ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-158-169

О линейной независимости значений некоторых гипергеометрических функций над мнимым квадратичным полем

П. Л. Иванков

Иванков Павел Леонидович — доктор физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (г. Москва).
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Аннотация

Основная трудность, с которой приходится иметь дело при исследовании арифметической природы значений обобщенных гипергеометрических функций с иррациональными параметрами, состоит в том, что общий наименьший знаменатель нескольких первых коэффициентов соответствующих степенных рядов растет слишком быстро с увеличением числа этих коэффициентов. Последнее обстоятельство делает невозможным использование известного в теории трансцендентных чисел метода Зигеля для проведения упомянутого исследования. Применение названного метода предполагает использование принципа Дирихле для построения функциональной линейной приближающей формы. Это построение является первым этапом длинного и сложного рассуждения, приводящего в конечном итоге к получению требуемого арифметического результата. Попытка применить принцип Дирихле в случае функций с иррациональными параметрами наталкивается на непреодолимые трудности из-за упомянутого выше слишком быстрого роста общего наименьшего знаменателя коэффициентов соответствующих рядов Тейлора. Вследствие этого в случае функций с иррациональными параметрами обычно применяют эффективное построение линейной приближающей формы (или совокупности таких форм при использовании совместных приближений). Коэффициенты построенной формы являются многочленами с алгебраическими коэффициентами. Для общего наименьшего знаменателя этих коэффициентов требуется затем получить приемлемую оценку сверху его абсолютной величины. Известные оценки такого рода нуждаются в некоторых случаях в уточнении. Это уточнение осуществляется с применением теории делимости в квадратичных полях; дополнительно используются сведения о распределении простых чисел в арифметической прогрессии.

В настоящей работе рассматривается один из вариантов эффективного построения совместных приближений для гипергеометрической функции общего вида и ее производных. Общий наименьший знаменатель коэффициентов многочленов, входящих в эти приближения, оценивается затем с помощью уточненного варианта соответствующей леммы. Все это позволяет получить новый результат об арифметической природе значений указанной функции в малой по абсолютной величине ненулевой точке мнимого квадратичного поля.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, эффективная конструкция, линейная независимость, мнимое квадратичное поле.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
П. Л. Иванков. О линейной независимости значений некоторых гипергеометрических функций над мнимым квадратичным полем // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 158–169.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-158-169

On linear independence of the values of some hypergeometric functions over the imaginary quadratic field

P. L. Ivankov

Ivankov Pavel Leonidovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Bauman Moscow state technical University (Moscow).
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Abstract

The main difficulty one has to deal with while investigating arithmetic nature of the values of the generalized hypergeometric functions with irrational parameters consists in the fact that the least common denominator of several first coefficients of the corresponding power series increases too fast with the growth of their number. The last circumstance makes it impossible to apply known in the theory of transcendental numbers Siegel's method for carrying out the above mentioned investigation. The application of this method implies usage of pigeon-hole principle for the construction of a functional linear approximating form. This construction is the first step in a long and complicated reasoning that leads ultimately to the required arithmetic result. The attempts to apply pigeon-hole principle in case of functions with irrational parameters encounters insurmountable obstacles because of the aforementioned fast growth of the least common denominator of the coefficients of the corresponding Taylor series. Owing to this difficulty one usually applies effective construction of the linear approximating form (or a system of such forms in case of simultaneous approximations) for the functions with irrational parameters. The effectively constructed form contains polynomials with algebraic coefficients and it is necessary for further reasoning to obtain a satisfactory upper estimate of the modulus of the least common denominator of these coefficients. The known estimates of this type should be in some cases improved. This improvement is carried out by means of the theory of divisibility in quadratic fields. Some facts concerning the distribution of the prime numbers in arithmetic progression are also made use of.

In the present paper we consider one of the versions of effective construction of the simultaneous approximations for the hypergeometric function of the general type and its derivatives. The least common denominator of the coefficients of the polynomials included in these approximations is estimated subsequently by means of the improved variant of the corresponding lemma. All this makes it possible to obtain a new result concerning the arithmetic values of the aforesaid function at a nonzero point of small modulus from some imaginary quadratic field.

Keywords: hypergeometric function, effective construction, linear independence, imaginary quadratic field.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

P. L. Ivankov, 2019, "On linear independence of the values of some hypergeometric functions over the imaginary quadratic field", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 158–169.

Введение

При изучении арифметической природы значений обобщенных гипергеометрических функций (а также и их производных, в том числе и по параметру) обычно используют метод Зигеля или метод, основанный на эффективном построении линейной приближающей формы (в дальнейшем – эффективный метод). В обоих случаях обычно требуется предварительно установить линейную (или алгебраическую) независимость соответствующих функций.

В случае применения метода Зигеля обычно предполагают, что параметры исследуемых функций рациональны, а значения вычисляются в ненулевой алгебраической точке. При этом обычно изучают вопрос об алгебраической независимости таких значений. Соответственно важным предварительным результатом здесь является доказательство алгебраической независимости рассматриваемых функций над полем рациональных дробей. Примеры исследований такого рода см. в [1, глава 7]; в замечаниях к указанной главе на с. 248-249 приведен краткий список работ по этой тематике. Отметим здесь работы [2]–[15]. Доказательство линейной независимости над полем рациональных дробей гипергеометрических функций общего вида (при отсутствии дифференцирований по параметрам) имеется в работах [16] и [17]. Используя доказанные в этих работах теоремы, можно установить условия линейной независимости функций (1). Примеры доказательства линейной независимости продифференцированных по параметру гипергеометрических функций имеются в работах [18] и [19]; результаты, полученные в последней из этих работ, использовались затем в [20] и [21].

1. Результат

Рассмотрим при $k = 1, \ldots, t$, $j = 1, \ldots, m+2$ гипергеометрические функции

$$F_{kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \chi_{kj}(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}. \tag{1}$$

В этом равенстве $a(x) = (x+\alpha_1)\ldots(x+\alpha_r)$, $b(x) = (x+\beta_1)\ldots(x+\beta_m)$, $0 \leqslant r \leqslant m+1$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$, $A, \lambda_1, \ldots, \lambda_t$ — некоторые комплексные числа, причем

$$a(x)b(x)(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k) \neq 0 \tag{2}$$

при $x = 1, 2, \ldots$;

$$\chi_{kj}(\nu) = \prod_{u=1}^{j-1}(\nu+\beta_u),\ k = 1, \ldots, t,\ j = 1, \ldots, m+1,\ \chi_{k,m+2}(\nu) = \chi_{k,m+1}(\nu)(\nu+\lambda_k).$$

Рассмотрим также производные функций (1) по параметру λ_k, т.е. функции

$$F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \chi_{kj}(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\,, \tag{3}$$

$k = 1, \ldots, t$, $l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1$, $j = 1, \ldots, m+2$; $\tau_1, \ldots, \tau_t$ – произвольные натуральные числа.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (2), и пусть*

$$\alpha_i - \beta_j,\ \alpha_i - \lambda_k,\ \alpha_i + \lambda_k - A,\ i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, t,$$

не являются целыми числами; предположим также, что целыми числами не являются

$$\lambda_k - \lambda_{k'},\ \lambda_k + \lambda_{k'} - A,\ k \neq k',\ 2\lambda_k - A,\ k, k' = 1, \ldots, t.$$

Тогда функции (3) линейно независимы вместе с функцией, тождественно равной единице, над полем $\mathbb{C}(z)$.

2. Вычисление абстрактных определителей

Рассмотрим определитель

$$\Delta_1 = \left| \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)} \right|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N_1+t,\\ k=1,\ldots,t}}, \tag{4}$$

где $N_1 \geqslant -1$ — произвольное целое число, λ_k и A — комплексные числа, для которых имеют смысл входящие в состав определителя дроби; строки определителя Δ_1 расположены в порядке возрастания ν, столбцы — в порядке возрастания k.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\Delta_1 = (-1)^{t(t-1)/2} \prod_{k=1}^{t} \prod_{x=1}^{N_1+t} \frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)} \prod_{k_1>k_2} (\lambda_{k_1}-\lambda_{k_2})(\lambda_{k_1}+\lambda_{k_2}-A), \tag{5}$$

где последнее произведение распространено на все значения $k_1, k_2 \in \{1,\ldots,t\}$, удовлетворяющие условию $k_1 > k_2$.

Доказательство. Умножим k-й столбец определителя Δ при $k=1,\ldots,t$ на

$$\prod_{x=1}^{N_1+t} (x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k).$$

В результате получим определитель

$$\Delta_2 = \Delta_2(t) = \left| \prod_{x=\nu+1}^{N_1+t} (x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k) \right|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N_1+t,\\ k=1,\ldots,t}}.$$

Поэтому для доказательства (5) достаточно установить справедливость равенства

$$\Delta_2(t) = (-1)^{t(t-1)/2} \prod_{k_1>k_2} (\lambda_{k_1}-\lambda_{k_2})(\lambda_{k_1}+\lambda_{k_2}-A)\,. \tag{6}$$

Это последнее равенство можно доказать, рассуждая по индукции. При $t=1$ доказывать нечего. Пусть при некотором t равенство (6) справедливо; рассмотрим определитель $\Delta_2(t+1)$. Такой определитель является многочленом степени $2t$ от переменной λ_{t+1}, причем корни этого многочлена суть $\lambda_k, A-\lambda_k,\ k=1,\ldots,t$, а старший коэффициент равен $(-1)^t\Delta_2(t)$. Отсюда и из предположения индукции следует равенство, получающееся из (6) после замены t на $t+1$. Таким образом, справедливость равенства (6) установлена индукцией по t, и лемма доказана.

Рассмотрим определитель

$$\Delta_3 = \left| \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(x+\lambda_{kl_k})(x+A-\lambda_{kl_k})} \right|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N_1+T\\ k=1,\ldots,t,\, l_k=0,1,\ldots,\tau_k-1,}},$$

где $T=\tau_1+\cdots+\tau_t$; строки определителя расположены в порядке возрастания ν, а положение столбца определяется парой индексов (k,l_k), причем эти пары упорядочены лексикографически; по поводу такой упорядоченности см., например, [22, с. 261-262]. Из леммы 1 вытекает равенство

$$\Delta_3=(-1)^{T(T-1)/2}\prod_{k=1}^{t}\prod_{l_k=0}^{\tau_k-1}\prod_{x=1}^{N_1+T}\frac{1}{(x+\lambda_{kl_k})(x+A-\lambda_{kl_k})}\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{t}\prod_{l_k=1}^{\tau_k-1}\prod_{l'_k=0}^{l_k-1}(\lambda_{kl_k}-\lambda_{kl'_k})\prod_{k>k'}(\lambda_{kl_k}-\lambda_{k'l_{k'}})\prod_{(kl_k)\succ(k'l_{k'})}(\lambda_{kl_k}+\lambda_{k'l_{k'}}-A),\quad(7)$$

где два последних произведения распространены на все допустимые пары индексов, удовлетворяющие указанным соотношениям; символ $\succ$ означает лексикографическую упорядоченность.

Пусть D_{kl_k} — оператор вычисления частной производной $\partial^{l_k}/\partial\lambda_{kl_k}^{l_k}$ с последующей заменой λ_{kl_k} на λ_k. Применим к определителю Δ_3 произведение таких операторов вида

$$\prod_{k=1}^{t}\prod_{l_k=0}^{\tau_k-1}D_{kl_k}.\quad(8)$$

В результате получим определитель

$$\Delta_4=\left|\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\right|_{\substack{\nu=N_1+1,\dots,N_1+T,\\ k=1,\dots,t,\,l_k=0,1,\dots,\tau_k-1}},$$

столбцы и строки которого расположены, как указано выше.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\Delta_4=(-1)^{T(T-1)/2}\prod_{k=1}^{t}\prod_{x=1}^{N_1+T}\frac{1}{((x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k))^{\tau_k-1}}\times$$
$$\times\prod_{k=1}^{t}1!2!\dots(\tau_k-1)!\prod_{k>k'}(\lambda_k-\lambda_{k'})\prod_{k,k'}(\lambda_k+\lambda_{k'}-A),\quad(9)$$

где произведения $\prod_{k>k'}(\lambda_k-\lambda_{k'})\prod_{k,k'}(\lambda_k+\lambda_{k'}-A)$ получаются из последних двух произведений, входящих в (7), заменой в каждой скобке λ_{kl_k} и $\lambda_{k'l_{k'}}$ соответственно на λ_k и $\lambda_{k'}$.

Доказательство. Лемму можно доказать по индукции. Но можно также воспользоваться <готовым> рассуждением, с помощью которого в аналогичной ситуации доказывается лемма 15.7, [23, с. 125]. Приводим упомянутое рассуждение дословно (изменив лишь обозначения). Будем действовать оператором (8) на правую часть (7). Тогда перед дифференцированием по λ_{kl_k} преобразованная правая часть (7) будет содержать множитель $(\lambda_{kl_k}-\lambda_k)^{l_k}$, поэтому после дифференцирования и подстановки $\lambda_{kl_k}=\lambda_k$ отличным от нуля будет лишь слагаемое, содержащее l_k-ю производную этой скобки. Лемма доказана.

Рассмотрим определитель

$$\Delta_5=\left|\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k-\sigma)(x+A-N_2-\lambda_k+\sigma)}\right|_{\substack{\nu=N_1+1,\dots,N_1+T(N_2+1),\\ k=1,\dots,t,\,l_k=0,1,\dots,\tau_k-1,\,\sigma=0,1,\dots,N_2}},$$

где $N_2=(n+1)(m+2)-1$.

Лемма 3. *Определитель Δ_5 отличен от нуля при выполнении условий теоремы.*

Доказательство. Легко видеть, что определитель Δ_5 является частным случаем определителя Δ_4, и требуемое утверждение непосредственно вытекает из (9). Лемма доказана.

Преобразуем определитель Δ_5. Сначала напишем очевидное равенство

$$\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k-\sigma)(x+A-N_2-\lambda_k+\sigma)}=V_{k\sigma}(\nu)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\,,$$

где

$$V_{k\sigma}(\nu)=\prod_{x=0}^{\sigma-1}\frac{\nu+\lambda_k-x}{\lambda_k-x}\prod_{x=0}^{N_2-\sigma-1}\frac{\nu+A-\lambda_k-x}{A-\lambda_k-x}\,. \tag{10}$$

Из этого равенства следует, что

$$\Delta_5=\left|\sum_{\mu_k=0}^{l_k}\binom{l_k}{\mu_k}\frac{\partial^{\,l_k-\mu_k}V_{k\sigma}(\nu)}{\partial\lambda_k^{l_k-\mu_k}}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial^{\mu_k}}{\partial\lambda_k^{\mu_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\right|_{\substack{\nu=N_1+1,\dots,N_1+T(N_2+1),\\ k=1,\dots,t,\,l_k=0,1,\dots,\tau_k-1,\sigma=0,1,\dots,N_2}}.$$

При фиксированном k обозначим

$$\Delta_6=|V_{k\sigma}(z_\nu)|_{\nu,\sigma=0,1,\dots,N_2}$$

— определитель, строки которого расположены в порядке возрастания ν, а столбцы — в порядке возрастания σ; $z_0,z_1,\dots,z_{N_2}$ – произвольные числа.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$\Delta_6=\prod_{\sigma=0}^{N_2}\Bigl(\prod_{x=0}^{\sigma-1}\frac{1}{\lambda_k-x}\prod_{x=0}^{N_2-\sigma-1}\frac{1}{A-\lambda_k-x}\Bigr)\times$$
$$\times\prod_{\mu_1=1}^{N_2}\prod_{\mu_2=0}^{N_2-\mu_1}(A-2\lambda_k-N_2+2\mu_2+\mu_1)\prod_{\mu_1>\mu_2}(z_{\mu_1}-z_{\mu_2})\,. \tag{11}$$

Доказательство. Очевидно,

$$\Delta_6=\prod_{\sigma=0}^{N_2}\Bigl(\prod_{x=0}^{\sigma-1}\frac{1}{\lambda_k-x}\prod_{x=0}^{N_2-\sigma-1}\frac{1}{A-\lambda_k-x}\Bigr)\Delta_7\,, \tag{12}$$

где

$$\Delta_7=\left|\tilde V_{k\sigma}(z_\nu)\right|_{\nu,\sigma=0,1,\dots,N_2}\,,$$

$$\tilde V_{k\sigma}(\nu)=\prod_{x=0}^{\sigma-1}(\nu+\lambda_k-x)\prod_{x=0}^{N_2-\sigma-1}(\nu+A-\lambda_k-x)$$

Преобразуем определитель Δ_7 следующим образом. При $\sigma=0,1,\dots,N_2-1$ из столбца с номером σ вычтем столбец с номером $\sigma+1$. После этого за знак определителя вынесем множитель $\prod_{\mu=0}^{N_2-1}(A-2\lambda_k-N_2+2\mu+1)$. Повторим эту процедуру для $\sigma=0,1,\dots,N_2-2$ и т.д. На последнем шаге из первого столбца вычтем второй и вынесем за знак определителя скобку $(A-2\lambda_k)$. В результате получим равенство

$$\Delta_7=\prod_{\mu_1=1}^{N_2}\prod_{\mu_2=0}^{N_2-\mu_1}(A-2\lambda_k-N_2+2\mu_2+\mu_1)\left|\prod_{x=0}^{\sigma-1}(z_\nu+\lambda_k-x)\right|_{\nu,\sigma=0,1,\dots,N_2}.$$

Нетрудно проверить, что последний определитель равен определителю Вандермонда от переменных $z_0, z_1, \ldots, z_{N_2}$ (см., например, задачу 334, [24, с. 35]). Отсюда и из (12) следует (11). Лемма доказана.

Продолжим теперь преобразование определителя Δ_5. Зафиксируем k; из леммы 4 следует, что многочлены $V_{k\sigma}(\nu)$, $\sigma = 0, 1, \ldots, N_2$ образуют базис в пространстве многочленов от ν, степени которых не превосходят N_2. Пользуясь этим, вычтем из каждого столбца, отвечающего данному k, при $l_k \geqslant 1$ определителя Δ_5 такую линейную комбинацию столбцов, для которых $l_k = 0$, что во всех указанных выше столбцах не будет слагаемых, содержащих не продифференцированную по параметру λ_k дробь $\prod_{x=1}^{\nu} 1/((x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k))$. Аналогичным приемом можно из столбцов, для которых $\tau_k \geqslant 2$, удалить все слагаемые, содержащие первую производную упомянутой дроби и т. д. В результате получим равенство

$$\Delta_5 = \left| V_{k\sigma}(\nu) \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)} \right|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N_1+T(N_2+1),\\ k=1,\ldots,t,\, l_k=0,1,\ldots,\tau_k-1,\sigma=0,1,\ldots,N_2}}.$$

Из леммы 3 следует, что $\Delta_5 \neq 0$ при выполнении условий теоремы.

Определитель Δ_5 можно еще упростить. Для этого зафиксируем k, $1 \leqslant k \leqslant t$, и l_k, $0 \leqslant l_k \leqslant \tau_k - 1$, и с выделенной таким образом системой столбцов данного определителя проделаем преобразования, использованные при вычислении определителя Δ_7. В результате за знак определителя будет вынесен ненулевой множитель, а сам определитель (после того, как описанная процедура будет проделана при всех допустимых значениях k и l_k) приобретет вид

$$\Delta_8 = \left| \prod_{x=0}^{\sigma-1} (\nu+\lambda_k-x) \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)} \right|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N_1+T(N_2+1),\\ k=1,\ldots,t,\, l_k=0,1,\ldots,\tau_k-1,\sigma=0,1,\ldots,N_2}}.$$

Последний определитель легко приводится к виду

$$\Delta_9 = \left| \nu^{\sigma} \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)} \right|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N_1+T(N_2+1),\\ k=1,\ldots,t,\, l_k=0,1,\ldots,\tau_k-1,\sigma=0,1,\ldots,N_2}}.$$

Из всего сказанного следует, что последний определитель отличен от нуля.

3. Вычисление конкретных определителей

Пусть $1 \leqslant k \leqslant t$, и пусть

$$W_{kjs}(\nu) = \chi_{kj}(\nu) \prod_{x=0}^{s-1} b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)(\nu+A-\lambda_k-x) \prod_{x=1}^{n-s} a(\nu-n+x),$$
$$j = 1, \ldots, m+2,\ s = 0, 1, \ldots, n. \quad (13)$$

Лемма 5. *При выполнении условий теоремы многочлены (13) линейно независимы.*

Доказательство. В лемме 1, [25, с. 193] доказано равенство

$$\left| \chi_j(z_\nu) \prod_{s=0}^{s-1} b(z_\nu - x) \prod_{x=1}^{n-s} a(z_\nu - n + x) \right|_{\substack{\nu=1,\ldots,(n+1)m\\ s=0,1,\ldots,n,\, j=1,\ldots,m}} =$$
$$= \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{m} \prod_{s=0}^{n-1} (\alpha_i - \beta_j - s)^{n-s} \prod_{\nu_1>\nu_2} (z_{\nu_1} - z_{\nu_2}). \quad (14)$$

Применяя это равенство к определителю

$$\Delta_{10} = |W_{kjs}(z_\nu)|_{\substack{\nu=0,1,\ldots,N_2\\ j=1,\ldots,m+2,\, s=0,1,\ldots,n}},$$

получим, что этот определитель отличен от нуля (при выполнении условий теоремы), если числа z_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, N_2$ попарно различны. Отсюда следует утверждение леммы.

Пусть $N_1 + 1 \geqslant n$. Рассмотрим определитель

$$\Delta_{11} = \left|\chi_{kj}(\nu - s)\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\right|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N+T(m+2)(n+1)\\ k=1,\ldots,t,\, j=1,\ldots,m+2,\\ l_k=0,1,\ldots,\tau_k-1,\, s=0,1,\ldots,n}}.$$

Преобразуем этот определитель с помощью таких равенств

$$\chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{a(x)}{b(x)} = \chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1}b(\nu-x)\prod_{x=1}^{n-s}a(\nu-n+x)\frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}a(x)}{\prod_{x=1}^{\nu}b(x)};$$

и

$$\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)} = \frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\Big(\prod_{x=0}^{s-1}(\nu+\lambda_k-x)(\nu+A-\lambda_k-x)\times$$

$$\times\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\Big) = \sum_{\mu=0}^{l_k}\binom{l_k}{\mu}\frac{\partial^\mu}{\partial\lambda_k^\mu}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\times$$

$$\times\frac{\partial^{l_k-\mu}}{\partial\lambda_k^{l_k-\mu}}\prod_{x=0}^{s-1}(\nu+\lambda_k)(\nu+A-\lambda_k).$$

Если теперь воспользоваться тем, что многочлены (13) линейно независимы, то, рассуждая как при преобразовании определителя Δ_5, получим, что определитель Δ_{11} с точностью до отличного от нуля множителя равен определителю

$$\Delta_{12} = \Big|\chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1}b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)(\nu+A-\lambda_k-x)\prod_{x=1}^{n-s}a(\nu-n+x)\times$$

$$\times\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(\nu+\lambda_k)(\nu+A-\lambda_k)}\Big|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N+T(m+2)(n+1),\\ k=1,\ldots,t,\, j=1,\ldots,m+2,\\ l_k=0,1,\ldots,\tau_k-1,\, s=0,1,\ldots,n}}.$$

Лемма 6. *При выполнении условий теоремы определитель Δ_{11} отличен от нуля.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что отличен от нуля определитель $Delta_{12}$. Зафиксируем k и l_k в пределах допустимых значений этих индексов, применим к выделенной таким образом системе столбцов рассуждения из [25], доказывающие равенство (14), и вынесем за знак определителя соответствующий множитель. Проделаем это при $k = 1, \ldots, t$ и $l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1$. В результате получим, что с точностью до отличного от нуля множителя определитель Δ_{11} равен определителю

$$\Delta_{12} = \Big|\chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1}b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)(\nu+A-\lambda_k-x)\times$$

$$\times\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(\nu+\lambda_k)(\nu+A-\lambda_k)}\Big|_{\substack{\nu=N_1+1,\ldots,N+T(m+2)(n+1),\\ k=1,\ldots,t,\, j=1,\ldots,m+2,\\ l_k=0,1,\ldots,\tau_k-1,\, s=0,1,\ldots,n}}.$$

Легко видеть, что последний определитель равен отличному от нуля определителю Δ_9. Отсюда с учетом сказанного следует утверждение леммы. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы

Пусть равенство

$$P_0(z)+\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{m+2}P_{kl_kj}(z)F_{kl_kj}(z)=0$$

выполняется тождественно по z при некоторых многочленах $P_0(z)$, $P_{kl_kj}(z)$ с комплексными коэффициентами, причем не все многочлены $P_{k\tau_kj}(z)$ равны нулю. Тогда при всех достаточно больших значениях N_1 равен нулю определитель

$$\Delta=\left|\chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{1}{(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k)}\right|_{\substack{\nu=N_1,N_1+1\dots,N_1+N_2\\ k=1,\dots,t,\,l_k=0,1,\dots,\tau_k-1,\\ j=1,\dots,m+2,\,s=0,1,\dots,n}}. \qquad (15)$$

Номер строки определителя Δ задается значением ν; столбцы определяются значениями индексов k,l_k,j,s, которые упорядочиваются лексикографически. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что при выполнении ее условий определитель Δ отличен от нуля при всех достаточно больших значениях N_1. Это следует из леммы 6. Теорема доказана.

Заключение

Доказанную теорему можно использовать для получения различных сведений об арифметических свойствах значений функций (3) в ненулевой алгебраической точке. Если параметры этих функций рациональны, то соответствующий результат (о линейной независимости значений функций (3)) можно получить методом Зигеля; применение эффективного метода позволит уточнить соответствующую количественную оценку, а также при некоторых дополнительных ограничениях даст возможность рассмотреть случай иррациональных параметров.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

2. Белогривов И.И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых E-функций // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1967. № 2. С. 55-62.

3. Белогривов И.И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций одного класса // Сибирский математический журнал. 1973. Т. 14, № 1. С. 16-35.

4. Шидловский А.Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов // ДАН СССР. 1954. Т. 96, № 4. С. 697-700.

5. Шидловский А.Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка // ДАН СССР. 1966. Т. 169, № 1. С. 42-45.

6. Шидловский А.Б. Об алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций. // Труды Московского математического общества. 1967. Т. 18, № 4. С. 55-64.

7. Белогривов И.И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций // ДАН СССР. 1967. Т. 174, № 2. С. 267-270.

8. Чирский В.Г. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1978, № 5. С. 3-8.

9. Салихов В.Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E-функций // Acta Arithm. 1990. **53**:5. P. 453-471.

10. Черепнев М.А. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций // Математические заматки. 1995. **57**:6. С. 896-912.

11. Салихов В.Х. Критерий алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций (четный случай) // Математические заматки. 1998. **64**:2. С. 273-284.

12. Горелов В.А. Об алгебраической независимости значений обобщенных гипергеометрических функций // Математические заматки. 2013. **94**:1. С. 94-108.

13. Горелов В.А. Об алгебраических свойствах решений неоднородных гипергеометрических уравнений // Математические заматки. 2016. **99**:5. С. 658-672.

14. Mahler K. Applications of a theorem by A.B.Shidlovski // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1968. V. 305. P. 149-173.

15. Väänänen K. On the algebraic independence of the values of some E-functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae, ser. A. math. 1975. V. 1. P. 93–109.

16. Galochkin A.I. On effective bounds for certain linear forms // New Advances in Transcendence theory. Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney. 1988. P. 207–215.

17. Galochkin A.I. Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2011. V. 1, iss. 2. P. 27–32.

18. Иванков П.Л. О линейной независимости некоторых функций над полем рациональных дробей // Математика и математическое моделирование. 2015, № 4. С. 1–12. DOI: 10.7463 / mathm. 0145.0817328.

19. Иванков П.Л. О линейной независимости некоторых функций // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11, вып. 1. С. 145–151.

20. Иванков П.Л. О дифференцировании по параметру некоторых функций // Наука и образование. Электронное научно-техническое издание. 2012, № 5. С. 141–154. DOI: 10.7463 / 0512.0398478.

21. Иванков П.Л. Об использовании совместных приближений для изучения арифметической природы значений гипергеометрических функций // Наука и образование. Электронное научно-техническое издание. 2012, № 12. С. 135–142. DOI: 10.7463 / 1212.0500464.

22. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994. 320 с.

23. Фельдман Н.И. Седьмая проблема Гильберта. М: Изд-во Моск. ун-та, 1982.

24. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984.

25. Иванков П.Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1, вып. 1. С. 191–206.

REFERENCES

1. Shidlovskii, A.B. 1987, "Transcendentnye chisla"[Transcendental numbers] *"Nauka"*, 448 pp. (Russian)

2. Belogrivov, I.I. 1967, "Transcendentality and algebraic independence of values of certain E-functions *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1 Math. Mech.*, vol. 22, no. 2, pp. 55-62. (Russian)

3. Belogrivov, I.I. 1973, "The transcendence and algebraic independence of the values of a certain class of E-functions *Sibirsk. Math. Zh.*, vol. 14, no. 1, pp. 16-35. (Russian)

4. Shidlovskii, A.B. 1954, "On transcendentality and algebraic independence of the values of entire functions of certain class *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 96, № 4. pp. 697-700. (Russian)

5. Shidlovskii, A.B. 1966, "Transcendence and algebraic independence of values of E-functions satisfying linear nonhomogeneous differential equations of the second order *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* vol. 169, № 1. pp. 42-45. (Russian)

6. Shidlovskii, A.B. 1967, "Algebraic independence of the values of certain hypergeometric E-functions *Trudy Moskov. Mat. Obsh.*, vol. 18, № 4. pp. 55-64. (Russian)

7. Belogrivov I.I., 1967, "On transcendence and algebraic independence of values of certain hypergeometric E-functions *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 174, № 2. pp. 267-270. (Russian)

8. Chirsky V.G., 1978, "On arithmetic properties of the values of hypergeometric functions with irrational parameters *Vestnik Moskov. Univ.* Ser. 1. Mat. Meh. no. 5, pp. 3-8.

9. Salikhov V.Kh., 1990, "Irreducibility of hypergeometric equations and algebraic independence of values of E-functions *Acta Arithm.*, **53**:5, pp. 453-471.

10. Cherepnev M.A., 1995, "On algebraic independence of values of hypergeometric E-functions" , *Mat. Zametki*, vol. 57, no. 6, pp. 896-912.

11. Salikhov V.Kh., 1998, "Criterion for the algebraic independence of the values of hypergeometric E-functions (even case) *Mat. Zametki*, vol. 64, no. 2, pp. 273-284.

12. Gorelov V.A., 2013, "On algebraic independence of the values of hypergeometric functions *Mat. Zametki*, vol. 94, no. 1, pp. 94-108.

13. Gorelov V.A., 2016, "On algebraic properties of the solutions of nonhomogeneous hypergeometric equations" , *Mat. Zametki*, vol. 99, no. 5, pp. 658-672.

14. Mahler K., 1968, "Applications of a theorem by A. B. Shidlovski" *Proc. Roy. Soc.* Ser. A., V. 305, P. 149-173.

15. Väänänen K., 1975, "On the algebraic independence of the values of some E-functions *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, ser. A. math. V. 1. P. 93–109.

16. Galochkin A.I., 1988, "On effective bounds for certain linear forms" , *New Advances in Transcendence theory*, Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney. P. 207–215.

17. Galochkin A.I., 2011, "Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions"*Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory.* V. 1, iss. 2. P. 27–32.

18. Ivankov, P.L. 2015, "On linear independence of certain functions over the field

of rational fractions *Mathematics and mathematical Modelling*, no. 4, pp. 1-12. DOI: 10.7463 / mathm. 0145.0817328.

19. Ivankov, P.L. 2010, "On linear independence of certain functions", *Chebyshev. Sbornik*, v. 11, issue 1, pp. 145-151. (Russian)

20. Ivankov, P.L. 2012, "On differentiation with respect to parameter of certain functions *Science and Education of the Bauman MSTU*, no. 5, pp. 141-154. DOI: 10.7463/0512.0398478.

21. Ivankov, P.L. 2012, "On application of simultaneous approximations for the investigation of arithmetic nature of the values of hypergeometric functions *Science and Education of the Bauman MSTU*, no. 12, pp. 135-142.

DOI: 10.7463/1212.0500464. (Russian)

22. Kostrikin, A.I., 1994, *Vvedenije v algebru* [Introduction to Algebra], Fizmatlit Publishing Company. (Russian)

23. Fel'dman N.I., 1982, *Sedmaya problema Hilberta* [Hilbert's seventh problem], Moscow, MSU Publ. (Russian).

24. Proskurjakov I.V., 1984, *Sbornik zadach po lineynoy algebre* [A collection of problems in linear algebra], Moscow, "Nauka"(Russian).

25. Ivankov, P.L. 1995, "On linear independence of the values of some functions"*Fundamentalnaya i Pricladnaya Matematica*, v. 1, issue 1, pp. 191-206. (Russian)

Получено 4.07.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.