ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-4-137-157

# Подстановка Рози и локальная структура разбиений тора

А. А. Жукова, А. В. Шутов

**Жукова Алла Адольфовна** — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра информационных технологий, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Владимирский филиал (г. Владимир).
*e-mail: georg967@mail.ru*
**Шутов Антон Владимирович** — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной техники и систем управления, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (г. Владимир).
*e-mail: a1981@mail.ru*

**Аннотация**

Для любого иррационального $\alpha$ можно рассмотреть разбиения отрезка $[0;1]$ точками вида $\{i\alpha\}$ с $0 \leq i < n$. Данные разбиения обладают целым рядом интересных свойств, наиболее известными из которых являются теоремы о трех длинах и о трех прыжках. В частности, эти разбиения содержат отрезки либо двух, либо трех различных длин. В случае двух длин соответствующие разбиения известны как обобщенные разбиения Фибоначчи. Они тесно связаны с комбинаторикой слов, одномерными квазипериодическими разбиениями, множествами ограниченного остатка, отображениями первого возвращения для иррациональных поворотов окружности и т. д.

Перенос общих теорем о трех длинах и о трех прыжках на двумерный случай, то есть на точки вида $(\{i\alpha_1\}, \{i\alpha_2\})$ является известной открытой проблемой. В настоящей работе рассматривается некоторый частный случай этой задачи связанный с двумерными обобщениями разбиений Фибоначчи. Эти разбиения получаются при помощи итераций геометрической версии знаменитой подстановки Рози. Они возникают в комбинаторике слов при изучении обобщений последовательностей Штурма, а также в теории чисел при изучении сдвигов тора. Рассматриваемые разбиения состоят из ромбов трех различных типов. Доказано, что во всех разбиениях существует ровно 9 типов наборов ромбов, соседних с заданным ромбом. Также дан способ позволяющий по ромбу разбиения однозначно установить его соседей. Полученные результаты можно рассматривать как первый шаг к многомерному обобщению теорем о трех длинах и трех прыжках.

*Ключевые слова:* теорема о трех длинах, теорема о трех прыжках, подстановка Рози, обобщенное перекладывающееся разбиение тора, множество ограниченного остатка.

*Библиография:* 26 названий.

**Для цитирования:**
А. А. Жукова, А. В. Шутов. Подстановка Рози и локальная структура разбиений тора // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 137–157.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-20-4-137-157

## Rauzy substitution and local structure of torus tilings

A. A. Zhukova, A. V. Shutov (Vladimir)

**Zhukova Alla Adolfovna** — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Department of information technology, Russian Academy of national economy and public administration under the President of the Russian Federation, Vladimir branch (Vladimir).
*e-mail: georg967@mail.ru*
**Shutov Anton Vladimirovich** — candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Department of computer engineering and control systems, Vladimir state University named after Alexander Grigoryevich and Nikolai Grigoryevich Stoletov (Vladimir).
*e-mail: a1981@mail.ru*

**Abstract**

For any irrational $\alpha$ we can consider tilings of the segment $[0;1]$ by the points $\{i\alpha\}$ with $0 \le i < n$. These tilings have some interesting properties, including well-known three lengths and three gaps theorems. In particular, these tilings contain segments of either two, or three different lengths. In the case of two lengths, the corresponding tilings are known as generalized Fibonacci tilings. They are closely connected with the combinatorics of words, one-dimensional quasiperiodic tilings, bounded remainder sets, first return maps for irrational circle rotations, etc.

Transferring the general three lengths and three gaps theorems to two-dimensional case, i.e. to the points $(\{i\alpha_1\}, \{i\alpha_2\})$ is a well-known open problem. In the present work we consider a special case of this problem. associated with two-dimensional generalizations of Fibonacci tilings. These tilings are obtained using iterations of the geometric version of the famous Rauzy substitution. They arise in the words combinatorics in the study of generalizations of Sturmian sequences, as well as in number theory in the study of toric shifts. Considered tilings consist of rhombuses of three different types. It is proved that there are exactly 9 types of sets of rhombuses adjacent to a given rhombus. Also we obtain a method that allows explicitly determine all neighbours of the given rhombus. The results can be considered as a first step to a multidimensional generalization of the three lengths and three gaps theorems.

*Keywords:* three length theorem, three gaps theorem, Rauzy substitution, generalized exchanged toric tilings, bounded remainder sets.

*Bibliography:* 26 titles.

**For citation:**
A. A. Zhukova, A. V. Shutov, 2019, "Rauzy substitution and local structure of torus tilings", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 137–157.

## 1. Введение

Пусть $\alpha$ – иррациональное число и $T_n$ – разбиение отрезка $[0;1]$ точками вида $\{i\alpha\}$ с $0 \le i < n$. Разбиение $T_n$ обладает двумя тесно связанными между собой фундаментальными свойствами, описывающими комбинаторику и геометрию последовательности $\{i\alpha\}$.

1) Разбиение $T_n$ содержит отрезки либо двух, либо трех различных длин. Если таких длин три, то одна из них является суммой двух других.

2) Пусть $\{i_1\alpha\}$ и $\{i_2\alpha\}$ – концы некоторого отрезка разбиения $T_n$. Тогда величина $i_2 - i_1$ принимает на разбиении $T_n$ либо два, либо три значения. Если таких значений три, то одно из них является суммой двух других.

Упомянутые значения могут быть явно вычислены в терминах разложения $\alpha$ в цепную дробь.

Данные утверждения известны как теорема о трех длинах и теорема о трех прыжках (гипотеза Штейнгауза). В настоящее время имеется несколько десятков работ, посвященных двум данным теоремам. В частности, многочисленные их доказательства можно найти в [7], [11], [15],[16], [17],[18], [19], [26] и т.д. Различные попытки обобщения связаны с переносом описанных результатов на случай других последовательностей от одной переменной [20], многомерных последовательностей вида $\sum\limits_{k=1}^{d} i_k\alpha_k$ [3], [6], [13], [9] римановых многообразий [2], квазипериодический разбиений [10], упорядоченных абелевых групп [8] и т.д.

Тем не менее, остается нерешенным крайне интересный вопрос о правильном обобщении данной теоремы на случай последовательностей вида $(\{i\alpha_1\},\ldots,\{i\alpha_d\})$ распределенных на многомерном торе. Отдельные (далекие от окончательных) результаты в этом направлении можно найти в [5], [4], [21]. Трудность здесь связана с тем, что нет естественного понятия соседства точек на торе. Кроме того, не имеется универсального хорошего способа построения разбиения, связанного с конечным множеством точек (стандартные подходы, связанные с разбиениями Дирихле-Вороного и Делоне здесь не вполне удовлетворительны).

В. Г. Журавлев [23] для $\alpha = \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ рассмотрел частный случай разбиений $T_n$, в котором интервалы разбиения имеют всего две различные длины. Данные разбиения были названы им разбиениями Фибоначчи. Их изучение оказалось связанным с числами Фибоначчи, отображениями первого возвращения для иррационального поворота окружности, множествами ограниченного остатка для последовательности дробных долей линейной функции и т.д.

Разбиения Фибоначчи обладают следующим фундаментальным свойством: действие сдвига $S : x \to x - \tau \pmod 1$ на них сводится к перекладыванию двух отрезков разбиения. Следовательно, за вычетом одного длинного и одного короткого отрезка, образ отрезка разбиения Фибоначчи под действием сдвига $S$ вновь представляет собой отрезок этого разбиения. При этом в [23] был получен метод, позволяющий по номеру отрезка разбиения найти номера его соседей. Этот результат можно рассматривать как дальнейшее уточнение теоремы о трех прыжках.

Теория разбиений Фибоначчи была перенесена на случай произвольного иррационального $\alpha$ А. В. Шутовым (см., например, [26]).

Вопрос о переносе данной теории на многомерный случай до конца не решен. Тем не менее, в случае алгебраических чисел Пизо и связанных с ними сдвигов тора имеется как минимум два естественных кандидата на роль многомерных обобщений разбиений Фибоначчи. Эти кандидаты основаны на теории фракталов Рози [14], [12], [24] и на теории геометрических подстановок Арно-Ито [1], [12]. В [25] было рассмотрено простейшее семейство разбиений двумерного тора, возникающее в теории Арно-Ито, и связанное со знаменитой подстановкой Рози. Было показано, что данные разбиения, рассматриваемые вместе со сдвигом тора на вектор $(\xi^{-1}, \xi^{-2})$ (где $\xi$ – действительный корень уравнения $\xi^3 - \xi^2 - \xi - 1 = 0$), обладают свойствами, аналогичными разбиениям Фибоначчи. В частности, данные разбиения состоят из ромбов трех различных типов, а действие сдвига тора на них сводится к перекладыванию трех ромбов разбиения. В связи с этим возникает вопрос о построении обобщения теоремы о трех прыжках на случай этого разбиения. Данный аналог требует описания 4 соседних ромбов для каждого ромба, входящего в разбиение. В настоящей работе приведено полное решение этой задачи. Показано, что в зависимости от типа исходного ромба существует пять, три или один тип четверки его соседей, а также указан способ явного определения этой четверки.

## 2. Вспомогательные результаты

Пусть $L$ — двумерная решетка, $v$ — иррациональный относительно решетки $L$ вектор, т.е. вектор, координаты которого в некотором базисе решетки $L$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$ вместе с единицей (очевидно, что данное определение не зависит от выбора базиса). Отображение сдвига

$$S : x \to x + v \pmod{L}$$

переводит двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/L$ в себя.

Множество $T$ будем называть *фундаментальной областью* решетки $L$, если:

1) для любой точки $x \in \mathbb{R}^2$ существует точка $x' \in T$ такая, что $x \equiv x' \pmod{L}$;

2) любые две точки $x, x' \in T$ не сравнимы по модулю решетки: $x \not\equiv x' \pmod{L}$.

Очевидно, что существует единственное взаимно-однозначное отображение $\iota$: $\mathbb{T}^2 \to T$ между фундаментальной областью $T$ и тором $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/L$.

Рассмотрим теперь разбиение

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \mathbb{T}_2 \tag{1}$$

двумерного тора на непересекающиеся множества и порожденное им разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup T_2, \qquad \text{где} \qquad T_i = \iota(\mathbb{T}_i).$$

Разбиение (1) будем называть *перекладывающимся*, если существуют векторы $v^0$, $v^1$, $v^2$ такие, что отображение $S^* : x \to x + v^j$, если $x \to T_j$, переводит множество $T$ в себя и его действие на множестве $T$ совпадает с действием, индуцированным сдвигом $S$, т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^2 & \xrightarrow{S} & \mathbb{T}^2 \\ \big\downarrow \iota & & \big\downarrow \iota \\ T & \xrightarrow{S^*} & T \end{array} \tag{2}$$

коммутативна. Пример такого разбиения изображен на рис. 1.

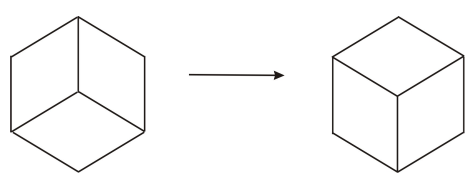

Рис. 1. Пример перекладывающегося разбиения.

Рассмотрим разбиение двумерного тора $\mathbb{T}^2$

$$\mathbb{T}^2 = \coprod_{i=0}^{\sharp R-1} \mathbb{R}_i \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp G-1} \mathbb{G}_i \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp B-1} \mathbb{B}_i \tag{3}$$

на непересекающиеся множества трех типов. Здесь $\sharp R$, $\sharp G$ и $\sharp B$ — количества множеств типов $R$, $G$ и $B$ соответственно.

Разбиение (3) порождает разбиение развертки

$$T = \coprod_{i=0}^{\sharp R-1} R_i \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp G-1} G_i \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp B-1} B_i,$$

в котором $R_i = \iota(\mathbb{R}_i)$, $G_i = \iota(\mathbb{G}_i)$, $B_i = \iota(\mathbb{B}_i)$.

Пусть теперь отображение $S^*$ таково, что диаграмма (2) коммутативна. Разбиение (3) будем называть *обобщенным перекладывающимся разбиением тора относительно сдвига* $S$, если выполняются следующие три условия:

1) $S^*(R_i) = R_{i+1}$, $S^*(G_i) = G_{i+1}$, $S^*(B_i) = B_{i+1}$ для всех допустимых значений $i$;

2) справедливо равенство

$$R_0 \sqcup G_0 \sqcup B_0 = S^* \left(R_{\sharp R-1}\right) \sqcup S^* \left(G_{\sharp G-1}\right) \sqcup S^* \left(B_{\sharp B-1}\right)$$

и существуют векторы

$$w_R = \left(w_R^1, w_R^2\right), \qquad w_G = \left(w_G^1, w_G^2\right), \qquad w_B = \left(w_B^1, w_B^2\right),$$

такие, что

$$S^* \left(R_{\sharp R-1}\right) - w_R = R_0, \quad S^* \left(G_{\sharp G-1}\right) - w_G = G_0, \quad S^* \left(B_{\sharp B-1}\right) - w_B = B_0;$$

3) определитель

$$\begin{vmatrix} \sharp R & \sharp G & \sharp B \\ w_R^1 & w_G^1 & w_B^1 \\ w_R^2 & w_G^2 & w_B^2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Перейдем к изложению теоретических сведений о подстановках Рози, необходимых для доказательства основного результата о видах и номерах квадратов, являющихся первым окружением базисных квадратов обобщенного перекладывающегося разбиения тора, в соответствии с книгой [12]. Подробные доказательства приведенных ниже утверждений можно найти в работе [1].

Рассмотрим множество $\Lambda$, состоящего из квадратов

$$(x, i^*) = \{x + \lambda e_j + \mu e_k : 0 \leqslant \lambda, \mu < 1\},$$

где $i = 1, 2, 3$, $x \in \mathbb{Z}^3$, $e_1 = (1, 0, 0)^t$, $e_2 = (0, 1, 0)^t$, $e_3 = (0, 0, 1)^t$, называемых *базисными*. Точку $x$ базисного квадрата $(x, i^*)$ называют *отмеченной*.

Матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

назовем *матрицей подстановки Рози*, $i$-й вектор-столбец матрицы $M^{-N}$ обозначим $f_i^{(N)}$.

Определим подстановку Рози $\Theta$ следующим образом:

$$\Theta : \begin{array}{l} (0, 1^*) \to (0, 3^*) \sqcup \left(f_2^{(1)}, 1^*\right) \sqcup \left(f_3^{(1)}, 2^*\right) \\ (0, 2^*) \to (0, 1^*) \\ (0, 3^*) \to (0, 2^*) \end{array} \qquad \Theta\left(x, i^*\right) = M^{-1}x + (0, i^*)$$

$$\Theta\left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} \lambda\right) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} \Theta(\lambda).$$

На рисунке 2 изображено действие подстановки $\Theta$ на базисных квадратах $(0, i^*)$.

Положим

$$D_N^{(i)} = \Theta^N \left(0, i^*\right), \qquad D_N = \coprod_{i=1}^{3} D_N^{(i)}.$$

Несколько первых множеств $D_N$ изображены на рисунке 3.

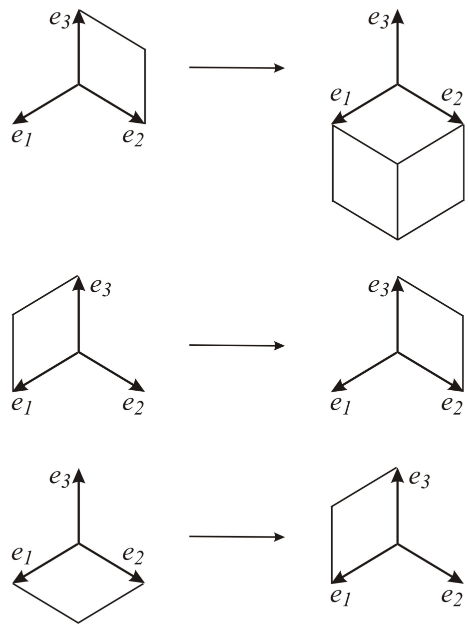


Рис. 1: Действие подстановки Θ на базисных квадратах.

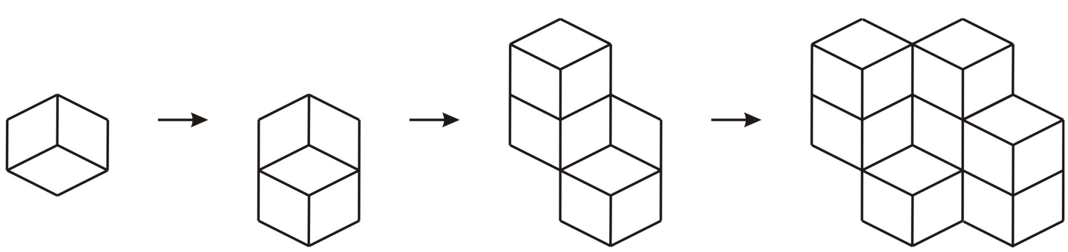

Рис. 2: Множества $D_N$ для малых $N$.

Лемма 1. *Для любого $N > 0$ справедливо включение*

$$D_{N-1} \subset D_N.$$

Уравнение $x^3 + x^2 + x = 1$ имеет единственный действительный корень. Обозначим этот корень через $\zeta$.

Пусть $\pi$ – это проекция вдоль вектора $\left(1, \zeta, \zeta^2\right)^t$ из $\mathbb{R}^3$ на плоскость $P$, задаваемую уравнением $x_1 + \left(\zeta + \zeta^2\right) x_2 + \zeta x_3 = 0$.

Лемма 2. *Ограничение отображения $\pi$ на множество $D_N$ является взаимно-однозначным отображением при любом $N$.*

Положим $D_\infty = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} D_N$, тогда согласно лемме 1 множество $D_\infty$ является объединением базисных квадратов.

Обозначим через $\Gamma_\infty$ множество отмеченных точек всех базисных квадратов из $D_\infty$.

Лемма 3. *Множество $\Gamma_\infty$ и плоскость $P$ инвариантны относительно действия отображения $M^{-1}$. Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \Gamma_\infty \arrow[r, "M^{-1}"] \arrow[d, "\pi"] & \Gamma_\infty \arrow[d, "\pi"] \\ P \arrow[r, "M^{-1}"] & P \end{tikzcd} \tag{5}$$

*коммутативна.*

Определим множества $T_N = \pi(D_N)$ и $T_N^{(i)} = \pi\left(D_N^i\right)$ опираясь на справедливость леммы 2.

На множестве $T_N$ введем отображение $S_N^*$ определяемое следующим образом:

$$S_N^*(x) = x + \pi\left(f_i^{(N)}\right), \qquad \text{если} \quad x \in T_N^{(i)}.$$

Лемма 4. *Отображение $S_N^*(x)$ является взаимно-однозначным отображением множества $T_N$ в себя.*

Введем в расмотрение решетки:

$$L_0 = \{k_1(e_1 - e_2) + k_2(e_1 - e_3) : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}, \qquad L_N = M^{-N}(L_0).$$

Теорема 1. *Множество $T_N$ представляет собой фундаментальную область решетки $\pi(L_N)$. Кроме того, существует сдвиг*

$$S_N : x \to x + v_N \pmod{\pi(L_N)}$$

*тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\pi(L_N)$, действие которого на $\mathbb{R}^2/\pi(L_N)$ изоморфно действию $S_N^*$ на $T_N$. При этом в качестве вектора $v_N$ можно взять любой из векторов $\pi\left(f_i^{(N)}\right)$. Если $\iota_N$ означает естественную проекцию $\mathbb{R}^2/\pi(L_N) \to T_N$, то диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2/\pi(L_N) \arrow[r, "S_N"] \arrow[d, "\iota_N"] & \mathbb{R}^2/\pi(L_N) \arrow[d, "\iota_N"] \\ T_N \arrow[r, "S_N^*"] & T_N \end{tikzcd}$$

*коммутативна. Более того, все сдвиги $S_N^*$ изоморфны сдвигу*

$$x \to x + (\zeta, \zeta^2) \pmod{\mathbb{Z}^2}$$

*тора $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.*

Пусть множества $R_i^N$, $G_i^N$, $B_i^N$ определены индуктивно следующим образом: если $N = 0$, то $R_0^0 = \pi(0, 1^*)$, $G_0^0 = \pi(0, 2^*)$, $B_0^0 = \pi(0, 3^*)$.

Предположим, что множества $R_i^N$, $G_i^N$, $B_i^N$ определены при $N = k$. Обозначим через $\sharp R_k$, $\sharp G_k$, $\sharp B_k$ количество множеств $R_i^k$, $G_i^k$, $B_i^k$ соответственно. Положим $R_j^k = \pi(x, 1^*)$ и

$$\Theta\left(x, 1^*\right) = \left(M^{-1}x, 3^*\right) \sqcup \left(M^{-1}x + f_2^{(1)}, 1^*\right) \sqcup \left(M^{-1}x + f_3^{(1)}, 2^*\right).$$

В таком случае при $N = k + 1$ будем полагать

$$R_{\sharp G_k + j}^{k+1} = \pi\left(M^{-1}x + f_2^{(1)}, 1^*\right),$$

$$G_{\sharp B_k + j}^{k+1} = \pi\left(M^{-1}x + f_3^{(1)}, 2^*\right),$$

$$B_j^{k+1} = \pi\left(M^{-1}x, 3^*\right),$$

что можно рассматривать как

$$R_j^k \to R_{\sharp G_k + j}^{k+1} \sqcup G_{\sharp B_k + j}^{k+1} \sqcup B_j^{k+1}.$$

Теперь для $G_j^k = \pi\left(x, 2^*\right)$ и $\Theta\left(x, 2^*\right) = \left(M^{-1}x, 1^*\right)$ определим

$$R_j^{k+1} = \pi\left(M^{-1}x, 1^*\right),$$

что равносильно

$$G_j^k \to R_j^{k+1}.$$

Таким же образом для $B_j^k = \pi\left(x, 3^*\right)$ и $\Theta\left(x, 3^*\right) = \left(M^{-1}x, 2^*\right)$ положим

$$G_j^{k+1} = \pi\left(M^{-1}x, 2^*\right),$$

иначе

$$B_j^k \to G_j^{k+1}.$$

Из вышесказанного следует, что под действием отображения $\pi$ каждый базисный квадрат $(x, 1^*) \in D_N$ переходит в одно из множеств $R_j^N$, где $0 \leqslant j < \sharp R_N$; $(x, 2^*) \in D_N$ – в $G_j^N$, где $0 \leqslant j < \sharp G_N$; и $(x, 3^*) \in D_N$ – в $B_j^N$, где $0 \leqslant j < \sharp B_N$.

Пусть

$$\mathbb{R}_j^N = \iota_N^{-1}\left(R_j^N\right), \qquad \mathbb{G}_j^N = \iota_N^{-1}\left(G_j^N\right), \qquad \mathbb{B}_j^N = \iota_N^{-1}\left(B_j^N\right).$$

Приведенные ниже утверждения доказаны в статье [25].

Теорема 2. *Разбиение*

$$\mathbb{T}^2 = \coprod_{i=0}^{\sharp R_N - 1} \mathbb{R}_i^N \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp G_N - 1} \mathbb{G}_i^N \sqcup \coprod_{i=0}^{\sharp B_N - 1} \mathbb{B}_i^N$$

*является обобщенным перекладывающимся разбиением тора* $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\pi\left(L_N\right)$.

Рассмотрим последовательность натуральных чисел $\{t_i\}$, называемую *последовательностью трибоначчи*, заданную рекуррентным соотношением

$$t_{i+3} = t_{i+2} + t_{i+1} + t_i,$$

и начальными условиями $t_0 = t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Лемма 5. *При всех $N \geqslant 1$ справедливы равенства*

$$\sharp R_N = t_{N+1}, \qquad \sharp G_N = t_N + t_{N-1}, \qquad \sharp B_N = t_N.$$

Лемма 6. *При всех $N \geqslant 4$ справедливо равенство*

$$M^N = \begin{pmatrix} t_N & t_{N-1}+t_{N-2} & t_{N-1} \\ t_{N-1} & t_{N-2}+t_{N-3} & t_{N-2} \\ t_{N-2} & t_{N-3}+t_{N-4} & t_{N-3} \end{pmatrix},$$

*при малых $N$ матрица $M^N$ принимает следующий вид*

$$M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сформулируем и докажем несколько лемм.

Лемма 7. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_1\right) \equiv C_1 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)}, \tag{6}$$

*где $v_1 = (0,1,0)^t$, является $C_1 = t_N + t_{N-1}$.*

**Доказательство.** При всех $N \geqslant 4$ разрешимость сравнения (6) равносильна разрешимости матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} t_N & t_{N-1}+t_{N-2} & t_{N-1} \\ t_{N-1} & t_{N-2}+t_{N-3} & t_{N-2} \\ t_{N-2} & t_{N-3}+t_{N-4} & t_{N-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или системы линейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} t_{N-1}+t_{N-2} & = & C_1+k_1+k_2, \\ t_{N-2}+t_{N-3} & = & -k_1, \\ t_{N-3}+t_{N-4} & = & -k_2 \end{array} \right.$$

в целых числах $k_1$, $k_2$.

Сложив все три уравнения, получим, что $C_1 = t_{N-1}+t_{N-2}+t_{N-2}+t_{N-3}+t_{N-3}+t_{N-4}$ или $C_1 = t_N + t_{N-1}$.

Таким образом, решением последней системы являются целые числа

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_1 & = & t_N + t_{N-1}, \\ k_1 & = & -t_{N-2} - t_{N-3}, \\ k_2 & = & -t_{N-3} - t_{N-4}. \end{array} \right.$$

В случае $N = 3$ разрешимость исходного сравнения (6) эквивалентна разрешимости матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3 & = & C_1+k_1+k_2, \\ 2 & = & -k_1, \\ 1 & = & -k_2 \end{array} \right.$$

в целых числах $k_1$ и $k_2$.

Данная система справедлива при $C_1 = 6$, $k_1 = -2$ и $k_2 = -1$.

Перепишем число $C_1$ как $4 + 2$ или $t_3 + t_2$.

Если $N = 2$, то разрешимость сравнения (6) равносильна разрешимости матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2 &= C_1 + k_1 + k_2, \\ 1 &= -k_1, \\ 0 &= -k_2 \end{cases}$$

в целых числах $k_1$ и $k_2$.

Решением последней системы являются $C_1 = 3$, $k_1 = -1$ и $k_2 = 0$. Представим $C_1$ как $2+1$ или $t_2 + t_1$.

При $N = 1$ разрешимость сравнения (6), записанного в условии леммы, эквивалентно разрешимости матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

или системы уравнений

$$\begin{cases} 1 &= C_1 + k_1 + k_2, \\ 0 &= -k_1, \\ 1 &= -k_2 \end{cases}$$

в целых числах $k_1$ и $k_2$.

Решив последнюю систему, находим $C_1 = 2$, $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Перепишем $C_1 = 2$ иначе какм $1 + 1$ или $t_1 + t_0$. Таким образом лемма 7 полностью доказана.

Доказательство лемм 8-19 проводится аналогично доказательству леммы 7.

Здесь и далее будем полагать, что $t_{-1} = 0$.

Лемма 8. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_2\right) \equiv C_2 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

*где* $v_2 = (-1,1,0)^t$, *является* $C_2 = -t_{N-2}$.

Лемма 9. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_3\right) \equiv C_3 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

*где* $v_3 = (0,0,-1)^t$, *является* $C_3 = -t_N$.

Лемма 10. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_4\right) \equiv C_4 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

*где* $v_4 = (0,0,0)^t$, *является* $C_4 = 0$.

Лемма 11. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_5\right) \equiv C_5 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

*где* $v_5 = (0,-1,0)^t$, *является* $C_5 = -t_N - t_{N-1}$.

Лемма 12. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_6\right) \equiv C_6 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

*где* $v_6 = (0,0,1)^t$, *является* $C_6 = t_N$.

Лемма 13. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_7\right) \equiv C_7 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

*где* $v_7 = (-1,0,1)^t$, *является* $C_7 = -t_{N-1} - t_{N-2}$.

Лемма 14. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_8\right) \equiv C_8 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

*где* $v_8 = (-1,0,0)^t$, *является* $C_8 = -t_{N+1}$.

Лемма 15. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_9\right) \equiv C_9 \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

*где* $v_9 = (1,0,0)^t$, *является* $C_9 = t_{N+1}$.

Лемма 16. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_{10}\right) \equiv C_{10} \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

*где* $v_{10} = (1,-1,0)^t$, *является* $C_{10} = t_{N-2}$.

Лемма 17. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_{11}\right) \equiv C_{11} \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

*где* $v_{11} = (0,-1,1)^t$, *является* $C_{11} = -t_{N-1}$.

Лемма 18. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_{12}\right) \equiv C_{12} \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

*где* $v_{12} = (0,1,-1)^t$, *является* $C_{12} = t_{N-1}$.

Лемма 19. *Решением сравнения*

$$\pi\left(M^N v_{13}\right) \equiv C_{13} \pi(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)},$$

*где* $v_{13} = (1,0,-1)^t$, *является* $C_{13} = t_{N-1} + t_{N-2}$.

## 3. Основной результат

Теорема 3. *Соседями базисных ромбов обобщенного перекладывающегося разбиения тора являются:*

1. *для базисного ромба* $\mathbb{R}_i^N$*:*
   (a) $\mathbb{R}_{i+t_N+t_{N-1}}^N$, $\mathbb{B}_i^N$, $\mathbb{G}_i^N$, $\mathbb{R}_{i+t_N}^N$ *при* $0 \leqslant i < t_{N-2}$;
   (b) $\mathbb{G}_{i-t_{N-2}}^N$, $\mathbb{B}_i^N$, $\mathbb{G}_i^N$, $\mathbb{R}_{i+t_N}^N$ *при* $t_{N-2} \leqslant i < t_{N-2} + t_{N-1}$;
   (c) $\mathbb{G}_{i-t_{N-2}}^N$, $\mathbb{B}_i^N$, $\mathbb{G}_i^N$, $\mathbb{B}_{i-t_{N-1}-t_{N-2}}^N$ *при* $t_{N-2} + t_{N-1} \leqslant i < t_N$;
   (d) $\mathbb{G}_{i-t_{N-2}}^N$, $\mathbb{R}_{i-t_N}^N$, $\mathbb{G}_i^N$, $\mathbb{B}_{i-t_{N-1}-t_{N-2}}^N$ *при* $t_N \leqslant i < t_N + t_{N-1}$;
   (e) $\mathbb{G}_{i-t_{N-2}}^N$, $\mathbb{R}_{i-t_N}^N$, $\mathbb{R}_{i-t_N-t_{N-1}}^N$, $\mathbb{B}_{i-t_{N-1}-t_{N-2}}^N$ *при* $t_N + t_{N-1} \leqslant i < t_{N+1}$;
2. *для базисного ромба* $\mathbb{G}_i^N$*:*
   (a) $\mathbb{R}_i^N$, $\mathbb{B}_i^N$, $\mathbb{R}_{i+t_{N-2}}^N$, $\mathbb{G}_{i+t_N}^N$ *при* $0 \leqslant i < t_{N-1}$;
   (b) $\mathbb{R}_i^N$, $\mathbb{B}_i^N$, $\mathbb{R}_{i+t_{N-2}}^N$, $\mathbb{B}_{i-t_{N-1}}^N$ *при* $t_{N-1} \leqslant i < t_N$;
   (c) $\mathbb{R}_i^N$, $\mathbb{G}_{i-t_N}^N$, $\mathbb{R}_{i+t_{N-2}}^N$, $\mathbb{B}_{i-t_{N-1}}^N$ *при* $t_N \leqslant i < t_N + t_{N-1}$;
3. *для базисного ромба* $\mathbb{B}_i^N$*:* $\mathbb{R}_i^N$, $\mathbb{G}_i^N$, $\mathbb{G}_{i+t_{N-1}}^N$, $\mathbb{R}_{i+t_{N-1}+t_{N-2}}^N$ *при* $0 \leqslant i < t_N$.

**Доказательство.** Разбиение тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\pi(L_N)$, состоящее из ромбов трех видов $\mathbb{R}_i^N$, $\mathbb{G}_i^N$, $\mathbb{B}_i^N$, согласно теореме 2, является перекладывающимся. Это означает, что существуют вектора $v^0$, $v^1$, $v^2$, переводящие тор $\mathbb{T}^2$ в себя. Очевидно, что при сдвиге на вектор $v^j$ отмеченная точка одного из ромбов переходит в отмеченную точку какого-то другого ромба этого же разбиения тора $\mathbb{T}^2$.

После выполнения нескольких сдвигов на вектор $v^j$ на торе $\mathbb{T}^2$ отмеченная точка базисного ромба перейдет в отмеченную точку ромба соседнего с ним.

В силу теоремы 2 существует сдвиг

$$S_N : x \to x + v_N \pmod{\pi(L_N)}$$

тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\pi(L_N)$, действие которого можно рассматривать как отображение $S_N^*$ на $T_N$. При этом в качестве вектора $v_N$ можно взять, например, вектор $\pi\left(f_1^{(N)}\right)$.

Таким образом, если на торе $\mathbb{T}^2$ вектор $\pi(v_j)$ переводит отмеченную точку ромба с номером $i$ в отмеченную точку соседнего с ним ромбом с номером $s$, то найдется целое число $C_j$, такое что $s = i + C_j$, при котором справедливо сравнение

$$\pi(v_j) \equiv C_j \pi\left(f_1^{(N)}\right) \pmod{\pi(L_N)}.$$

Подействуем матрицей $M^N$ на последнее сравнение

$$M^N \pi(v_j) \equiv C_j M^N \pi\left(f_1^{(N)}\right) \pmod{M^N \pi(L_N)}. \tag{7}$$

В силу коммутативности диаграммы (5) справедливы равенства: $M^N \pi(v_j) = \pi\left(M^N v_j\right)$, $M^N \pi\left(f_1^{(N)}\right) = \pi\left(M^N f_1^{(N)}\right)$, $M^N \pi(L_N) = \pi\left(M^N L_N\right)$.

Согласно определению $L_N = M^{-N} L_0$, поэтому $M^N L_N = M^N M^{-N} L_0 = L_0$. Кроме того, зная, что $f_1^{(N)}$ — первый столбец матрицы $M^{-N}$, приходим к равенству

$$M^N f_1^{(N)} = f_1^{(0)} = (1, 0, 0)^t.$$

Значит сравнение (7) равносильно сравнению

$$\pi\left(M^N v_j\right) \equiv C_j \pi\,(1,0,0) \pmod{\pi(L_0)}. \tag{8}$$

Решив это сравнение для заданного $v_j$, найдем константу $C_j$. Зная целое число $C_j$, определяем возможные значения номера ромба $i$, для которого ромб с номером $i+C_j$ будет соседним, из неравенства $0 \leqslant i+C_j < K$, где $K$ равно либо $\sharp R_N$, либо $\sharp G_N$, либо $\sharp B_N$, в зависимости от типа ромба, являющегося соседним для данного базисного ромба.

Вначале определим типы и номера соседей ромба $\mathbb{R}_i^N$.

Из геометрических соображений видно, что соседом справа ромба $\mathbb{R}_i^N$ может быть либо ромб $\mathbb{R}_s^N$, либо ромб $\mathbb{G}_s^N$, но не ромб $\mathbb{B}_s^N$. Жирные вектора $v_1$ и $v_2$ на рисунке 4, переводят отмеченную точку базисного ромба $\mathbb{R}_i^N$ в отмеченную точку ромба $\mathbb{R}_s^N$ или $\mathbb{G}_s^N$. Координаты этих векторов $v_1 = (0,1,0)^t$ и $v_2 = (-1,1,0)^t$.

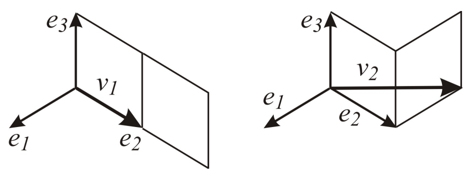


Рис. 4. Возможные соседи справа ромба $\mathbb{R}_i^N$.

Воспользуемся леммами 7, 8 для решения сравнения (8), и получим $C_1 = t_N + t_{N-1}$, $C_2 = -t_{N-2}$.

Ромбов вида $\mathbb{R}_s^N$ всего может быть $\sharp R_N$, поэтому номер ромба $\mathbb{R}_{i+C_1}^N$ должен удовлетворять неравенству $0 \leqslant i + C_1 < \sharp R_N$, или $0 \leqslant i + t_N + t_{N-1} < t_{N+1}$, или $0 \leqslant i < t_{N-2}$, т.к. номер ромба $\mathbb{R}_s^N$ может быть только неотрицательным и $t_{N+1} - t_N - t_{N-1} = t_{N-2}$.

В свою очередь ромбов вида $\mathbb{G}_s^N$ ровно $\sharp G_N$. Значит номер ромба $\mathbb{G}_{i+C_2}^N$ должен быть таким, что справедливо неравенство $0 \leqslant i + C_2 < \sharp G_N$, следовательно, $0 \leqslant i - t_{N-2} < t_N + t_{N-1}$ или $t_{N-2} \leqslant i < t_{N+1}$, т.к. $t_N + t_{N-1} + t_{N-2} = t_{N+1}$.

Исходя из геометрических представлений, можно утверждать, что соседом снизу базисного ромба $\mathbb{R}_i^N$ может быть либо ромб $\mathbb{R}_s^N$, либо $\mathbb{B}_s^N$, но не ромб $\mathbb{G}_s^N$ (см. рис. 5). Выделенные жирным вектора $v_3 = (0,0,-1)^t$ и $v_4 = (0,0,0)^t$ переводят отмеченные точки ромба $\mathbb{R}_i^N$ в $\mathbb{R}_s^N$ и ромба $\mathbb{R}_i^N$ в $\mathbb{B}_s^N$, соответственно.

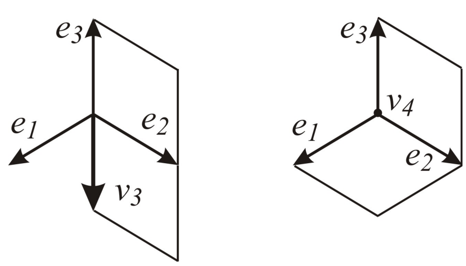


Рис. 5. Возможные соседи снизу ромба $\mathbb{R}_i^N$.

Решением сравнения (8) для векторов $v_3$ и $v_4$ согласно леммам 9, 10 являются $C_3 = -t_N$ и $C_4 = 0$.

Количество ромбов вида $\mathbb{R}_s^N$ равно $\sharp R_N$. Значит номер ромба $\mathbb{R}_{i+C_3}^N$ должен быть таким, что $0 \leqslant i + C_3 < \sharp R_N$, или $0 \leqslant i - t_N < t_{N+1}$, или $t_N \leqslant i < t_{N+1}$, т.к. номер ромба вида $\mathbb{R}_s^N$ должен быть меньше, чем $t_{N+1}$.

Ромбов вида $\mathbb{B}_s^N$ может быть только $\sharp B_N$. Это означает, что номер ромба $\mathbb{B}_{i+C_4}^N$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant i + C_4 < \sharp B_N$, или иначе $0 \leqslant i < t_N$.

Вновь применяя геометрические соображения, приходим к выводу, что соседом слева базисного ромба $\mathbb{R}_i^N$ может быть ромб $\mathbb{R}_s^N$ или ромб $\mathbb{G}_s^N$, но не ромб $\mathbb{B}_s^N$ (см. рис. 6). Отмеченные точки базисного ромба и соседнего с ним ромба образуют выделенные жирным вектора $v_5 = (0, -1, 0)^t$ и $v_4 = (0, 0, 0)^t$ для ромбов $\mathbb{R}_s^N$ и $\mathbb{G}_s^N$, соответственно.

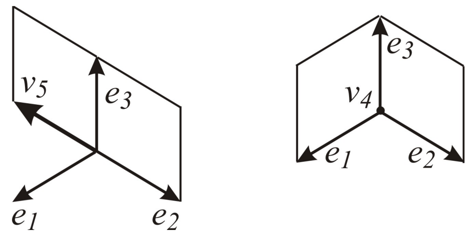


Рис. 6. Возможные соседи слева ромба $\mathbb{R}_i^N$.

Согласно леммам 11 и 10 сравнение (8), в случае векторов $v_5$ и $v_4$, выполняется при $C_5 = -t_N - t_{N-1}$ и $C_4 = 0$.

Зная, что число ромбов вида $\mathbb{R}_s^N$ равно $\sharp R_N$, приходим к выводу: номер ромба $\mathbb{R}_{i+C_5}^N$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant i + C_5 < \sharp R_N$, или $0 \leqslant i - t_N - t_{N-1} < t_{N+1}$, или $t_N + t_{N-1} \leqslant i < t_{N+1}$, т.к. номера ромбов $\mathbb{R}_s^N$ всегда меньше $t_{N+1}$.

Соответственно, ромбов вида $\mathbb{G}_s^N$ всего $\sharp G_N$, следовательно, у ромба $\mathbb{G}_{i+C_4}^N$ номер будет таким, что верно соотношение $0 \leqslant i + C_4 < \sharp G_N$, или иначе $0 \leqslant i < t_N + t_{N-1}$.

И, наконец, пользуясь геометрическими представлениями, определяем, что соседом сверху базисного ромба $\mathbb{R}_i^N$ может быть либо $\mathbb{R}_s^N$, либо $\mathbb{B}_s^N$, но не ромб $\mathbb{G}_s^N$ (см. рис. 7). Отмеченные точки этих ромбов $\mathbb{R}_s^N$ и $\mathbb{B}_s^N$ отличаются от отмеченной точки базисного ромба на выделенные жирным вектора $v_6 = (0, 0, 1)^t$ и $v_7 = (-1, 0, 1)^t$, соответственно.

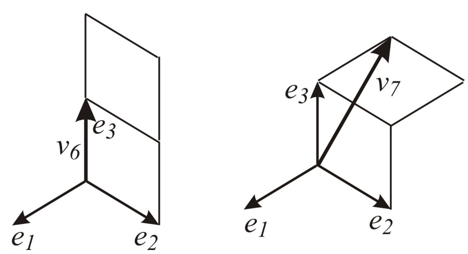


Рис. 7. Возможные соседи сверху ромба $\mathbb{R}_i^N$.

В случае векторов $v_6$ и $v_7$ сравнение (8), согласно леммам 12 и 13, имеет решение $C_6 = t_N$ и $C_7 = -t_{N-1} - t_{N-2}$.

Так как ромбов вида $\mathbb{R}_s^N$ имеется $\sharp R_N$, то номер ромба $\mathbb{R}_{i+C_6}$ должен быть таким, что $0 \leqslant i + C_6 < \sharp R_N$, или $0 \leqslant i + t_N < t_{N+1}$, или $0 \leqslant i < t_{N+1} - t_N$, или $0 \leqslant i < t_{N-1} + t_{N-2}$, в силу того, что номер ромба — это неотрицательное число и $t_{N+1} - t_N = t_{N-1} + t_{N-2}$.

Из того, что ромбов вида $\mathbb{B}_s^N$ всего $\sharp B_N$, делаем вывод о том, что для номера ромба $\mathbb{B}_{i+C_7}$ справедливо неравенство $0 \leqslant i + C_7 < \sharp B_N$, или $0 \leqslant i - t_{N-1} - t_{N-2} < t_N$, или $t_{N-1} + t_{N-2} \leqslant i < t_{N+1}$, так как $t_{N+1} = t_N + t_{N-1} + t_{N-2}$.

Собирая полученные результаты вместе, получаем, что базисный ромб $\mathbb{R}_i^N$ будет иметь следующих соседей:

1. $\mathbb{R}_{i+C_1}^N, \mathbb{B}_{i+C_4}^N, \mathbb{G}_{i+C_4}^N, \mathbb{R}_{i+C_6}^N$ при $0 \leqslant i < t_{N-2}$;
2. $\mathbb{G}_{i+C_2}^N, \mathbb{B}_{i+C_4}^N, \mathbb{G}_{i+C_4}^N, \mathbb{R}_{i+C_6}^N$ при $t_{N-2} \leqslant i < t_{N-2} + t_{N-1}$;
3. $\mathbb{G}_{i+C_2}^N, \mathbb{B}_{i+C_4}^N, \mathbb{G}_{i+C_4}^N, \mathbb{B}_{i+C_7}^N$ при $t_{N-2} + t_{N-1} \leqslant i < t_N$;
4. $\mathbb{G}_{i+C_2}^N, \mathbb{R}_{i+C_3}^N, \mathbb{G}_{i+C_4}^N, \mathbb{B}_{i+C_7}^N$ при $t_N \leqslant i < t_N + t_{N-1}$;

5. $\mathbb{G}^N_{i+C_2}$, $\mathbb{R}^N_{i+C_3}$, $\mathbb{R}^N_{i+C_5}$, $\mathbb{B}^N_{i+C_7}$ при $t_N + t_{N-1} \leqslant i < t_{N+1}$.

Перейдем к определению типов и номеров соседей базисного ромба $\mathbb{G}^N_i$.

Принимая во внимание геометрические соображения, получаем, что соседом справа этого ромба будет либо ромб $\mathbb{G}^N_s$, либо $\mathbb{R}^N_s$, но не ромб $\mathbb{B}^N_s$ (см. рис. 8). Переход от отмеченной точки ромба $\mathbb{G}^N_i$ к отмеченной точке ромба $\mathbb{G}^N_s$ или ромба $\mathbb{R}^N_s$ осуществляется с помощью выделенных жирным векторов $v_8 = (-1, 0, 0)^t$ и $v_4 = (0, 0, 0)^t$, соответственно.

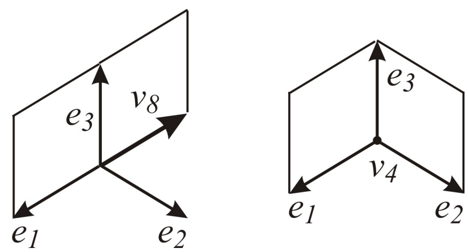

Рис. 8. Возможные соседи справа ромба $\mathbb{G}^N_i$.

Решением сравнения (8) для векторов $v_8$, $v_4$ в силу лемм 14 и 10 будут числа $C_8 = -t_{N+1}$ и $C_4 = 0$.

Ромбов вида $\mathbb{G}^N_s$ при заданном $N$ имеется $\sharp G_N$, поэтому ромб $\mathbb{G}^N_{i+C_8}$ должен быть таким, что его номер удовлетворяет соотношению $0 \leqslant i + C_8 < \sharp G_N$, или $0 \leqslant i - t_{N+1} < t_N + t_{N-1}$, или $t_{N+1} \leqslant i < t_{N+2}$, что противоречит условию $i < t_N + t_{N-1}$.

Известно, что ромбов $\mathbb{R}^N_s$ всего $\sharp R_N$. Значит ромб $\mathbb{R}_{i+C_4}$ будет соседом ромба $\mathbb{G}^N_i$, если $0 \leqslant i + C_4 < \sharp R_N$, или иначе $0 \leqslant i < t_{N+1}$.

Пользуясь геометрическими представлениями, замечаем, что соседом снизу базисного ромба $\mathbb{G}^N_i$ может быть $\mathbb{G}^N_s$ или $\mathbb{B}^N_s$, но не $\mathbb{R}^N_s$ (см. рис. 9). Вектора, переводящие отмеченную точку базисного ромба в отмеченную точку соседнего, – это выделенные жирным вектора $v_3 = (0, 0, -1)^t$ и $v_4 = (0, 0, 0)^t$ для ромбов $\mathbb{G}^N_{i+C_3}$ и $\mathbb{R}^N_{i+C_4}$.

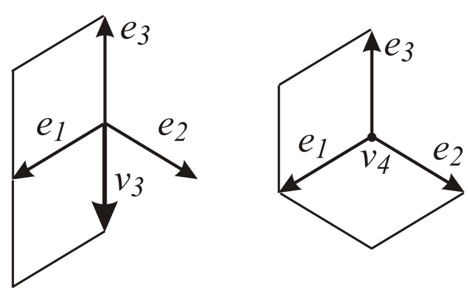

Рис. 9. Возможные соседи снизу ромба $\mathbb{G}^N_i$.

Как было отмечено ранее, сравнение (8) в случае векторов $v_3$ и $v_4$, согласно леммам 9 и 10, справедливы при $C_3 = -t_N$ и $C_4 = 0$.

Зная, что ромбов вида $\mathbb{G}^N_s$ имеется ровно $\sharp G_N$, приходим к выводу о справедливости для ромба $\mathbb{G}^N_{i+C_3}$ неравенства $0 \leqslant i + C_3 < \sharp G_N$, или $0 \leqslant i - t_N < t_N + t_{N-1}$, или $t_N \leqslant i < t_N + t_{N-1}$, т.к. номер ромба вида $\mathbb{G}^N_s$ не может быть больше или равен $t_N + t_{N-1}$.

Кроме того, ромбов вида $\mathbb{B}^N_s$ может быть $\sharp B_N$. Таким образом, номер ромба $\mathbb{B}^N_{i+C_4}$ должен быть таким, что $0 \leqslant i + C_4 < \sharp B_N$, или иначе $0 \leqslant i < t_N$.

Исходя из геометрических соображений, можно сказать, что соседом слева базисного ромба $\mathbb{G}^N_i$ будут ромбы $\mathbb{G}^N_s$ или $\mathbb{R}^N_s$, но не ромб $\mathbb{B}^N_s$ (см. рис. 10). Вектора, соединяющие отмеченные точки базисного ромба и его соседей, – это изображенные жирным вектора $v_9 = (1, 0, 0)^t$ и $v_{10} = (1, -1, 0)^t$, соответственно.

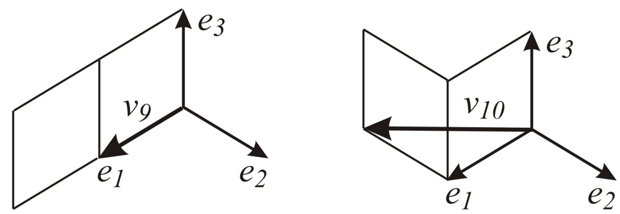

Рис. 10. Возможные соседи слева ромба $\mathbb{G}_i^N$.

В силу лемм 15 и 16 сравнение (8) для векторов $v_9$ и $v_{10}$ верно, если $C_9 = t_{N+1}$ и $C_{10} = t_{N-2}$.

Так как количество ромбов вида $\mathbb{G}_s^N$ равно $\sharp G_N$, то номер ромба $\mathbb{G}_{i+C_9}^N$ должен быть таким, что верно неравенство $0 \leqslant i+C_9 < \sharp G_N$, или $0 \leqslant i+t_{N+1} < t_N+t_{N-1}$, или $-t_{N+1} \leqslant i < -t_{N-2}$, что не имеет смысла, в силу того, что номер ромба может быть только неотрицательным.

При данном $N$ имеется всего $\sharp R_N$ ромбов вида $\mathbb{R}_s^N$. Значит ромб $\mathbb{R}_{i+C_{10}}^N$ имеет номер, удовлетворяющий условию $0 \leqslant i+C_{10} < \sharp R_N$, или $0 \leqslant i+t_{N-2} < t_{N+1}$, или $0 \leqslant i < t_{N+1}-t_{N-2}$, или $0 \leqslant i < t_N + t_{N-1}$, так как номер ромба всегда неотрицателен, а $t_{N+1} - t_{N-2} = t_N + t_{N-1}$.

Вновь воспользуемся геометрическими представлениями и получим, что сверху соседом базисного ромба $\mathbb{G}_i^N$ может быть ромб $\mathbb{G}_s^N$ или ромб $\mathbb{B}_s^N$, но не ромб $\mathbb{R}_s^N$ (см. рис. 11). Вектора, связывающие отмеченные точки базисного ромба и отмеченные точки соседей, – это выделенные жирным вектора $v_6 = (0,0,1)^t$ и $v_{11} = (0,-1,1)^t$, соответственно.

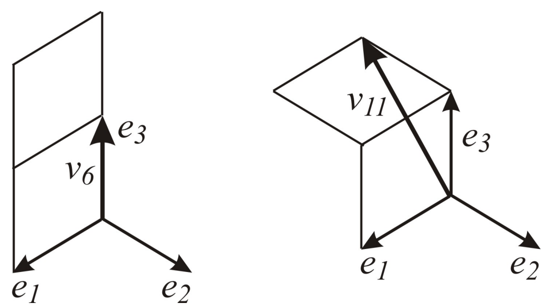

Рис. 11. Возможные соседи сверху ромба $\mathbb{G}_i^N$.

Леммы 12 и 17 позволяют найти решение сравнения (8) для векторов $v_6$ и $v_{11}$. Согласно указанным леммам $C_6 = t_N$ и $C_{11} = -t_{N-1}$ удовлетворяют сравнению (8).

Зная, что ромбов вида $\mathbb{G}_s^N$ в разбиении с номером $N$ содержится $\sharp G_N$, приходим к выводу о справедливости для ромба $\mathbb{G}_{i+C_6}^N$ неравенства $0 \leqslant i + C_6 < \sharp G_N$, или $0 \leqslant i + t_N < t_N + t_{N-1}$, или $0 \leqslant i < t_{N-1}$, т.к. номер ромба неотрицателен.

В свою очередь, ромбов вида $\mathbb{B}_s^N$ всего $\sharp B_N$. Поэтому номер ромба $\mathbb{B}_{i+C_{11}}^N$ должен удовлетворять неравенству $0 \leqslant i + C_{11} < \sharp B_N$, или $0 \leqslant i - t_{N-1} < t_N$, или $t_{N-1} \leqslant i < t_N$ в силу того, что номер ромба $\mathbb{B}_s^N$ не может быть больше или равен $t_N$.

Итак, соседями базисного ромба $\mathbb{G}_i^N$, в зависимости от номера $i$ будут:

1. $\mathbb{R}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{B}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{R}_{i+C_{10}}^N$, $\mathbb{G}_{i+C_6}^N$ при $0 \leqslant i < t_{N-1}$;

2. $\mathbb{R}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{B}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{R}_{i+C_{10}}^N$, $\mathbb{B}_{i+C_{11}}^N$ при $t_{N-1} \leqslant i < t_N$;

3. $\mathbb{R}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{G}_{i+C_3}^N$, $\mathbb{R}_{i+C_{10}}^N$, $\mathbb{B}_{i+C_{11}}^N$ при $t_N \leqslant i < t_N + t_{N-1}$.

Рассмотрим базисный ромб $\mathbb{B}_i^N$.

Принимая во внимание геометрические соображения, замечаем, что соседом ромба этого справа и сверху может быть либо ромб $\mathbb{B}_s^N$, либо ромб $\mathbb{R}_s^N$, но не ромб $\mathbb{G}_s^N$ (см. рис. 12). Вектора, соединяющие отмеченные точки базисного ромба и его соседей, – это изображенные жирными вектора $v_8 = (-1,0,0)^t$ и $v_4 = (0,0,0)^t$, соответственно.

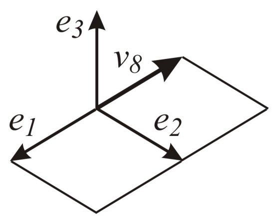


Рис. 12. Возможные соседи справа и сверху ромба $\mathbb{B}_i^N$.

Как было отмечено ранее, решениями сравнения (8) для векторов $v_8$ и $v_4$, согласно леммам 14 и 10, являются $C_8 = -t_{N+1}$ и $C_4 = 0$.

Так как в разбиении с номером $N$ существует $\sharp B_N$ ромбов вида $\mathbb{B}_s^N$, то ромб $\mathbb{B}_{i+C_8}^N$ будет таким, что $0 \leqslant i + C_8 < \sharp B_N$, или $0 \leqslant i - t_{N+1} < t_N$, $t_{N+1} \leqslant i < t_{N+1} + t_N$, что противоречит тому, что ромбов вида $\mathbb{B}_i^N$ всего $\sharp B_N = t_N$.

Известно, что имеется $\sharp R_N$ ромбов вида $\mathbb{R}_s^N$. Поэтому номер ромба $\mathbb{R}_{i+C_4}^N$ должен удовлетворять неравенству $0 \leqslant i + C_4 < \sharp R_N$, а, следовательно, $0 \leqslant i < t_{N+1}$.

У базисного ромба $\mathbb{B}_i^N$, исходя из геометрических представлений, соседом справа и снизу будет либо ромб $\mathbb{B}_s^N$, либо $\mathbb{G}_s^N$, но не ромб $\mathbb{R}_s^N$ (см. рис. 13). Вектора, переводящие отмеченные точки базисного ромба в отмеченные точки соседних, – это выделенные жирным вектора $v_1 = (0,1,0)^t$ и $v_{12} = (0,1,-1)^t$, соответственно.

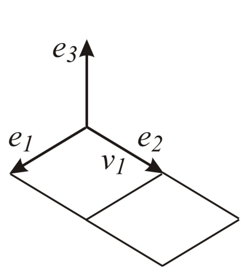


Рис. 13. Возможные соседи справа и снизу ромба $\mathbb{B}_i^N$.

В случае векторов $v_1$ и $v_{12}$ сравнение (8), в силу лемм 7 и 18, имеет решение $C_1 = t_N + t_{N-1}$ и $C_{12} = t_{N-1}$.

Ромбов вида $\mathbb{B}_s^N$ существует ровно $\sharp B_N$. Значит ромб $\mathbb{B}_{i+C_1}^N$ должен быть таким, что справедливо соотношение $0 \leqslant i + C_1 < \sharp B_N$, или $0 \leqslant i + t_N + t_{N-1} < t_N$, или $-t_N - t_{N-1} \leqslant i < -t_{N-1}$. Данное неравенство не имеет смысла, т.к. номер ромба всегда неотрицателен. Поэтому ромб $\mathbb{B}_s^N$ не может иметь соседом справа и снизу ромб вида $\mathbb{B}_i^N$.

В свою очередь ромбов вида $\mathbb{G}_s^N$ имеется только $\sharp G_N$. Это означает, что номер ромба $\mathbb{G}_{i+C_{12}}^N$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant i + C_{12} < \sharp G_N$, иначе $0 \leqslant i + t_{N-1} < t_N + t_{N-1}$ или $0 \leqslant i < t_N$, т.к. номер ромба не может быть отрицательным.

Воспользуемся геометрическими соображениями и приходим к выводу, что слева и снизу базисный ромб $\mathbb{B}_i^N$ может иметь соседом ромб $\mathbb{B}_s^N$ или $\mathbb{R}_s^N$, но не ромб $\mathbb{G}_s^N$ (см. рис. 14). Отмеченные точки базисного ромба и указанных соседей соединяются изображенные жирным векторами $v_9 = (1,0,0)^t$ и $v_{13} = (1,0,-1)^t$, соответственно.

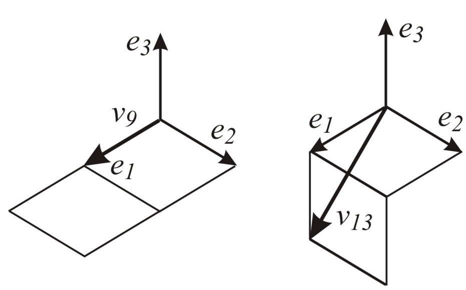

Рис. 14. Возможные соседи слева и снизу ромба $\mathbb{B}_i^N$.

Если в сравнении (8) в качестве вектора $v_j$ взять вектор $v_9$ или $v_{13}$, то согласно леммам 15 и 19, указанное сравнение имеет решение $C_9 = t_{N+1}$ и $C_{13} = t_{N-1} + t_{N-2}$.

Количество ромбов $\mathbb{B}_s^N$ будет равно $\sharp B_N$, значит ромб $\mathbb{B}_{i+C_9}$ должен быть таким, что верно неравенство $0 \leqslant i + C_9 < \sharp B_N$, а, следовательно, $0 \leqslant i + t_{N+1} < t_N$ или $-t_{N-1} \leqslant i < -t_{N-1} - t_{N-2}$. Это неравенство не может выполняться, т.к. номер ромба больше или равен нулю.

В свою очередь имеется $\sharp R_N$ ромбов вида $\mathbb{R}_s^N$, следовательно, ромб $\mathbb{R}_{i+C_{13}}^N$ таков, что верно неравенство $0 \leqslant i + C_{13} < \sharp G_N$, или $0 \leqslant i + t_{N-1} + t_{N-2} < t_{N+1}$, или $0 \leqslant i < t_N$, т.к. номер ромба всегда неотрицателен и $t_{N+1} - t_{N-1} - t_{N-2} = t_N$.

В очередной раз применяя геометрические представления, можно сказать, что слева и сверху базисный ромб $\mathbb{B}_i^N$ может иметь соседом либо ромб $\mathbb{B}_s^N$, либо ромб $\mathbb{G}_s^N$, но не ромб $\mathbb{R}_s^N$ (см. рис. 15). Выделенные жирным вектора, соединяющие отмеченные точки базисного ромба и соседних с ним ромбов, имеют координаты $v_5 = (0, -1, 0)^t$ и $v_4 = (0, 0, 0)^t$, соответственно.

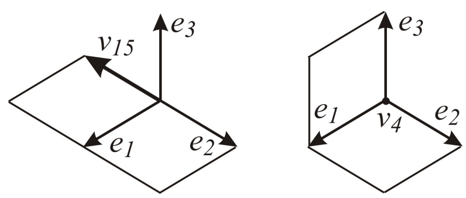


Рис. 15. Возможные соседи слева и сверху ромба $\mathbb{B}_i^N$.

Согласно ранее изложенному, для векторов $v_5$ и $v_4$ сравнение (8), в силу лемм 11 и 10, верно при $C_5 = -t_N - t_{N-1}$ и $C_4 = 0$.

Число ромбов вида $\mathbb{B}_s^N$ равно $\sharp B_N$. В таком случае номер ромба $\mathbb{B}_{i+C_5}^N$ должен удовлетворять соотношению $0 \leqslant i + C_5 < \sharp B_N$, а, следовательно, $0 \leqslant i - t_N - t_{N-1} < t_N$, или $t_N + t_{N-1} \leqslant i < 2t_N + t_{N-1}$. Данное неравенство не может выполняться для номера ромба $\mathbb{B}_i^N$, т.к. номер ромба $\mathbb{B}_i^N$ меньше, чем $t_N$.

Зная, что существует $\sharp G_N$ ромбов вида $\mathbb{G}_s^N$, делаем вывод о том, что ромб $\mathbb{G}_{i+C_4}^N$ таков, что $0 \leqslant i + C_4 < \sharp G_N$, или $0 \leqslant i < t_N + t_{N-1}$.

Итак, соседями базисного ромба $\mathbb{B}_i^N$ вне зависимости от номера $i$ будут: $\mathbb{R}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{G}_{i+C_4}^N$, $\mathbb{G}_{i+C_{12}}^N$, $\mathbb{R}_{i+C_{13}}^N$.

Таким образом, все возможные случаи взаимного соседства ромбов в разбиении тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}/\pi\,(L_N)$ разобраны и теорема 3 полностью доказана.

## 4. Заключение

В работе получено описание локальной структуры (множества соседей) семейства разбиений двумерного тора, полученного на основе геометрического варианта подстановки Рози. Данный результат можно рассматривать как первый шаг, связанный с обобщением известных теорем о трех длинах и трех прыжках на случай иррационального сдвига многомерного тора. Дальнейшие обобщения проведенного исследования могут проводиться в следующих направлениях.

1) Обобщение на случай произвольных геометрических подстановок, возникающих в теории Арно-Ито.

2) Перенос результата на случай разбиений тора на фракталы Рози.

3) Поиск других разбиений тора, которые могут рассматриватья как аналоги разбиений Фибоначчи (один возможный кандидат предложен в [22]).

4) Поиск разбиений тора, являющихся аналогом общих разбиений $T_n$.

5) Переход от описания соседних ромбов разбиения к описанию $n$-корон ромбов ($n$-короной фигуры разбиения называется множетсво фигур, находящихся от нее на расстоянии не более $n$ в естественной метрике разбиения).

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Arnoux P., Ito S. Pisot substitutions and Rauzy fractals // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2001. Vol. 8, Issue 2. P. 181-207.

2. Biringer I., Schmidt B. The three-gap theorem and Riemann geometry // Geometriae Dedicata. 2008. Vol. 136, Issue 1. P. 175–190.

3. Bleher P., Homma Y., Ji L., Roeder R., Shen J. Nearest neighbor distances on a circle: multidimensional case // J. Stat. Phys. 2012. Vol. 146. P. 446–465.

4. Chevallier N. Geometrie des suites de Kronecker // Manuscripta Math. 1997. Vol. 94. P. 231–241.

5. Chevallier N. Cyclic groups and the three distance theorem // Canad. J. Math. 2007. Vol. 59. P. 503–552.

6. Chung F. R. K., Graham R. L. On the set of distances determined by union of arithmetic progression // Ars. Combinatoria. 1976. Vol. 1, №1. P. 57–76.

7. Floreik K. Une remarque sur la repartition des nombres $m\xi \bmod 1$ // Coll. Math. Wroclaw. 1951. V. 2. P. 323-324.

8. Fried E., Sos V. T. A generalization of the three-distance theorem for groups // Algebra Universalis. 1992. Vol. 29, №1. P. 136–149.

9. Geelen A. S., Simpson R. J. A two dimensional Steinhaus theorem // Australas. J. Combin. 1993. Vol. 8. P. 136–197.

10. Haynes A., Koivusalo H., Walton J., Sadun L. Gaps problems and frequencies of patches in cut and project sets // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 2016. Vol. 161. P. 65–85.

11. Marklof J. Strömbergsson The Three Gap Theorem and the Space of Lattices // he American Mathematical Monthly. 2017. Vol. 124, №8. P. 741-745.

12. Pytheas Fogg N. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics // Springer. 2001.

13. Liang F. M. A short proof of the 3d distance theorem // Discrete Math. 1979. Vol. 28, №3. P. 325–326.

14. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France. 1982. V. 110. P. 147-178.

15. Ravenstein T. V. The three gap theorem (Steinhaus conjecture) // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1988. Vol. 45. P. 360-370.

16. Slater N. Gaps and steps for the sequence $n\theta \bmod 1$ // Proc. Camb. Phil. Soc. 1967. Vol. 63. P. 1115–1123.

17. Sós V. T. On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$ // Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. 1958. Vol. 1. P. 127-134.

18. Suranyi J. Uber die Anordnung der Vielfachen einer reellen Zahl mod 1 // Ann. Univ. Sci. Budapest Eotvos Sect. Math. 1958. Vol. 1. P. 107–111.

19. Świerczkowski S. On successive settings of an arc on the circumference of a circle // Fund. Math. 1958. Vol. 46. P. 187-189.

20. Vâjâitu M., Zaharescu A. Distinct Gaps between Fractional Parts of Sequences // Proceedings of the American Mathematical Society. 2002. Vol. 130, №12. P. 3447-3452.

21. Vijay S. Eleven Euclidean distances are enough // J. Number Theory. 2008. Vol. 128. P. 1655–1661.

22. Журавлев В. Г. Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка // Аналитическая теория чисел и теория функций, 30. Записки научных семинаров ПОМИ. 2015. Т. 440. С. 99–122.

23. Журавлев В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, №2. С. 89–122.

24. Журавлев В. Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка // Аналитическая теория чисел и теория функций, 26. Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. Т. 392. С. 95–145.

25. Кузнецова Д. В., Шутов А. В. Перекладывающиеся разбиения тора, подстановка Рози и множества ограниченного остатка // Математические заметки. 2015. Т. 98, вып. 6. С. 878-897.

26. Красильщиков В. В., Шутов А. В. Одномерные квазипериодические разбиения и их приложения // Владимир. ВФ РУК. 2011.

## REFERENCES

1. Arnoux, P. & Ito, S. 2001, “Pisot substitutions and Rauzy fractals“, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.*, vol. 8, issue 2, pp. 181-207.

2. Biringer, I. & Schmidt, B. 2008, “The three-gap theorem and Riemann geometry“, *Geometriae Dedicata*, vol. 136, issue 1, pp. 175–190.

3. Bleher, P., Homma, Y., Ji, L., Roeder, R. & and Shen J. 2012, “Nearest neighbor distances on a circle: multidimensional case“, *J. Stat. Phys.*, vol. 146, pp. 446–465.

4. Chevallier, N. 1997, “Geometrie des suites de Kronecker“, *Manuscripta Math.*, vol. 94, pp. 231–241.

5. Chevallier, N. 2007, “Cyclic groups and the three distance theorem“, *Canad. J. Math.*, vol. 59, pp. 503–552.

6. Chung, F. R. K. & Graham, R. L. 1976, “On the set of distances determined by union of arithmetic progression“, *Ars. Combinatoria*, vol. 1, no. 1, pp. 57–76.

7. Floreik, K. 1951, “Une remarque sur la repartition des nombres $m\xi \bmod 1$“, *Coll. Math. Wroclaw.*, vol. 2, pp. 323-324.

8. Fried, F. & and Sos, V. T. 1992, “A generalization of the three-distance theorem for groups“, *Algebra Universalis*, vol. 29, no. 1, pp. 136–149.

9. Geelen, A. S. & Simpson, R. J. 1993, “A two dimensional Steinhaus theorem“, *Australas. J. Combin.* vol. 8, pp. 136–197.

10. Haynes, A., Koivusalo, H., Walton, J. & Sadun, L. 2016, “Gaps problems and frequencies of patches in cut and project sets“, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, vol. 161, pp. 65–85.

11. Marklof, J. 2017, “Strömbergsson The Three Gap Theorem and the Space of Lattices“, *American Math. Monthly*, vol. 124, no. 8, pp. 741-745.

12. Pytheas Fogg, N. 2001, “Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics“, *Springer.* doi: 10.1007/b13861.

13. Liang, F. M. 1979, “A short proof of the 3d distance theorem“, *Discrete Math.*, vol. 28, no. 3, pp. 325–326.

14. Rauzy, G. 1982, “Nombres algébriques et substitutions“, *Bull. Soc. Math. France.*, vol. 110, pp. 147-178. doi: https://doi.org/10.24033/bsmf.1957.

15. Ravenstein, T. V. 1988, “The three gap theorem (Steinhaus conjecture)“, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, vol. 45, pp. 360-370.

16. Slater, N. 1967, “Gaps and steps for the sequence $n\theta$ mod 1“, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 63, pp. 1115–1123. doi: https://doi.org/10.1017/S0305004100042195.

17. Sós, V. T. 1958, “On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$“, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.*, vol. 1, pp. 127-134.

18. Suranyi, J. 1958, “Uber die Anordnung der Vielfachen einer reellen Zahl mod 1“, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eotvos Sect. Math.*, vol. 1, pp. 107–111.

19. Świerczkowski, S. 1958, “On successive settings of an arc on the circumference of a circle“, *Fund. Math.*, vol. 46, pp. 187-189.

20. Vâjâitu, M. & Zaharescu, A. 2002, “Distinct Gaps between Fractional Parts of Sequences“, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 130, no. 12, pp. 3447-3452.

21. Vijay, S. 2008, “Eleven Euclidean distances are enough“, *J. Number Theory*, vol. 128, pp. 1655–1661.

22. Zhuravlev, V. G. 2015, “Dividing Toric Tilings and Bounded Remainder Sets“, *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funkcij, 30. Zapiski nauchnyh seminarov POMI*, vol. 440, pp. 99-122.

23. Zhuravlev, V. G. 2007, “One-dimensional Fibonacci tilings“, *Izv. RAN. Ser. matem.*, vol. 71, no. 2, pp. 89–122.

24. Zhuravlev, V. G. 2011, “Exchanged toric developments and bounded remainder sets“, *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funkcij, 26. Zapiski nauchnyh seminarov POMI*, vol. 392, pp. 95–145.

25. Kuznetsova D. V. & Shutov A. V. 2015, “Exchanged toric tilings, Rauzy substitution, and bounded remainder sets“, *Matematicheskiye zametki*, vol. 98, no. 6, pp. 878-897.

26. Krasilshchikov, V. V. & Shutov, A.V. 2011, “One-dimensional quasi-periodic tilings and their applications“, *VF RUK, Vladimir.*

Получено 4.06.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.