ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 517.948 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-170-187

О разделимости и коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в весовом пространстве

О. Х. Каримов

Каримов Олимжон Худойбердиевич —кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий отделом теории функций и функционального анализа Института математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан (г. Душанбе).
e-mail: karimov_olim72@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена установлению коэрцитивных оценок и доказательств теорем разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка. На основе полученных коэрцитивных оценок исследуется коэрцитивная разрешимость нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$. Проблемой разделимости дифференциальных операторов впервые занимались математики В.Н.Эверитт и М.Гирц. Они подробно изучали разделимость оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Дальнейшее развитие этой теории принадлежит К.Х.Бойматову, М.Отелбаеву и их ученикам. Основная часть опубликованных работ по этой теории относится к линейным операторам. Существуют лишь отдельные работы, в которых рассматриваются нелинейные дифференциальные операторы, представляющие собой слабые нелинейные возмущения линейных операторов. Случай, когда исследуемый оператор строго нелинейный, т.е. его нельзя представить в виде слабого возмущения линейного оператора, рассмотрен лишь в некоторых отдельных работах. Полученные здесь результаты также относятся к этому малоизученному случаю. В работе исследованы коэрцитивные свойства нелинейного дифференциального оператора второго порядка

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u(x),$$

в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$ и на основе коэрцитивных оценок доказана его разделимость в этом пространстве. Рассматриваемый оператор не является слабым возмущением линейного оператора, т.е. является строго нелинейным. На основе полученных коэрцитивных оценок и разделимости исследуется разрешимость нелинейного дифференциального уравнения в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Ключевые слова: Дифференциальный оператор, коэрцитивные оценки, нелинейность, разделимость, разрешимость, гильбертово пространство, весовое пространство.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:

О. Х. Каримов О разделимости и коэрцитивной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в весовом пространстве // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 170–187.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 517.948 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-170-187

On separability and coercive solvability of second-order nonlinear differential equations in the weight space

O. Kh. Karimov

Karimov Olimzhon Xudoyberdiyevich —candidate of physical and mathematical Sciences, head of the Department of theory of functions and functional analysis, Institute of mathematics named after A. Djuraev, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan (Dushanbe).
e-mail: karimov_olim72@mail.ru

Abstract

The work focuses on obtaining coercive estimates and separability theorems of second-order nonlinear differential operators. Based on the obtained coercive estimates, the coercive solvability of the second-order nonlinear differential equations in the space $L_{2,\rho}(R^n)$ is investigated. For the first time the problem of the differential operators separability was dealt with by the English mathematicians V.N.Everitt and M.Girz. They studied in details the separability of the Sturm-Liouville operator and its degrees. Further development of this theory belongs to K.H.Boimatov, M.Otelbayev and their students. The main part of the published works on this theory applies to linear operators. There are only individual works that consider nonlinear differential operators, which are a weak nonlinear perturbations of linear operators. The case where the operator under study is strictly nonlinear, that is, it cannot be represented as a weak perturbation of the linear operator, is considered only in some individual separate works. The results obtained in this work also refer to this insufficiently studied case. The paper examined the coercive properties of a second-order nonlinear differential operator in the Hilbert space $L_{2,\rho}(R^n)$

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u(x),$$

and on the basis of coercive estimates, its separability in this space has been proved. The operator under study is not a weak perturbation of the linear operator, i.e. is strictly nonlinear. Based on obtained coercive estimates and separability, solvability of nonlinear differential equation in the space $L_{2,\rho}(R^n)$ is investigated.

Keywords: Differential operator, coercive estimates, nonlinearity, separability, solvability, Hilbert space,weight space.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
O. Kh. Karimov, 2019, "On separability and coercive solvability of second-order nonlinear differential equations in the weight space", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 170–187.

1. Введение

В настоящей работе исследуется разделимость нелинейного дифференциального оператора второго порядка вида

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u,$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, $b_j(x) \in C^1(R^n)$.

Установлены соответствующие неравенства коэрцитивности для оператора $L[u]$, и получены новые достаточные условия разделимости этого оператора в весовом пространстве. На основе полученных результатов по разделимости и коэрцитивных оценок изучается разрешимость дифференциального уравнения в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Основы теории разделимости дифференциальных операторов заложены в серии работ В.Н.Эверитта и М.Гирца, опубликованных в начале семидесятых годов прошлого столетия. В статьях [1]–[4] был получен ряд важных результатов относительно проблемы разделимости оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Существенный вклад в дальнейшее развитие этой теории внесли К.Х.Бойматов, М.Отелбаев и их ученики (см.[5]–[13] и имеющуюся там библиографию). Условия разрешимости нелинейных уравнений Шредингера и Дирака рассмотрены в [6]. Разделимость нелинейного оператора Шрёдингера изучена в работе [12]. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка рассматривалась в [13], а в статье [11] исследовалась коэрцитивная разрешимость эллиптических операторов в банаховых пространствах. В публикациях [14]-[16] и [21] изучаются разделимость и разрешимость бигармонического и трижды гармонического операторов, операторов Шредингера и Лапласа-Бельтрами. Разделимость и коэрцитивные свойства строго нелинейных операторов рассматривались в работах [5], [18]-[20],[22].

Разделимость дифференциальных выражений с частными производными впервые исследовалась в статье К.Х.Бойматова [5]. Разделимость линейного дифференциального оператора второго порядка

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x)u(x),$$

ранее изучалась в работах [7], [11] и [17] . Данная работа обобщает результаты работ [7], [11] и [17] на нелинейный случай.

Следует отметить, что разделимость нелинейных дифференциальных операторов, в основном, исследовалась в случае, когда оператор является слабым возмущением линейного оператора. В отличие от этого, рассматриваемые ниже нелинейные дифференциальные операторы могут не являются слабым возмущением линейного оператора, т.е. строго нелинейны.

2. Формулировка основного результата

Введем пространство $L_{2,\rho}(R^n)$ с конечной нормой

$$\|u; L_{2,\rho}(R^n)\| = \left\{\int_{R^n} \rho(x)|u(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\rho(x) \in C^1(R^n)$ - положительная функция.

Пространство $L_{2,\rho}(R^n)$ является гильбертовым пространством, и в нём скалярное произведение определяется с помощью равенства

$$(u, v; L_{2,\rho}(R^n)) = \int_{R^n} \rho(x)u(x)\overline{v(x)}dx.$$

В пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + V(x,u)u(x) = f(x), \quad u(x) \in W_{2,loc}^2(R^n), \tag{1}$$

где $a_{ij}(x) \in C^2(R^n)$, $b_j(x) \in C^1(R^n)$, а $V(x,z)$ -положительная функция.

Definition 9. *Уравнение (1) (и соответствующий ему дифференциальный оператор) называются разделимыми в* $L_{2,\rho}(R^n)$, *если*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\quad V(x,u(x))u(x)\in L_{2,\rho}(R^n)$$

для всех $u(x)\in L_{2,\rho}(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$ *таких, что* $f(x)\in L_{2,\rho}(R^n)$.

В дальнейшем предположим, что $V(x,z)\in C^1(R^n\times\mathbb{C})$. Для формулировки основного результата введем функции

$$F(x,\xi,\eta)=V^{\frac{1}{2}}(x,z),\ \xi=Rez,\ \eta=Imz,$$

$$Q(x,\xi,\eta)=V(x,z),\ \xi=Rez,\ \eta=Imz.$$

Пусть для всех $x\in R^n$, $\omega=(\xi+i\eta)\in\mathbb{C}$, $\Omega=(\mu+i\nu)\in\mathbb{C}$ функция $F(x,\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям

$$\left\|a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F^{-1}\right\|^2\le\sigma_1, \tag{2}$$

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}F^{-1}\right\|^2\le\sigma_2, \tag{3}$$

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial F}{\partial x_i}F^{-\frac{3}{2}}\right\|^2\leqslant\sigma_3, \tag{4}$$

$$\left\|\frac{1}{n}a_{ij}^{-\frac{1}{2}}(x)b_j(x)F^{-1}\right\|^2\leqslant\sigma_4, \tag{5}$$

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-\frac{1}{2}}(\frac{\partial F}{\partial\xi}\mu+\nu\frac{\partial F}{\partial\eta})\omega;\mathbb{C}\right\|\le\delta_1\left|F^{\frac{1}{2}}\Omega;\mathbb{C}\right|. \tag{6}$$

Также предполагается, что для всех $x\in R^n$, $\omega=(\xi+i\eta)\in\mathbb{C}$, $\Omega=(\mu+i\nu)\in\mathbb{C}$ выполнены неравенства

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-1}\frac{\partial Q}{\partial x_i}F^{-2}\right\|^2\leqslant\sigma_5, \tag{7}$$

$$\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{-1}(\frac{\partial Q}{\partial\xi}\mu+\nu\frac{\partial Q}{\partial\eta})\omega;\mathbb{C}\right|\le\delta_2\left\|F\Omega;\mathbb{C}\right|. \tag{8}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2) –(8) и пусть числа* σ_j, $(j=\overline{1,5})$, δ_1,δ_2 *такие, что*

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4<\frac{4}{3n^2},\ \frac{2}{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)}<1-\delta_1,\ \frac{2}{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}<1-\delta_2 \tag{9}$$

Тогда уравнение (1) разделяется в $L_{2,\rho}(R^n)$, *и для всех функций* $u(x)\in L_{2,\rho}(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$ *таких, что* $f(x)\in L_{2,\rho}(R^n)$ *справедливы включения*

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\quad V(x,u(x))u(x)\in L_{2,\rho}(R^n),$$

$$a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\in L_{2,\rho}(R^n), i=1,2,...,n; j=1,2,...,n.$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\left\| -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\| + \|V(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\| +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\| \leq M\|f(x); L_{2,\rho}(R^n)\|, \tag{10}$$

где положительное число M не зависит от $u(x)$, $f(x)$.

3. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть в уравнении (1) функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_{2,\rho}(R^n)$, и функция $u(x)$ принадлежит классу $L_{2,\rho}(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$. Тогда функции*

$$V^{\frac{1}{2}}u(x), \quad a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_{2,\rho}(R^n) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ - фиксированная неотрицательная функция, обращающаяся в единицу при $|x| < 1$. Для любого положительного числа ε принимаем $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$.

Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle,$$

после интегрирования по частям, имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon u) = \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\varphi_\varepsilon u + a_{ij}(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon u + a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}u + a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

получим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + J_1^\varepsilon(u) + J_2^\varepsilon(u) + J_3^\varepsilon(u) + J_4^\varepsilon(u) + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle, \tag{11}$$

где

$$J_1^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}u\rangle,$$
$$J_2^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\varphi_\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial x_i}u\rangle,$$
$$J_3^\varepsilon(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\varphi_\varepsilon u\rangle,$$
$$J_4^\varepsilon(u) = \sum_{j=1}^{n} \langle b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon u\rangle.$$

Преобразуем функционал $J_1^\varepsilon(u)$ к виду

$$ReJ_1^\varepsilon(u) = -\frac{1}{2}(\sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \frac{\partial \rho}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_j}u\rangle - \\ - \sum_{i,j=1}^{n}\langle u, \rho\frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}a_{ij}(x)u\rangle). \tag{12}$$

Так как функция φ_ε - вещественнозначная и

$$\left|\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}\right| \le M_1\varepsilon, \quad \left|\frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x_j \partial x_i}\right| \le M_0\varepsilon^2,\ \forall x \in R^n,$$

где

$$M_1 = sup|\nabla\varphi_\varepsilon(x)|,\ M_0 = sup|\Delta\varphi_\varepsilon(x)|,$$

тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ReJ_1^\varepsilon(u) = 0.$$

Далее поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $J_m^\varepsilon(u),\ m = 2, 3, 4$, применяя неравенство Коши-Буняковского, учитывая, что для любого $\alpha > 0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1y_2 \le \frac{\alpha}{2}|y_1|^2 + \frac{1}{2\alpha}|y_2|^2,$$

имея в виду неравенства (2), (3) и (5), из равенства (11) получим следующие оценки:

$$|J_2^\varepsilon(u)| \le \frac{\alpha_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_2}{2\alpha_1}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2, \tag{13}$$

$$|J_3^\varepsilon(u)| \le \frac{\alpha_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_1}{2\alpha_1}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2, \tag{14}$$

$$|J_4^\varepsilon(u)| \le \frac{\alpha_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + \frac{n^2\sigma_4}{2\alpha_1}\left\|\sqrt{\varphi_\varepsilon}V^{\frac{1}{2}}(x,u)u; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2. \tag{15}$$

Имея ввиду эти оценки, из равенства (11), переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая неравенство Коши-Буняковского, находим

$$\mathrm{Re}\,\langle f, u\rangle \ge (1 - \frac{3\alpha_1}{2})\sum_{i,j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2 + (1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)}{2\alpha_1})\langle V(x,u)u, u\rangle,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (2)–(6) и пусть функция $u(x)$ из класса*

$$L_{2,\rho}(R^n) \cap W_{2,loc}^2(R^n)$$

является решением уравнения (1) с правой частью $f(x) \in L_{2,\rho}(R^n)$. Тогда функции

$$F^{\frac{3}{2}}(x, u(x))u(x), \quad a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)F^{\frac{1}{2}}(x, u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad j = 1, ..., n,$$

принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.

Доказательство. Пусть функция $\varphi_\varepsilon(x)$ такая же, как в доказательстве леммы 1. Очевидно, что

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle +$$

$$+\langle \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle.$$

Отсюда, интегрируя по частям, учитывая равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F(x,u)u) = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F(x,u)u + \rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}a_{ij}(x)F(x,u)u + \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F(x,u)u +$$
$$+\rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)\frac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}u + \rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)(\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \xi} + \mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \eta})u + \rho\varphi_\varepsilon a_{ij}(x)F\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle + G_1^{(\varepsilon)}(u) + G_2^{(\varepsilon)}(u) + \tag{16}$$
$$+ G_3^{(\varepsilon)}(u) + G_4^{(\varepsilon)}(u) + G_5^{(\varepsilon)}(u) + G_6^{(\varepsilon)}(u) + \langle V(x,u)u, \rho\varphi_\varepsilon(x)F(x,u)u\rangle,$$

где

$$G_1^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}F(x,u)u\rangle,$$
$$G_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon(\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \xi} + \mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial F(x,u)}{\partial \eta})u\rangle,$$
$$G_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial x_i}u\rangle,$$
$$G_4^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle,$$
$$G_5^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F(x,u)u\rangle,$$
$$G_6^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{j=1}^{n}\langle b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\varphi_\varepsilon F(x,u)u\rangle.$$

Здесь и далее значения $F(x,u)$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial \eta}$ взяты в точке

$$(x_1, \ldots, x_n, \mathrm{Re}\,u(x), \mathrm{Im}\,u(x)).$$

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов, находим, что в силу леммы 1 функционал $G_1^\varepsilon(u) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} ReG_1^\varepsilon(u) = 0. \tag{17}$$

Относительно функционалов $G^{\varepsilon}_m(u),\ m=\overline{2,6}$ учитывая, что для любого $\alpha>0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1y_2\le\frac{\alpha}{2}|y_1|^2+\frac{1}{2\alpha}|y_2|^2,$$

получаем следующие оценки:

$$|G^{\varepsilon}_2(u)|=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial\xi}\mathrm{Re}\frac{\partial u}{\partial x_i}u+\frac{\partial F}{\partial\eta}\mathrm{Im}\frac{\partial u}{\partial x_i}u\rangle|\le\delta_1\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2,$$

$$\begin{aligned}|G^{\varepsilon}_3(u)|&=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial F}{\partial x_i}u\rangle|\le\\&\le\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{1}{2\beta}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{-\frac12}\frac{\partial F}{\partial x_i}u\right\|^2\right\}\le\\&\le\frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n^2\sigma_3}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F^{\frac32}u\|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|G^{\varepsilon}_4(u)|&=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\varphi_\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial x_i}Fu\rangle|\le\\&\le\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{1}{2\beta}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}V^{-\frac12}u\right\|^2\right\}\le\\&\le\frac{\beta}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n^2\sigma_2}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F^{\frac32}u\|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|G^{\varepsilon}_5(u)|&=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}^{-\frac12}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon F^{\frac12}u\rangle|\le\\&\le\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{1}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{-\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}F^{-\frac32}F^{\frac32}u\|^2\right\}\le\\&\le\frac{\beta}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n^2\sigma_1}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F^{\frac32}u\|^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|G^{\varepsilon}_6(u)|&=|\langle\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\varphi_\varepsilon F(x,\xi,\eta)u\rangle|=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac1n b_j(x)a_{ij}^{-\frac12}(x)F^{-1}F^{\frac32}u\rangle|\\&\le\frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n^2\sigma_4}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}F^{\frac32}u\|^2.\end{aligned}$$

Здесь β– произвольное положительное число; $\sigma_1,\sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4$ и δ_1 - константы из условий (2) – (6). На основе полученных оценок из равенства (16) имеем

$$\begin{aligned}|\langle f,\rho\varphi_\varepsilon Fu)\rangle|\ge\left(1-\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)}{2\beta}\right)\cdot\langle Vu,\varphi_\varepsilon Fu\rangle-|G^{\varepsilon}_1(u)|+\\+(1-2\beta-\delta_1)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)F^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2.\end{aligned}$$

Далее применяем неравенство Коши-Буняковского и затем, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\|f; L_{2,\rho}(R^n)\| \|Fu; L_{2,\rho}(R^n)\| \geq |(f, Fu)| \geq \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)}{2\beta}\right) \cdot (Vu, Fu) + \\ + (1 - 2\beta - \delta_1) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}; L_{2,\rho}(R^n) \right\|^2. \tag{18}$$

Теперь подбираем положительное числа β так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{n^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)}{2\beta} < 1, \quad 2\beta + \delta_1 < 1.$$

Так как по лемме 1 $Fu \in L_{2,\rho}$, то из неравенства (18) следует, что функции

$$a_{ij}(x)^{\frac{1}{2}}(x) F^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad (j = 1, 2, ..., n), \quad F^{\frac{3}{2}} u$$

принадлежат пространству $L_{2,\rho}(R^n)$.

Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1

Переходим к непосредственному доказательству теоремы 1. Поступая так же, как и выше, из равенства

$$\langle f, \varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta) u \rangle = \langle -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta) u \rangle +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \langle b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta) u \rangle + \langle V(x, u) u(x), \varphi_\varepsilon Q(x, \xi, \eta) u \rangle$$

после несложных преобразований получим

$$\langle f, \rho \varphi_\varepsilon(x) Q(x, u) u \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho \varphi_\varepsilon Q(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \rangle + B_1^{(\varepsilon)}(u) + B_2^{(\varepsilon)}(u) + \\ + B_3^{(\varepsilon)}(u) + B_4^{(\varepsilon)}(u) + B_5^{(\varepsilon)}(u) + B_6^{(\varepsilon)}(u) + \langle V(x, u) u, \rho \varphi_\varepsilon(x) Q(x, u) u \rangle, \tag{19}$$

где

$$B_1^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i} Q(x, u) u \rangle,$$

$$B_2^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho \varphi_\varepsilon (\operatorname{Re} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial Q(x, u)}{\partial \xi} + \operatorname{Im} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial Q(x, u)}{\partial \eta}) u \rangle,$$

$$B_3^{(\varepsilon)}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho \varphi_\varepsilon \frac{\partial Q}{\partial x_i} u \rangle,$$

$$B_4^{(\varepsilon)}(u)=\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon Q(x,u)u\rangle,$$

$$B_5^{(\varepsilon)}(u)=\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}Q(x,u)u\rangle,$$

$$B_6^{(\varepsilon)}(u)=\sum_{j=1}^{n}\langle b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\varphi_\varepsilon Q(x,u)u\rangle.$$

Здесь и далее значения $F(x,u)$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial\xi}$, $\dfrac{\partial F(x,u)}{\partial\eta}$ взяты в точке

$$(x_1,\,\dots,x_n,\,\mathrm{Re}\,u(x),\mathrm{Im}\,u(x)).$$

Поочередно оценивая абсолютные значения функционалов $B_j^\varepsilon(u)$, $j=\overline{1,\,6}$, находим, что функционал $B_1^\varepsilon(u)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Относительно функционалов $B_m^\varepsilon(u)$, $m=\overline{2,6}$ получаем следующие оценки:

$$|B_2^\varepsilon(u)|=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial\xi}\mathrm{Re}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u+\frac{\partial Q}{\partial\eta}\mathrm{Im}\,\frac{\partial u}{\partial x_i}u\rangle|\le\delta_2\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2,$$

$$|B_3^\varepsilon(u)|=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\varphi_\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\rangle|\le$$
$$\le\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{1}{2\beta_1}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{-\frac12}\frac{\partial Q}{\partial x_i}u\right\|^2\right\}\le$$
$$\le\frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n^2\sigma_5}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}Vu\|^2,$$

$$|B_4^\varepsilon(u)|=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\varphi_\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial x_i}Qu\rangle|\le$$
$$\le\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta_1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{1}{2\beta}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}V^{-\frac12}u\right\|^2\right\}\le$$
$$\le\frac{\beta}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n^2\sigma_2}{2\beta_1}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}Vu\|^2,$$

$$|B_5^\varepsilon(u)|=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}^{-\frac12}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\varphi_\varepsilon V^{\frac12}u\rangle|\le$$
$$\le\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\frac{\beta_1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{1}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{-\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}V^{-1}Vu\|^2\right\}\le$$
$$\le\frac{\beta_1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2+\frac{n^2\sigma_1}{2\beta}\|\varphi_\varepsilon^{\frac12}Vu\|^2,$$

$$|B_6^\varepsilon(u)|=|\langle\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\varphi_\varepsilon Q(x,\xi,\eta)u\rangle|=|\sum_{i,j=1}^{n}\langle\varphi_\varepsilon^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)V^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{1}{n}b_j(x)a_{ij}^{-\frac12}(x)V^{-\frac12}Vu\rangle|$$

$$\leq \frac{\beta_1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2 + \frac{n\sigma_4}{2\beta_1} \|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} V u\|^2.$$

Здесь β_1– произвольное положительное число; σ_1, σ_2, σ_4, σ_5 и δ_2 – константы из условий (2), (3), (5), (7) и (8).

На основе полученных оценок из равенства (19) имеем

$$|\langle f, \varphi_\varepsilon V u)\rangle| \geq \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}{2\beta_1}\right) \cdot \langle Vu, \varphi_\varepsilon V u\rangle - |B_1^\varepsilon(u)| +$$
$$+ \cdot (1 - 2\beta_1 - \delta_2) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и затем переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\begin{aligned} \|f; L_{2,\rho}(R^n)\| \|Vu; L_{2,\rho}(R^n)\| \geq |(f, Vu)| \geq \left(1 - \frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}{2\beta_1}\right) \cdot (Vu, Vu) + \\ + (1 - 2\beta_1 - \delta_2) \cdot \sum_{j=1}^{n} \left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Далее подбираем положительное число β_1 так,чтобы выполнялись условия

$$\frac{n^2(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4+\sigma_5)}{2\beta_1} < 1, \quad 2\beta_1 + \delta_2 < 1.$$

Теперь из полученных неравенств после несложных преобразований имеем коэрцитивное неравенство (10). Из него следует разделимость нелинейного оператора (1) в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Теорема 1 доказана.

5. Разрешимость

С помощью теоремы 1 докажем следующий результаты о коэрцитивной разрешимости уравнения 1.

Теорема 2. *Пусть дифференциальный оператор*

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + Vu$$

разделяется в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$, и пусть положительная функция $\phi(x)$, принадлежащая в $C^1(R^n)$, удовлетворяет неравенствам

$$\left\| a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x) V^{-\frac{1}{2}} \phi^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|^2 \leq \theta_1, \tag{21}$$

где $0 < \theta_1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4 < \frac{1}{n^2}$. Тогда уравнение (1) для всех $f \in L_{2,\rho}(R^n)$ имеет единственное решение в пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

Доказательство. Сначала докажем, что дифференциальное уравнение

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + Vu = 0 \tag{22}$$

имеет нулевое решение $u(x) = 0$ для всех $x \in R^n$. Пусть $\psi(x)$ - произвольная положительная функция из $C^2(R^n)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle Vu,\rho\phi\psi u\rangle = \langle \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\phi\psi u\rangle =$$
$$= - \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij}(x)\rho\phi\psi u]\rangle - \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\phi\psi u\rangle =$$
$$= - \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\phi\psi u\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\phi\psi u\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle -$$
$$- \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\phi\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle -$$
$$- \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\phi\psi u\rangle. \tag{23}$$

Теперь выделяем реальную часть скалярного произведения

$$Re\langle Vu,\rho\phi\psi u\rangle = -Re\sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\phi\psi u\rangle - Re\sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\phi\psi u\rangle -$$
$$- Re\sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle - Re\sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle -$$
$$- Re\sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\phi\psi\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle - Re\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho\phi\psi u\rangle. \tag{24}$$

Имея в виду, что

$$2Re\sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi u)\rangle =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \left[\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi + \frac{a_{ij}(x)}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\phi + a_{ij}(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + a_{ij}(x)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i}\phi \right]^{\frac{1}{2}} u; L_{2,\rho}(R^n) \right\|^2, \tag{25}$$

и применяя неравенства Коши-Буняковского, получим

$$Re\sum_{i,j=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, a_{ij}(x)\rho\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle =$$
$$= Re\sum_{i,j=1}^{n} \langle \rho^{\frac{1}{2}} a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho^{\frac{1}{2}}\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i})V^{\frac{1}{2}}u\rangle \le$$
$$\le \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\| \|\phi^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{-\frac{1}{2}}\phi^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial x_i})V^{\frac{1}{2}}u\|, \tag{26}$$

$$Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\rho\phi\psi u\rangle=$$
$$=Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\rho^{\frac12}\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho^{\frac12}\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}(a_{ij}^{-\frac12}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}V^{-\frac12})V^{\frac12}u\rangle\leq$$
$$\leq\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}[a_{ij}^{-\frac12}(x)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}V^{-\frac12}]V^{\frac12}u\|,\tag{27}$$

$$Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\phi\psi u)\rangle=$$
$$=Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\rho^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho^{\frac12}\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}[a_{ij}^{\frac12}(x)\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}V^{-\frac12}]V^{\frac12}u\rangle\leq$$
$$\leq\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}[a_{ij}^{\frac12}(x)\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}V^{-\frac12}]V^{\frac12}u\|,\tag{28}$$

$$Re\sum_{j=1}^{n}\langle b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\phi\psi u)\rangle=$$
$$=Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\rho^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho^{\frac12}\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}[\frac1n b_j(x)a_{ij}^{-\frac12}(x)V^{-\frac12}]V^{\frac12}u\rangle\leq$$
$$\leq\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}[\frac1n b_j(x)a_{ij}^{-\frac12}(x)V^{-\frac12}]V^{\frac12}u\|.\tag{29}$$

Учитывая, что для любого $\alpha>0$ и для любых y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$y_1y_2\leq\frac{\alpha}{2}|y_1|^2+\frac{1}{2\alpha}|y_2|^2,$$

имеем

$$-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}\phi\psi u]\rangle\leq$$
$$\leqslant\frac{\alpha_2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2+\frac{n^2\theta_1}{2\alpha_2}\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}V^{\frac12}u\|^2,\tag{30}$$

$$-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\psi u)\rangle\leq\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}[a_{ij}^{\frac12}(x)V^{-\frac12}\phi^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x_i})]V^{\frac12}u\|\leq$$
$$\leq\frac{n\alpha_2}{2}\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2+\frac{n^2\sigma_1}{2\alpha_2}\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}V^{\frac12}u\|^2,\tag{31}$$

$$-Re\sum_{i,j=1}^{n}\langle\frac{\partial u}{\partial x_j},a_{ij}(x)\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\phi\psi u)\rangle=$$

$$\leq\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}[a_{ij}^{\frac12}(x)\rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}Q^{-\frac12}]V^{\frac12}u\|$$

$$\leqslant\frac{\alpha_2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2+\frac{n^2\sigma_2}{2\alpha_2}\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}V^{\frac12}u\|^2, \tag{32}$$

$$-Re\sum_{j=1}^{n}\langle b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\rho\phi\psi u)\rangle=$$

$$\leq\sum_{i,j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j}\|\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}[\frac1n b_j(x)a_{ij}^{-\frac12}(x)Q^{-\frac12}]Q^{\frac12}u\|$$

$$\leqslant\frac{\alpha_2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}a_{ij}^{\frac12}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\|^2+\frac{n^2\sigma_4}{2\alpha_2}\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}Q^{\frac12}u\|^2. \tag{33}$$

Применяя далее для равенства (24) неравенства (30)-(33), получим

$$(1-\frac{n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)}{2\alpha_2})\|\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}V^{\frac12}u\|^2\leq$$

$$\leq\frac12\sum_{i,j=1}^{n}\left\|\left[\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi+\frac{a_{ij}(x)}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\phi+a_{ij}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}+a_{ij}(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_i}\phi\right]^{\frac12}u;L_{2,\rho}(R^n)\right\|^2+$$

$$+2\alpha_2\cdot\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n\|^2-\sum_{j=1}^{n}\|a_{ij}^{\frac12}(x)\phi^{\frac12}\psi^{\frac12}\frac{\partial u}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n\|^2. \tag{34}$$

Пусть $\psi(x)\equiv1$ для любых $x\in R^n$ и $\alpha_2=\frac12$, тогда имеем

$$0<(1-(n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)\|\phi^{\frac12}V^{\frac12}u;L_{2,\rho}(R^n\|^2\leq0. \tag{35}$$

Следовательно, получим

$$0<(1-n^2(\theta_1+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_4)\int_{R^n}|\rho^{\frac12}\phi^{\frac12}V^{\frac12}u|^2dx\leq0. \tag{36}$$

Последнее неравенство имеет место только при $u(x)\equiv0$. Это доказывает, что $u(x)=0$ является единственным решением уравнения (22).

Пусть далее $u(x)\in L_{2,\rho}(R^n)\cap W_{2,loc}^2(R^n)$ и является решением уравнения

$$L[u]=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+Vu=f(x) \tag{37}$$

с правой частью $f(x)\in L_{2,\rho}(R^n)$.

Теперь выберем последовательность функций $f_1,f_2,\dots f_n\in C_0^\infty(R^n)$, сходящихся к f в $L_{2,\rho}(R^n)$. Положим $\vartheta_p=A^{-1}f_p$, где A-означает замыкание оператора

$$\acute{A}=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+V,$$

$D(\acute{A}=C_0^{\infty}(R^n))$ в $L_{2,\rho}(R^n)$. Функция $\vartheta_p \in C^1(R^n)$ и является решением уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2\vartheta_p}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial\vartheta_p}{\partial x_j}+V\vartheta_p=f_p.$$

Используя коэрцитивное неравенство (10), находим, что

$$\left\|-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n)\right\|+\|V(\vartheta_p-\vartheta_k);L_{2,\rho}(R^n)\|+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left\|a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial(\vartheta_p-\vartheta_k)}{\partial x_j};L_{2,\rho}(R^n)\right\|\le M\|f_p-f_k;L_{2,\rho}(R^n)\|. \qquad (38)$$

Переходя к пределу $p,\ k\to\infty$, заключаем, что последовательности

$$\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,V\vartheta_1,V\vartheta_2,\ldots,a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x_j},\quad a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x_j},\ldots,$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_1)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial\vartheta_1)}{\partial x_j},-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2(\vartheta_2)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial\vartheta_2)}{\partial x_j},$$

будучи фундаментальными, сходятся в $L_{2,\rho}(R^n)$ соответственно к некоторым элементам $\vartheta,\vartheta^{(1)},\vartheta^{(2)},\vartheta^{(3)}\in L_{2,\rho}(R^n)$. Легко проверить, что $\vartheta\in W^2_{2,loc}(R^n)$, $\vartheta^{(1)}=V\vartheta$,

$$\vartheta^{(2)}=a_{ij}^{\frac{1}{2}}(x)V^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j},\ \vartheta^{(3)}=-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x_j}.$$

Переходя в неравенстве (38) к пределу при $p,\ k\to\infty$, получим $\vartheta_p=\vartheta_k=\vartheta$. Следовательно, для $f\in R^n$ таких, что $u\in L_{2,\rho}(R^n)\cap W^2_{2,loc}(R^n)$, $Au=f$.

Пусть u_1 тоже является решением уравнения $Au=f$. Тогда имеем

$$A(u-u_1)=0.$$

Так как уравнение $Au=0$ имеет единственное решение $u=0$, отсюда следует, что $u=u_1$, т.е. теорема полностью доказана.

6. Заключение

В работе установлены коэрцитивные оценки для нелинейного оператора вида (1). Найдены достаточные условия разделимости оператора в гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$. Изучена коэрцитивная разрешимость нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в весовом пространстве $L_{2,\rho}(R^n)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Everitt W. N.,Gierz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. London Math.Soc. 1971. Vol. 23, P. 301 – 324.

2. Everitt W. N.,Gierz M. On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions // Proc. London Math.Soc. 1972. Vol. 24, P. 149 – 170.

3. Everitt W. N.,Gierz M. Some inequalities associated with certain differential operators // Math. Z. 1972. Vol. 126, P. 308 – 326.

4. Everitt W. N.,Gierz M. Inequalities and separation for Schrodinger -type operators in $L_2(R^n)$ // Proc. Roy. Soc. Edinburg, Sect A. 1977. Vol. 79, P. 149 – 170.

5. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости // ДАН СССР. 1973. Т. 213, № 5. С. 1009 – 1011.

6. Бойматов К. Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170, С. 37 – 76.

7. Бойматов К. Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка // ДАН СССР. 1988. Т. 301, № 5. С. 1033 – 1036.

8. Бойматов К. Х., Шарипов А. Коэрцитивные свойства нелинейных операторов Шредингера и Дирака // Доклады Академии наук России. 1992. Т. 326, № 3. С. 393 – 398.

9. Бойматов К. Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных дифференциальных операторов второго порядка // Математические заметки. 1989. Т. 46, № 6. С. 110 – 112.

10. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР. 1983. Т. 161, С. 195 – 217.

11. Гадоев М. Г., Конобулов С. И. Коэрцитивная разрешимость эллиптических операторов в банаховых пространствах // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. VI, № 2(14). С. 27 – 30.

12. Муратбеков М. Б., Отелбаев М. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера // Изв. вузов. Матем. 1989. № 3. С. 44 – 48.

13. Муратбеков М. Б., Муратбеков М. М., Оспанов К. Н. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения // Доклады Академии наук России. 2010. Т. 435, № 3. С. 310 – 313.

14. Zayed E. M. E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 337, P. 659 – 666.

15. Zayed E. M. E., Salem Omram Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert // International J. Math. Combin. 2010. Vol. 4. P. 13 – 23.

16. Zayed E. M. E., Mohamed A. S., Atia H. A. Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 336. P. 81 – 92.

17. Zayed E. M. E. Separation for an elliptic differential operators in a weighted its application to an existence and uniqueness theorem // Dynamits of continuous, discrede and impulsive systems.Series A: Mathematical Analysis. 2015. № 22. P. 409 – 421.

18. Каримов О. Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2014. № 3(157). С. 42 – 50.

19. Каримов О. Х. О разделимости нелинейных дифференциальных операторов второго порядка с матричными коэффициентами в весовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т. 58, № 8. С. 665 – 673.

20. Каримов О. Х. О коэрцитивных свойствах и разделимости бигармонического оператора с матричным потенциалом // Уфимский математический журнал. 2017. Т. 9, № 1. С. 55 – 62.

21. Каримов О. Х. Коэрцитивная оценка и теорема разделимости для одного класса нелинейного дифференциального оператора в гильбертовом пространстве // Чебышевский сборник, 2017, Т. 18, № 4. С. 245 – 254. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-245-254

22. Каримов О. Х. О коэрцитивной разрешимости уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018. Т. 61, № 11 – 12. С. 829 – 836.

23. Karimov O. Kh. On the separation property of nonlinear second-order differential operators with matrix coefficients in weighted spaces // Journal of mathematical sciences. 2019. Vol. 241, № 5. P. 589 – 595.

REFERENCES

1. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1971, “Some properties of the domains of certain differential operators“, *Proc.London Math.Soc.*, vol. 23, pp. 301 – 324.

2. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1972, “On some properties of the powers of a family self-adjoint differential expressions“, *Proc.London Math.Soc.*, vol.24, pp. 149 – 170.

3. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1972, “Some inequallities associated with certain differential operators“, *Math.Z.*, vol.126, pp. 308 – 326.

4. Everitt, W. N., & Gierz, M. 1977, “Inequalities and separation for Schrodinger -tupe operators in $L_2(R^n)$“, *Proc.Roy.Soc.Edinburg Sect A*, vol.79, pp. 149 – 170.

5. Boimatov, K. Kh. 1973, “Theorems of separability“, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 213, № 5, pp. 1009 – 1011.

6. Boimatov, K. Kh. 1984, “ Separability theorems, weighted spaces and their applications“, *Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im.Steklova*, vol. 170, pp. 37 – 76.

7. Boimatov, K. Kh. 1988, “Coercive estimates and separability for second order elliptic differential equations“, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 301, № 5, pp. 1033 – 1036.

8. Boimatov, K. Kh., & Saripov, A. 1992, “Coercive properties of nonlinear Schrodinger and Dirac operators“, *Reports of the Russian Academy of Sciences*, vol. 326, № 3, pp. 393 – 398.

9. Boimatov, K. Kh. 1989, “Coercive estimates and separability theorems for differential operators of the second order“, *Mathematical notes*, vol. 46, № 6, pp. 110 – 112.

10. Otelbaev, M. 1983, “Coercitive estimates and separability theorems for elliptic equations in R^n“ *Proc.of the Math. Inst. of the USSR Academy of Sciences im.Steklova*, vol. 161, pp. 195 – 217.

11. Gadoev, M. G., & Konobulov, S. I. 2003, “Coercive solvability of elliptic operators in Banach spaces“, *Siberian Journal of Industrial Mathematics*, vol.VI, № 2(14), pp. 27 – 30.

12. Muratbekov, M. B., & Otelbaev, M. 1989, “Smoothness and approximation properties of solutions of a class of nonlinear equations of Schrodinger“, *Proc.of the univer. of math.*, № 3, pp. 44 – 48.

13. Muratbekov, M. B., & Muratbekov, M. M., & Ospanov, K. N. 2010, “Coercive solvability of odd-order differential equations and its applications“, *Dokl. Mathematics*, vol. 435, № 3, pp. 310 – 313.

14. Zayed, E. M. E. 2008, “Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem“, *J. Math.Anal.Appl.*, vol. 337, pp. 659 – 666.

15. Zayed, E. M. E., & Salem, Omram. 2010, “Separation for triple-harmonic differential operator in the Hilbert“, *International J. Math.Combin.*, vol. 4, pp. 13 – 23.

16. Zayed, E. M. E., & Mohamed,A. S. & Atia, H. A. 2007, “Inequalities and separation for the Laplace-Beltrami differential operator in Hilbert spaces“, *J. Math.Anal.Appl.*, vol. 336, pp. 81 – 92.

17. Zayed, E. M. E., 2015, “Separation for an elliptic differential operators in a weighted its application to an existence and uniqueness theorem“, *Dynamits of continuous, discrete and impulsive systems.Series A: Mathematical Analysis*, № 22, pp. 409 – 421.

18. Karimov, O. Kh. 2014, “On separation of second order nonlinear differential operators with matrix coefficients“ *Izvestiya Akademii nauk Respubliki Tajikistan. Otdeleniye fiziko-matematicheskikh, khimicheskikh, geologicheskikh i tekhnicheskikh nauk*, № 4(157), pp. 42 – 50, (in Russian).

19. Karimov, O. Kh. 2015, “On separation of nonlinear second order nonlinear differential operators with matrix coefficients in a weighted space“, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 58, № 8, pp. 665 – 673, (in Russian).

20. Karimov. O. Kh. 2017, “Coercive properties and separability biharmonic operator with matrix potential“, *Ufa mathematical journal*, vol. 9, № 1, pp. 55 – 62.

21. Karimov. O. Kh. 2017, “Coercive estimate and separation theorem for one nonlinear differential operator in a Hilbert space“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 18, Is. 4, pp. 245–254, doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-245-254

22. Karimov, O. Kh. 2018, “On coercive solvability the schrodinger equation in a Hilbert space“, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 61, № 11 - 12, pp. 829 – 836, (in Russian).

23. Karimov, O. Kh. 2019, “On the separation property of nonlinear second-order differential operators with matrix coefficients in weighted spaces“, *Journal of mathematical sciences*, vol. 241, № 5, pp. 589 – 595.

Получено 4.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.