), все три числа $\widetilde{\triangle}(a)$, $\widetilde{\triangle}(\xi)$, $\widetilde{\triangle}(b)$ по абсолютной величине совпадают и их модуль равен $|\triangle|/2$. Заметим, наконец, что поскольку разность (15) трижды принимает одинаковые по модулю значения и при переходе от одного к другому меняет знак, то по теореме Чебышева об альтернансе (см. [8], [10]) $\widetilde{\mathcal{L}_U}$ приближает функцию U на отрезке $[a, b]$ лучше других линейных функций. Общая теория приближений функций многочленами изложена в [8], [9].

Итак, среди всех линейных функций выпуклую или вогнутую функцию U на отрезке $[a, b]$ в равномерной метрике лучше всего приближает $\widetilde{\mathcal{L}_U}$ и абсолютная погрешность приближения равна

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|U(x) - \widetilde{\mathcal{L}_U}(x)\right| = \frac{\triangle}{2}. \tag{16}$$

Оценим сверху величину $|\triangle|$ при дополнительном предположении

$$U \in C^1(a,b), \quad \left|U'(\alpha) - U'(\beta)\right| \leqslant M|\alpha - \beta| \quad \forall\alpha,\beta \in (a,b), \tag{17}$$

где $M > 0$ – некоторая постоянная. В этом случае говорят, что производная U' удовлетворяет условию Липшица первого порядка с постоянной M. Как известно, данное условие выполняется при наличии на (a, b) второй производной U'' всюду, кроме, может быть, счетного множества точек, и оценки

$$\sup_{x\in(a,b)}\left|U''(x)\right| = M < +\infty. \tag{18}$$

Соответствующий материал изложен, например, в [8].

Поскольку $\triangle(a) = \triangle(b) = 0$, то

$$\triangle(\xi) = \int_a^\xi \triangle'(t)\,dt = -\int_\xi^b \triangle'(t)\,dt. \tag{19}$$

В силу (17) и (11) имеем

$$\left|\triangle'(t)\right| = \left|\triangle'(t) - \triangle'(\xi)\right| \leqslant M|t-\xi|.$$

Отсюда и из (19) находим

$$|\triangle(\xi)| \leqslant \min\left(\int_a^\xi M|t-\xi|\,dt, \int_\xi^b M|t-\xi|\,dt\right) = M\cdot\min\left(\frac{(\xi-a)^2}{2}, \frac{(b-\xi)^2}{2}\right) \leqslant M\frac{(b-a)^2}{8}.$$

Эта оценка вместе с (16) приводит к неравенству

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|U(x)-\widetilde{\mathcal{L}_U}(x)\right| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{16}. \tag{20}$$

Посмотрим, что дает оценка (20) для приближения линейной функцией степени $U(x)=x^d$ на отрезке $[a,b]$ в случае, когда показатель степени d лежит на интервале $(0,1)$. В этом случае функция U является вогнутой,

$$U''(x)=d(d-1)x^{d-2}<0,$$

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\left|U''(x)\right| = \left|U''(a)\right| = d(1-d)a^{d-2}.$$

Следовательно, относительная погрешность приближения функции $U(x) = x^d$ линейной функцией $\widetilde{\mathcal{L}_U}(x)$ на отрезке $[a,b]$, равная по определению

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\frac{U(x)-\widetilde{\mathcal{L}_U}(x)}{U(x)}\right|,$$

заведомо не превосходит

$$\frac{\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|U''(x)\right|}{\min_{a\leqslant x\leqslant b}U(x)}\cdot\frac{(b-a)^2}{16}\leqslant\frac{d(1-d)a^{d-2}}{a^d}\cdot\frac{(b-a)^2}{16}=\frac{d(1-d)}{16}\cdot\left(\frac{b-a}{a}\right)^2.$$

Отсюда, учитывая, что $\max_{0\leqslant d\leqslant 1}d(1-d)=\frac{1}{4}$, $b=\lambda a$, выводим оценку сверху (2) относительной погрешности приближения степенной функции x^d линейной независимо от значения $d\in(0,1)$.

4. Заключение

На основании проведенного исследования можно сделать следующий вывод. В задаче Рамсея – Касса – Купманса, где рассматривается математическая модель, определяемая функцией полезности U, функцией f, выражающей зависимость производства продукта от капитала и ставкой временного предпочтения ρ имеется некоторый уровень начального экономического ресурса, которым заведомо необходимо обладать, приступая к экономической деятельности.

В предположении, что функция U на области значений, принимаемых в исследуемом процессе вложения капитала "достаточно хорошо"приближается линейной функцией, а функция f имеет монотонно стремящуюся на бесконечности к нулю производную, желательно, чтобы начальный экономический ресурс K_0 превосходил (предпочтельно в несколько раз) величину $K=\varkappa_\rho$, являющуюся корнем уравнения $f'(K)=\rho$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея-Касса-Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

2. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея-Касса-Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. (готовится к выходу в печать)

3. Rahul Giri. Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model // http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf

4. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

5. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September, P. 908-931.

6. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf

7. Зорич В. А. Математический анализ // Часть II. – Изд. 4-е, испр. – М.: МЦНМО, 2002. – XIV. c. 794.

8. DeVore, Ronald A., Lorentz, George G. Constructive Approximation // Springer, Berlin, Germany. 1993. Vol. 303. P. 449.

9. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации // 2 изд., М., 1965.

10. Dzyadyk V. K., Shevchuk I. A. Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials // Walter de Gruyter, 2008. P. 480.

11. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250

12. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory, Vol. 44, No. 2, 2010.

13. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf, 2010.

14. Abel A. B. Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with the Joneses // American Economic Review. 1990. Vol. 80, № 2. P. 38–42.

15. Carroll Ch. D., Overland J. R., Weil D. N. Saving and Growth with Habit Formation // American Economic Review. 2000. Vol. 90, № 3. P. 341-355.

16. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.

REFERENCES

1. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey-Kass-Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow.* pp. 87-88.

2. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, "On the Ramsey-Kass-Koopmans problem for consumer choice", *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review.* (preparing to go to press)

3. Rahul, Giri. "Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model", 2018, *http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.*

4. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, “Economic growth (2nd ed.)“, *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.

5. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, “Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model“, *American Economic Review.* vol. 83, September, pp. 908-931.

6. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, “Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model“, *UC Berkeley Fall*, https://eml.berkeley.edu/˜webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans _pog.pdf

7. Zorich, V. A. 2004, “Mathematical Analysis“, *Springer*, ISBN 3540403868, pp. 574.

8. DeVore, Ronald A., Lorentz, George G. 1993, “Constructive Approximation“, *Springer, Berlin, Germany*, vol. 303, pp. 449.

9. Achiezer, N. I. 1956, “Theory of approximation“, Translated by Charles J. Hyman. *New York: Frederick Ungar Publishing*, pp. 307.

10. Dzyadyk, V. K., Shevchuk I. A. 2008, “Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials“, *Walter de Gruyter*, pp. 480.

11. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, “Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)“, *CESifo Working Paper Series No. 1701.* Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250

12. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. “When Economic Growth is Less than Exponential“, 2010. *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, 2010.

13. Groth, C. 2010, “Chapter 10: The Ramsey Model“, *Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf.*

14. Abel, A. B. 1990, “Asset Prices under Habit Formation and Catching Up with the Joneses“, *American Economic Review*, vol. 80, no. 2, pp. 38–42.

15. Carroll, Ch. D., Overland, J. R., Weil, D. N. 2000, “Saving and Growth with Habit Formation“, *American Economic Review*, vol. 90, no. 3, pp. 341-355.

16. Romer, D. “Advanced Macroeconomics. 3rd ed“, *New York: McGraw-Hill/Irwin*, 2006. pp. 651.

Получено 4.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.