

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 519.6, 539.30

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-108-123

Применение интегральных формул для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами¹

В. И. Горбачёв

Горбачев Владимир Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой механики композитов механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: vigorby@mail.ru

Аннотация

В статье рассматриваются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами (исходные уравнения). Наряду с каждым исходным уравнением рассматривается точно такое же уравнение только с постоянными коэффициентами (сопутствующее уравнение). Показано, что общее решение исходного уравнения представляется в интегральной форме через общее решение сопутствующего уравнения и фундаментальное решение исходного уравнения. Фундаментальное решение находится методом возмущений в виде бесконечного ряда. Исследована сходимость ряда. В качестве конкретного примера применения разработанной методики рассматривается уравнение Чебышева.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения второго порядка, уравнения с переменными коэффициентами, методы осреднения, интегральные формулы.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:

В. И. Горбачев. Применение интегральных формул для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 108–123.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 14.577.21.0271, уникальный идентификатор проекта RFMEFI57717X0271). ФГБОУ ВПО "ТГПУ им. Л. Н. Толстого" — получатель субсидии Министерства образования и науки.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 519.6, 539.30

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-108-123

Application of integral formulas for solving ordinary differential equations of the second order with variable coefficients²

V. I. Gorbachev

Gorbachev Vladimir Ivanovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, head of the Department of composite mechanics, faculty of mechanics and mathematics, Lomonosov Moscow state University (Moscow).

e-mail: vigorby@mail.ru

Abstract

The article considers linear ordinary differential equations of the second order with variable coefficients (initial equations). Along with each initial equation the same equation is considered only with constant coefficients (accompanying equation). It is shown that the general solution of the initial equation is represented in the integral form through the general solution of the accompanying equation and the fundamental solution of the original equation. The fundamental solution is the perturbation method in the form of an infinite rows. Research is carried out on the convergence of rows. As a concrete example of the application of the developed methodology is considered the Chebyshev equation.

Keywords: second order differential equations, equations with variable coefficients, methods averaging, integral formulas.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

V. I. Gorbachev, 2019, "Application of integral formulas for solving ordinary differential equations of the second order with variable coefficients", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 108–123.

1. Введение

Многие процессы в неоднородных средах описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. В зависимости от коэффициентов они могут иметь аналитические решения. Решениями некоторых таких уравнений являются специальные функции. В частности, классические ортогональные многочлены являются решениями однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами [1, стр. 49]. В большинстве случаев, для нахождения решений уравнений с переменными коэффициентами, приходится прибегать либо к численным методам, либо к различным приближенным способам. В случае периодических коэффициентов хорошие результаты дает метод малого геометрического параметра Бахвалова-Победри [2, 3]. Очень часто прикладные задачи механики и физики сводятся к решению нелинейных уравнений. Одним из способов решения нелинейных задач является метод последовательных приближений, заключающийся в том, что на каждом шаге приходится решать линейные

²The study was carried out with the financial support of the Ministry of education and science of the Russian Federation (project 14.577.21.0271, unique identifier of the project RFMEFI57717X0271). FGBOU VPO "TSPU named after L. N. Tolstoy" — recipient of the grant of the Ministry of education and science.

уравнения с переменными коэффициентами [4, 5, 6]. В предлагаемой работе рассматривается метод решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, основанный на интегральном представлении искомого решения через решение уравнения того же типа, но с постоянными коэффициентами. В интегральном представлении существенную роль играет фундаментальное решение исходного уравнения с переменными коэффициентами, которое находится аналитически методом возмущений [5, 7].

2. Исходное и сопутствующее уравнения. Интегральная формула.

Рассмотрим исходное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами [8]

$$f_2(x)u'' + f_1(x)u' + f_0(x)u + f(x) = 0, \quad x \in (a, b) \quad (1)$$

Если функция $f_2(x)$, при любом x , не обращается в нуль, то уравнение (1) можно свести к самосопряженной форме [9, стр. 241], которое также будем называть исходным уравнением

$$[C(x)u']' + q(x)u + X(x) = 0, \quad (2)$$

$$C = \exp \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx, \quad q = \frac{f_0}{f_2} \exp \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx, \quad X = \frac{f_0}{f_2} \exp \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx.$$

Будем считать, что коэффициент $C(x) > 0$, причем $C_{min} \leq C(x) \leq C_{max}$, а коэффициент $q(x)$ ограничен и может быть как положителен, так и отрицателен в зависимости от переменной x , то есть $q_{min} \leq |q(x)| \leq q_{max}$

Пусть $G(x, \xi)$ — фундаментальное решение уравнения (2), то есть $G(x, \xi)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[C(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right] + q(x)G(x, \xi) + \delta(x - \xi) = 0, \quad x, \xi \in (a, b), \quad (3)$$

где $\delta(x - \xi)$ — обобщенная дельта-функция Дирака [10, стр. 194], [11]. Уравнение (3) понимается в обобщенном смысле, то есть в смысле интегрального тождества С.Л. Соболева. Уравнение (2) при разрывных коэффициентах $C(x)$, $q(x)$ также является обобщенным [2, стр. 30-35].

Пусть $v(x)$ — решение так называемого сопутствующего уравнения с постоянными коэффициентами $C_o = const.$ и $q_o = const.$

$$C_o v''(x) + q_o v(x) + X(x) = 0, \quad x \in (a, b) \quad (4)$$

Во всех трех уравнениях область определения одна и та же — $[a, b]$. В исходном и сопутствующем уравнении одинаковые свободные члены.

2.1. Интегральная формула представления решения исходного уравнения через решение сопутствующего уравнения.

Воспользуемся результатами работы [12] и представим решение $u(x)$ исходного уравнения (2) с переменными коэффициентами через решение сопутствующего уравнения (4) и фундаментальное решение (3) следующим образом:

$$u(x) = v(x) + \int_a^b \frac{dG(x, \xi)}{d\xi} \tilde{C}(\xi) v'(\xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) v(\xi) d\xi, \quad (5)$$

где $\tilde{C}(\xi) = C_o - C(\xi)$, $\tilde{q}(\xi) = q_o - q(\xi)$.

Подстановкой выражения (5) в исходное уравнение (2) убеждаемся, что оно удовлетворяется. В самом деле, пусть

$$\mathcal{L}(\bullet) \equiv [C(x)(\bullet)']' + q(x)(\bullet), \quad \mathcal{L}^o(\bullet) \equiv C_o(\bullet)'' + q_o(\bullet)$$

— исходный и сопутствующий операторы. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u) + X(x) &= \mathcal{L}(v) + \int_a^b \frac{d\mathcal{L}(G(x, \xi))}{d\xi} \tilde{C}(\xi) v'(\xi) d\xi - \int_a^b \mathcal{L}(G(x, \xi)) \tilde{q}(\xi) v(\xi) d\xi + X(x) = \\ &= \mathcal{L}(v) - \int_a^b \frac{d\delta(x - \xi)}{d\xi} \tilde{C}(\xi) v'(\xi) d\xi + \int_a^b \delta(x - \xi) \tilde{q}(\xi) v(\xi) d\xi + X(x) = \\ &= \mathcal{L}(v) + \frac{d}{dx} [\tilde{C}(\xi) v'(x)] + \tilde{q}(\xi) v(x) + X(x) = \mathcal{L}(v) + \mathcal{L}^o(v) - \mathcal{L}(v) + X(x) = \\ &= \mathcal{L}^o(v) + X(x) = 0 \end{aligned}$$

2.2. Общее решение сопутствующего уравнения.

Общее решение сопутствующего уравнения (5) имеет вид:

$$v(x) = K_1 e^{i\lambda_o x} + K_2 e^{-i\lambda_o x} + \varphi(x); \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}}, \quad (6)$$

где i — комплексная единица, K_1 и K_2 — произвольные комплексные константы, а $\varphi(x)$ — частное решение сопутствующего уравнения (5) с постоянными коэффициентами

$$\varphi(x) = \frac{i}{2\lambda_o C_o} \left[e^{i\lambda_o x} \int X(x) e^{-i\lambda_o x} dx - e^{-i\lambda_o x} \int X(x) e^{i\lambda_o x} dx \right] \quad (7)$$

В формулах (6) и (7) можно выделить действительное решение. В случае $q_o > 0$

$$v(x) = K_1 \cos(\lambda_o x) + K_2 \sin(\lambda_o x) + \varphi(x); \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}}, \quad (8)$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\lambda_o C_o} \left[\sin(\lambda_o x) \int X(x) \cos(\lambda_o x) dx - \cos(\lambda_o x) \int X(x) \sin(\lambda_o x) dx \right] \quad (9)$$

Если же $q_o < 0$, тогда

$$v(x) = K_1 e^{\lambda_o x} + K_2 e^{-\lambda_o x} + \varphi(x); \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{-q_o}{C_o}}, \quad (10)$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2\lambda_o C_o} \left[e^{\lambda_o x} \int X(x) e^{-\lambda_o x} dx - e^{-\lambda_o x} \int X(x) e^{\lambda_o x} dx \right] \quad (11)$$

В формулах (7)-(11) K_1 и K_2 — произвольные действительные константы.

2.3. Общее решение исходного уравнения

Подставив (6) в интегральную формулу (5), получим общее решение исходного уравнения (2)

$$u(x) = K_1 A(x) + K_2 B(x) + \Phi(x), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A(x) &= e^{i\lambda_o x} + i\lambda_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{i\lambda_o \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{i\lambda_o \xi} d\xi = \\ &= \begin{cases} \cos(\lambda_o x) - \lambda_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \sin(\lambda_o \xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \cos(\lambda_o \xi) d\xi, & q_o > 0 \\ e^{-\lambda_o x} - \lambda_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{-\lambda_o \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{-\lambda_o \xi} d\xi, & q_o < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} B(x) &= e^{-i\lambda_o x} - i\lambda_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{-i\lambda_o \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{-i\lambda_o \xi} d\xi = \\ &= \begin{cases} \sin(\lambda_o x) - \lambda_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \cos(\lambda_o \xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \sin(\lambda_o \xi) d\xi, & q_o > 0 \\ e^{\lambda_o x} + \lambda_o \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) e^{\lambda_o \xi} d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) e^{\lambda_o \xi} d\xi, & q_o < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \int_a^b G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \varphi'(\xi) d\xi - \int_a^b G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (15)$$

2.4. Выбор коэффициентов сопутствующего уравнения

Постоянные коэффициенты C_o и q_o сопутствующего уравнения — это любые физически допустимые константы. Целесообразно увязать их со свойствами исходной задачи, например, положить их равными эффективным характеристикам [2, 3] так, что

$$C_o = \frac{1}{\langle 1/C \rangle}, \quad q_o = \langle q \rangle, \quad \langle f \rangle \equiv \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad (16)$$

В случае задачи Коши, среднее понимается как предельное значение при $b \rightarrow \infty$ [13, стр. 247-249].

3. Построение фундаментального решения исходного уравнения

Общее решение исходного уравнения находится по формулам (12), (13) если известно фундаментальное решение уравнения (3) с переменными коэффициентами. Однако задача отыскания точного фундаментального решения, в общем случае зависимости коэффициентов от координаты, вряд ли разрешима. Поэтому будем искать приближенное решение уравнения (3) методом возмущений [5, 7]. Для этого перепишем уравнение (3) следующим образом:

$$\frac{d}{dx} \left[C(x) \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right] + \kappa q(x) G(x, \xi) + \delta(x - \xi) = 0, \quad (17)$$

где $\varkappa$ — возмущающий параметр, который в окончательном результате положим равным 1. Будем искать решение уравнения (17) в виде ряда по степеням параметра $\varkappa$

$$G(x, \xi, \varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n G_n(x, \xi) \quad (18)$$

Подставим ряд (18) в уравнение (17), соберем коэффициенты при одинаковых степенях $\varkappa$ и приравняем их к нулю. В результате получаем рекуррентную последовательность уравнений

$$[C(x)G'_0(x, \xi)]' + \delta(x - \xi) = 0, \quad [C(x)G'_n(x, \xi)]' + q(x)G_{n-1}(x, \xi) = 0, \quad n > 0 \quad (19)$$

Или

$$\begin{aligned} G_0(x, \xi) &= - \int_a^x \frac{h(z - \xi)}{C(z)} dz, \quad G_n(x, \xi) = - \int_a^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int_a^{x_1} q(x_2) G_{n-1}(x_2, \xi) dx_2 = \\ &= (-1)^{n+1} \int_a^x \frac{dx_1}{C(x_1)} \int_a^{x_1} q(x_2) dx_2 \cdots \int_a^{x_{2n-2}} \frac{dx_{2n-1}}{C(x_{2n-1})} \int_a^{x_{2n-1}} q(x_{2n}) dx_{2n} \int_a^{x_{2n}} \frac{h(z - \xi)}{C(z)} dz, \quad n > 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $h(x - \xi)$ — единичная обобщенная функция Хевисайда [11]. Константы интегрирования уравнений (19) полагаем равными нулю, поскольку нас устраивает любое фундаментальное решение исходного уравнения. Преобразуем выражение (20) для функции $G_0(x, \xi)$

$$G_0(x, \xi) = - \int_a^x \frac{h(z - \xi)}{C(z)} dz = - \begin{cases} 0, & x < \xi \\ \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)}, & x \geq \xi \end{cases} = -h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)}, \quad (21)$$

Дифференцируя (21) по ξ , найдем обобщенную производную от $G_0(x, \xi)$ по ξ , которая нам понадобится в дальнейшем

$$\frac{\partial G_0}{\partial \xi} = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} \right] = \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} \quad (22)$$

Используя формулы (21) и (22) перепишем выражения для коэффициентов $G_n(x, \xi)$ из (20) и их производных по переменным x и ξ при $n \geq 1$

$$\begin{aligned} G_n(x, \xi) &= -(-1)^n h(x - \xi) \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}; \\ \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial x} &= -(-1)^n \frac{h(x - \xi)}{C(x)} \int_{\xi}^x q(x_1) dx_1 \int_{\xi}^{x_1} \psi(x_2, \xi) dx_2 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}; \\ \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \xi} &= (-1)^n \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n, \quad x_0 \equiv x. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь для сокращения записи введено вспомогательное обозначение

$$\psi(x, \xi) = \frac{1}{C(x)} \int_{\xi}^x q(y) dy, \quad \psi'_{\xi}(x, \xi) = - \frac{q(\xi)}{C(x)}$$

Пользуясь этим обозначением, можно записать выражение (23) в виде рекуррентного соотношения

$$G_n(x, \xi) = - \int_a^x \psi(y, \xi) G_{n-1}(y, \xi) dy, \quad (n > 0); \quad G_0(x, \xi) = -h(x - \xi) \int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} \quad (24)$$

Подставив далее выражения (23) для $G_n(x, \xi)$ в ряд (18) и положив в нём $\varkappa = 1$, получим фундаментальное решение исходного уравнения в виде бесконечного ряда. Причем, если $q(x) > 0$, то это знакопеременный ряд. Если же $q(x) < 0$, то ряд будет знакопостоянным. Итак:

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= -h(x - \xi) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}, \quad x_0 = x \\ G'_x(x, \xi) &= -\frac{h(x - \xi)}{C(x)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{\xi}^x q(x_1) dx_1 \int_{\xi}^{x_1} \psi(x_2, \xi) dx_2 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)} \right]; \\ G'_{\xi}(x, \xi) &= \frac{h(x - \xi)}{C(\xi)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть $G^{(n)}(x, \xi)$ — частичная сумма ряда (25), тогда

$$G^{(n+1)}(x, \xi) = G^{(n)}(x, \xi) - h(x - \xi) (-1)^n \int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \psi(x_n, \xi) dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)}$$

Если $C = C_o = const.$, а $q = q(x)$ — переменная, тогда

$$\int_{\xi}^x \psi(x_1, \xi) dx_1 = \frac{1}{C_o} \int_{\xi}^x dx_1 \int_{\xi}^{x_1} q(y) dy = \frac{1}{C_o} \int_{\xi}^x (x - x_1) q(x_1) dx_1,$$

следовательно

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= -h(x - \xi) \left[\frac{x - \xi}{C_o} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{C_o^{n+1}} \int_{\xi}^x (x - x_1) q(x_1) dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} (x_{n-1} - x_n) (x_n - \xi) q(x_n) dx_n + \cdots \right] \end{aligned}$$

Если же $q = q_o = const.$, а $C = C(x)$ — переменная, тогда

$$\psi(x, \xi) = q_o \frac{x - \xi}{C(x)},$$

следовательно

$$G(x, \xi) = -h(x - \xi) \left[\int_{\xi}^x \frac{dz}{C(z)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q_o^n \int_{\xi}^x \frac{x_1 - \xi}{C(x_1)} dx_1 \cdots \int_{\xi}^{x_{n-1}} \frac{x_n - \xi}{C(x_n)} dx_n \int_{\xi}^{x_n} \frac{dz}{C(z)} \right]$$

Пусть теперь $C = C_o = const.$ и $q = q_o = const.$, тогда из формулы (23), а также с учетом того, что

$$\int_{\xi}^x (x-z)(z-\xi)^m dz = \frac{(x-\xi)^{m+2}}{(m+1)(m+2)},$$

получаем

$$G_n(x, \xi) = (-1)^{n+1} \frac{h(x-\xi)q_o^n}{(2n+1)!C_o^{n+1}} (x-\xi)^{2n+1}, \quad n \geq 0 \quad (26)$$

В этом случае ряд (25) суммируется и получается фундаментальное решение сопутствующего уравнения (5), которое понимается в обобщенном смысле и его можно найти, например, в книгах В. С. Владимирова [14, 15]

$$G(x, \xi) = -\frac{h(x-\xi)}{C_o} \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n s_o}{(2n+1)!} \left(\frac{x-\xi}{s_o}\right)^{2n+1} = s_o \sin \frac{x-\xi}{s_o}, & s_o = \sqrt{\frac{C_o}{q_o}}, \quad q_o > 0, \\ x - \xi, & q_o = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_o}{(2n+1)!} \left(\frac{x-\xi}{s_o}\right)^{2n+1} = s_o \operatorname{sh} \frac{x-\xi}{s_o}, & s_o = \sqrt{\frac{C_o}{-q_o}}, \quad q_o < 0. \end{cases}$$

В общем случае, когда коэффициенты C и q переменные, можно получить оценку абсолютной величины n -го члена ряда (25). Для этого воспользуемся выражением (26), в соответствии с которым при $x \geq \xi$ получаем:

$$\begin{aligned} \frac{(x-\xi)^{2n+1}|q|_{\min}^n}{(2n+1)!C_{\max}^{n+1}} &\leq |G_n(x, \xi)| \leq \frac{(x-\xi)^{2n+1}|q|_{\max}^n}{(2n+1)!C_{\min}^{n+1}} \leq \frac{L^{2n+1}|q|_{\max}^n}{(2n+1)!C_{\min}^{n+1}} \leq \\ &\leq \frac{L^{2n+1}|\langle q \rangle|^n \langle 1/C \rangle^{n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned} \quad (27)$$

Мажорирующие ряды сходятся, в частности

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^{2n+1}|q|_{\max}^n}{(2n+1)!C_{\min}^{n+1}} = \frac{s^*}{C_{\min}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{x-\xi}{s^*}\right)^{2n+1} = \frac{s^*}{C_{\min}} \sin \frac{x-\xi}{s^*}, \quad s^* = \sqrt{\frac{C_{\min}}{|q|_{\max}}}$$

Следовательно, в соответствии с признаком Вейерштрасса, ряд (25) сходится равномерно на всём промежутке $a \leq x \leq b$.

4. Примеры.

Рассмотрим некоторые известные уравнения [16, стр.254 № 1140]

$x^2 u'' + xu' + (x^2 - m^2)u = 0,$	$[xu']' + \left(x - \frac{m^2}{x}\right)u = 0,$	Ур. Бесселя
$xu'' + (1-x)u' + mu = 0,$	$[xe^{-x}u']' + me^{-x}u = 0,$	Ур. Лагерра
$u'' - 2xu' + 2mu = 0,$	$[e^{-x^2}u']' + 2me^{-x^2}u = 0,$	Ур. Эрмита
$(1-x^2)u'' - xu' + m^2u = 0,$	$[\sqrt{1-x^2}u']' + \frac{m^2}{\sqrt{1-x^2}}u = 0,$	Ур. Чебышева
$(1-x^2)u'' - 2xu' + m(m+1)u = 0,$	$[(1-x^2)u']' + m(m+1)u = 0,$	Ур. Лежандра

Более подробная информация о перечисленных и других подобных уравнениях содержится, например, в справочниках [17, глава 10], [18, глава 22], [19, глава 11].

4.1. Уравнение Чебышева $-1 < x < 1$

Общее решение уравнения Чебышева имеет вид [16, стр.164 № 736]:

$$u(x) = K_1 T_m(x) + K_2 U_m(x),$$

где

$$T_m(x) = \cos(m \arccos x), \quad U_m(x) = \sin(m \arccos x) \quad (28)$$

полиномы Чебышева 1-го и 2-го рода. Функции $T_m(x)$ и $U_m(x)$ можно представить в виде полиномов m -й степени от x , потому они и называются полиномами. Детальное исследование полиномов Чебышева дано в книгах [1, 19].

Рассмотрим более подробно самосопряженную форму уравнения Чебышева. В этом уравнении $C(x) = \sqrt{1-x^2}$, $q(x) = m^2/\sqrt{1-x^2}$. По формулам (16) найдем коэффициенты C_o и q_o сопутствующего уравнения

$$\begin{aligned} C_o &= \frac{1}{\langle 1/C \rangle} = \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right]^{-1} = \left[\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right]^{-1} = \left[\arcsin x \Big|_0^1 \right]^{-1} = \frac{2}{\pi}, \\ q_o &= \langle q \rangle = \frac{m^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = m^2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = m^2 \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{m^2 \pi}{2} \end{aligned} \quad (29)$$

Далее по формулам (8) найдем общее действительное решение сопутствующего уравнения

$$v(x) = K_1 \cos \lambda_o x + K_2 \sin \lambda_o x, \quad \lambda_o = \sqrt{\frac{q_o}{C_o}} = \frac{m\pi}{2}, \quad (30)$$

Здесь K_1 и K_2 — произвольные действительные константы. Вычислим далее функцию $\psi(x)$

$$\psi(x, \xi) = \frac{1}{C(x)} \int_{\xi}^x q(y) dy = \frac{m^2}{\sqrt{1-x^2}} \int_{\xi}^x \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = m^2 \frac{\arcsin x - \arcsin \xi}{\sqrt{1-x^2}} \quad (31)$$

Далее нам понадобится интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^x \frac{(\arcsin y - \arcsin \xi)^n}{\sqrt{1-y^2}} dy &= \int_{\xi}^x (\arcsin y - \arcsin \xi)^n d(\arcsin y - \arcsin \xi) = \\ &= \frac{1}{n+1} (\arcsin y - \arcsin \xi)^{n+1} \Big|_{\xi}^x = \frac{1}{n+1} (\arcsin x - \arcsin \xi)^{n+1} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} \arccos^{n+1} (\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\xi^2} + x\xi), & x > \xi \\ -\frac{1}{n+1} \arccos^{n+1} (\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\xi^2} + x\xi), & x < \xi \end{cases}, \quad [20, \text{стр.63, №5}] \end{aligned}$$

Пользуясь этими результатами и формулами (21), (23) получаем, вместо ряда (25) из квадратур ряд из элементарных функций, который представляет собой разложение синуса в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} G(x, \xi) &= -\frac{h(x-\xi)}{m} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} (\arcsin x - \arcsin \xi)^{2n+1} = \\ &= -\frac{h(x-\xi)}{m} \sin [m \cdot (\arcsin x - \arcsin \xi)] \end{aligned} \quad (32)$$

Из (32) находим

$$\begin{aligned} G'_\xi(x, \xi) &= \frac{h(x - \xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n}}{(2n)!} \left(\arcsin x - \arcsin \xi \right)^{2n} = \\ &= \frac{h(x - \xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos \left[m \cdot (\arcsin x - \arcsin \xi) \right] \end{aligned} \quad (33)$$

В формуле (33) удержана только главная часть, не содержащая дельта-функцию Дирака. Далее найдем коэффициенты

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\xi) &= C_o - C(\xi) = \frac{2}{\pi} - \sqrt{1 - \xi^2} = -\sqrt{1 - \xi^2} \left(1 - \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \xi^2}} \right), \\ \tilde{q}(\xi) &= q_o - q(\xi) = m^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) = \frac{m^2 \pi}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \xi^2}} \right), \end{aligned}$$

воспользуемся общими формулами (13), (14) и найдём функции $A(x)$ и $B(x)$

$$\begin{aligned} A(x) \equiv A_m(x) &= \cos \frac{m\pi x}{2} - \frac{m\pi}{2} \int_{-1}^1 G'_\xi(x, \xi) \tilde{C}(\xi) \sin \frac{m\pi \xi}{2} d\xi - \int_{-1}^1 G(x, \xi) \tilde{q}(\xi) \cos \frac{m\pi \xi}{2} d\xi = \\ &= \cos \frac{m\pi x}{2} + \frac{m\pi}{2} \int_{-1}^x \left\{ \left(1 - \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \xi^2}} \right) \cdot \left[\sin \frac{m\pi \xi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n}}{(2n)!} \varphi^{2n}(x, \xi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \frac{m\pi \xi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1}(x, \xi) \right] \right\} d\xi \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь для краткости введено обозначение

$$\varphi(x, \xi) = \arcsin x - \arcsin \xi, \quad \varphi(x, x) = 0, \quad \varphi(x, -1) = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$$

Бесконечные ряды в формуле (34) представляют собой разложения в ряды Тейлора тригонометрических функций $\cos \varphi(x, \xi)$ и $\sin \varphi(x, \xi)$, поэтому эти ряды можно свернуть и получить точное решение уравнения Чебышева

$$\begin{aligned} A_m(x) &= \cos \frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^x \left\{ \left(\frac{m\pi}{2} - \frac{m}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) \left[\sin \frac{m\pi \xi}{2} \cdot \cos(m\varphi) + \cos \frac{m\pi \xi}{2} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sin(m\varphi) \right] \right\} d\xi = \cos \frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^x \left(\frac{m\pi}{2} - \frac{m}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right) \cdot \sin \left[\frac{m\pi \xi}{2} + m\varphi(x, \xi) \right] d\xi = \\ &= \cos \frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^x \sin \left[\frac{m\pi \xi}{2} + m\varphi(x, \xi) \right] d_\xi \left[\frac{m\pi \xi}{2} + m\varphi(x, \xi) \right] = \\ &= \cos \frac{m\pi x}{2} + \int_{-1}^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left[(m\pi \xi)/2 + m\varphi(x, \xi) \right]^{2n+1}}{(2n+1)!} d_\xi \left[\frac{m\pi \xi}{2} + m\varphi(x, \xi) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{[(m\pi\xi)/2 + m\varphi(x, \xi)]^{2n+2}}{(2n+2)!} \Big|_{-1}^x = \\
&= \cos \frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} \left(\frac{m\pi x}{2} \right)^{2n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n+2}}{(2n+2)!} = \\
&= \cos \frac{m\pi x}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{m\pi x}{2} \right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n}}{(2n)!} = \tag{35}
\end{aligned}$$

$$= \cos \frac{m\pi x}{2} - \cos \frac{m\pi x}{2} + \cos(m \arcsin x) = \cos(m \arcsin x) \tag{36}$$

Проделав похожие преобразования в формуле (14), найдем

$$\begin{aligned}
B(x) \equiv B_m(x) &= \sin \frac{m\pi x}{2} + \frac{m\pi}{2} \int_{-1}^x \left\{ \left(1 - \frac{2}{\pi \sqrt{1-\xi^2}} \right) \cdot \left[\cos \frac{m\pi\xi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n}}{(2n)!} \varphi^{2n}(x, \xi) + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \sin \frac{m\pi\xi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m^{2n+1}}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1}(x, \xi) \right] \right\} d\xi = \\
&= \sin \frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[(m \arcsin x)^{2n+1} - \left(\frac{m\pi x}{2} \right)^{2n+1} \right] = \sin(m \arcsin x) \tag{37}
\end{aligned}$$

Функции $A_m(x)$ и $B_m(x)$ являются точными независимыми решениями уравнения Чебышева. Они представляют собой линейные комбинации функций Чебышева $T_m(x)$ и $U_m(x)$ (28). Для доказательства этого факта нужно всего лишь воспользоваться тождеством

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

В результате чего

$$A_m(x) = \cos \frac{m\pi}{2} T_m(x) + \sin \frac{m\pi}{2} U_m(x), \quad B_m(x) = \sin \frac{m\pi}{2} T_m(x) - \cos \frac{m\pi}{2} U_m(x)$$

Отсюда получаются формулы, приведенные в книге [21, стр. 59].

$$\begin{aligned}
A_{2m} &= (-1)^m T_{2m}, & A_{2m+1} &= (-1)^m U_{2m+1}, \\
B_{2m} &= (-1)^{m+1} U_{2m}, & B_{2m+1} &= (-1)^m T_{2m+1}
\end{aligned}$$

4.1.1. Приближенные формулы для решения уравнения Чебышева

Рассмотрим частичные суммы ряда (35) и затем сравним их с точным решением (36)

$$A_{m(I)}(x) = \cos \frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^I (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n} - \left(\frac{m\pi x}{2} \right)^{2n}}{(2n)!}, \tag{38}$$

$$A_{m(I)} = A_{m(I-1)} + (-1)^I \frac{(m \arcsin x)^{2I} - \left(\frac{m\pi x}{2} \right)^{2I}}{(2I)!}, \quad A_m^{(0)}(x) = \cos \frac{m\pi x}{2}$$

$$B_{m(I)}(x) = \sin \frac{m\pi x}{2} + \sum_{n=0}^I (-1)^n \frac{(m \arcsin x)^{2n+1} - \left(\frac{m\pi x}{2} \right)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{39}$$

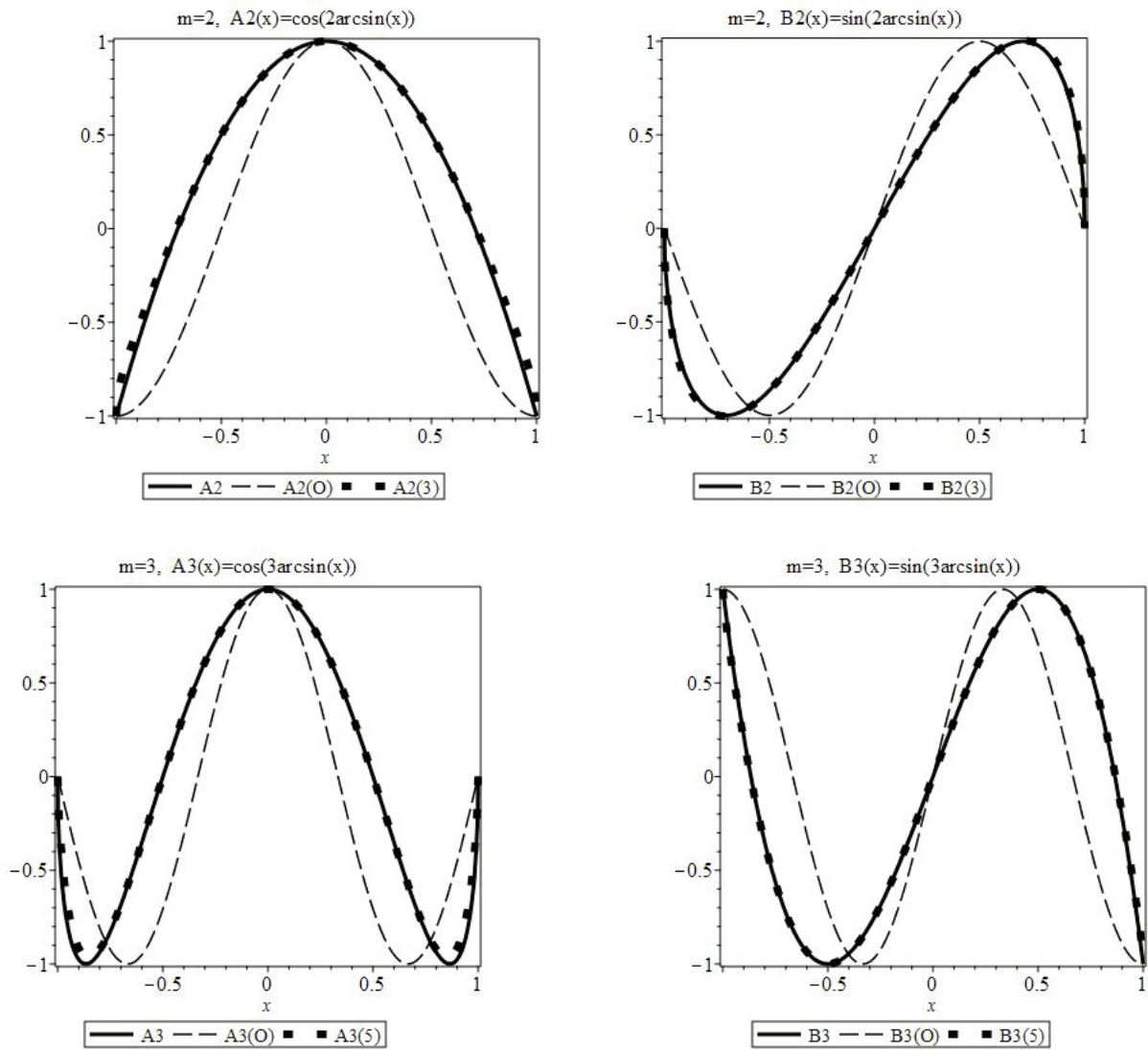
$$B_{m(I)} = B_{m(I-1)} + (-1)^I \frac{(m \arcsin x)^{2I+1} - \left(\frac{m\pi x}{2} \right)^{2I+1}}{(2I+1)!}, \quad B_m^{(0)}(x) = \sin \frac{m\pi x}{2}$$

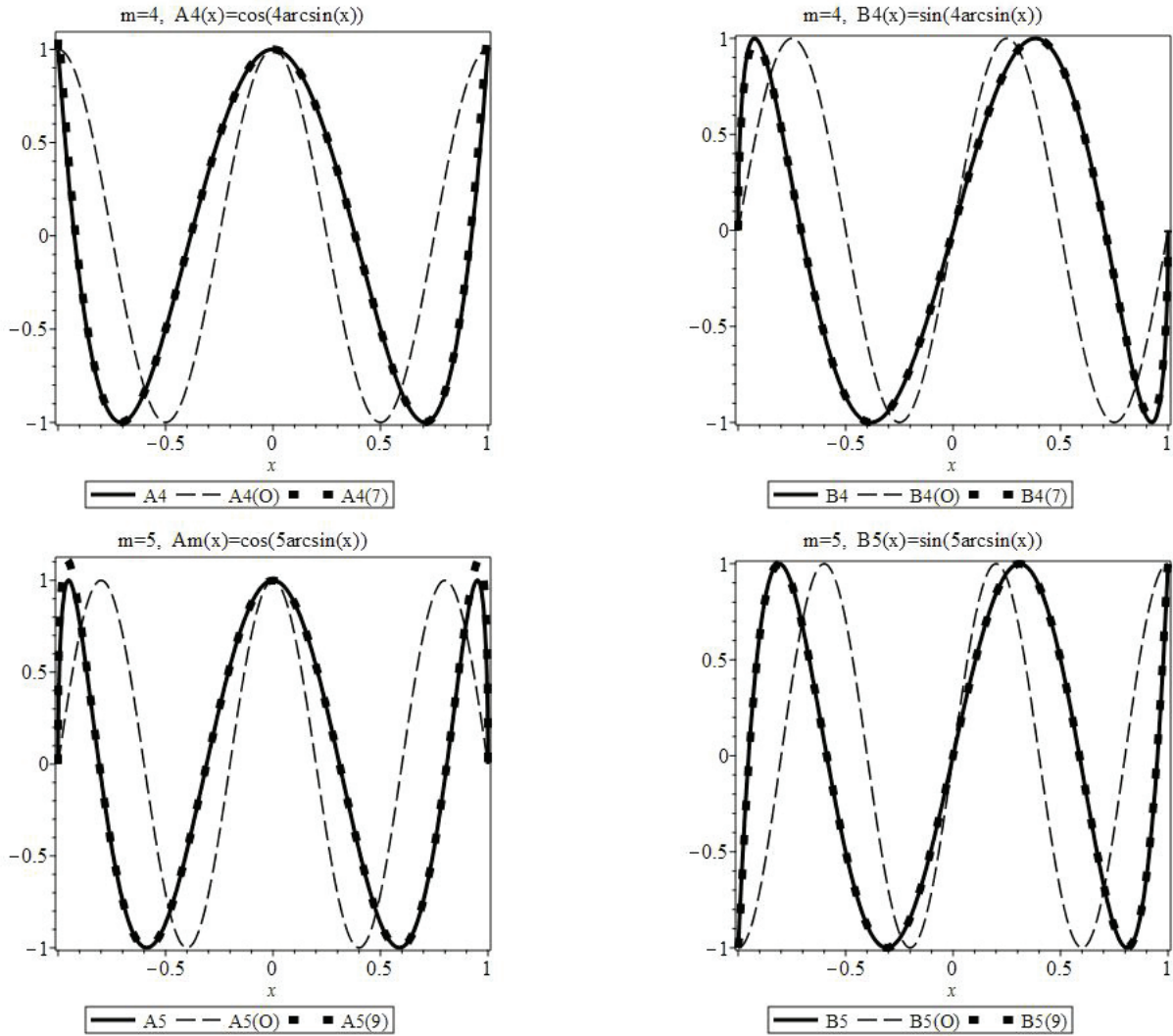
На представленных ниже рисунках изображены графики независимых точных

$$A_m(x) = \cos(m \arcsin x), \quad B_m(x) = \sin(m \arcsin x)$$

и приближенных $A_{m(I)}(x)$, $B_{m(I)}(x)$ решений уравнения Чебышева в виде частичных сумм (37), (39), полученных из общего интегрального представления (5). Число (I) в круглых скобках обозначает число членов в частичных суммах.

Сплошной линией обозначены точные решения при $m=2,3,4,5$. Штриховые линии обозначают точные решения $A_{m(O)}(x)$ и $B_{m(O)}(x)$ сопутствующего уравнения (32) с постоянными коэффициентами, которые находятся по общим формулам (16). Кривые обозначенные прямоугольными точками соответствуют приближенным решениям $A_{m(I)}(x)$ и $B_{m(I)}(x)$ в виде частичных сумм, найденным по формулам (37), (39).





Графики точных и приближенных решений уравнения Чебышева при различных значениях параметра m

Как видно из рисунков лишь функция $A_{5(9)}(x)$ визуальнo отличается от точного решения вблизи граничных точек $x_1 = \pm 1$. Функция $A_{5(10)}(x)$, которая является суммой из десяти членов ряда (37), будет практически неотличима от точного решения.

Можно получить явные значения числа членов частичных сумм (37), (39), которые нужны для получения заранее заданного малого максимального отклонения ε приближенного решения от точного. Для этого воспользуемся оценкой (27) остаточного члена ряда для фундаментального решения в общем случае кусочно гладких коэффициентов исходного уравнения. В случае уравнения Чебышева, с учетом формул (29), эта оценка принимает вид:

$$\frac{(b-a)^{2I+1} |\langle q \rangle|^I \langle 1/C \rangle^{I+1}}{(2I+1)!} = \frac{2^{2I+2} m^{2I}}{(2I+1)!} \leq \varepsilon \quad (40)$$

	m								
eps	1	2	3	4	5	10	20	50	100
0.5	1	3	5	8	10	24	50	131	267
0.1	2	4	6	11	11	24	51	132	267
0.01	3	5	8	13	13	26	52	133	268
0.001	3	6	9	14	14	27	53	134	270

Таблица значений числа (I) членов частичных сумм, при которых
 $|A_m(x) - A_{m(I)}(x)| \leq \varepsilon$ и $|B_m(x) - B_{m(I)}(x)| \leq \varepsilon$ для $m=2,3,4,5,10,20,50,100$

5. Заключение

Разработана методика приближенного решения исходного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Эта методика основана на интегральной формуле представления решения уравнения с переменными коэффициентами через решение сопутствующего уравнения с постоянными коэффициентами. Предполагается, что у исходного и сопутствующего уравнений одинаковые области определения и одинаковые входные данные.

В интегральном представлении существенную роль играет фундаментальное решение исходного уравнения, которое находится методом возмущений в виде бесконечного ряда. Исследована сходимость этого ряда. Члены ряда, в общем случае, представляют собой многократные интегралы возрастающего порядка.

В результате общее решение исходного уравнения представлено через общее решение сопутствующего уравнения и фундаментальное решение. Ограничивая число членов фундаментального ряда получаем приближенное аналитическое решение исходного уравнения. Получена оценка точности приближенного решения в зависимости от выбора сопутствующих коэффициентов и от числа удержанных членов фундаментального ряда.

Предложенная методика проверена на примере уравнения Чебышева, имеющего общее точное решение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука: главная редакция физико-математической литературы, 1979. 416 с.
2. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осредненные процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
3. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
5. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
6. Лионс Жак-Луи. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач: Пер. с фр. Под ред. и с предисл. О. А. Олейник. Изд. 3-е. М.: Едиториал, 2010. 586 с.
7. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
9. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 468 с.
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

11. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М: Мир, 1978. 518 с.
12. Горбачев В. И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. 1991. № 2. С. 61–76.
13. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Том 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
14. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1971. 512 с.
15. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
16. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Росвузиздат, 1962. 292 с.
17. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Volume 1. (Перевод с английского Н. Я. Виленкина. Изд. второе, стереотипное: М., Наука, 1974) MC GRAV-HILL BOOK COMPANY, INC., New York Toronto London, 1953. 296 с.
18. Abramowitz M., Stegun I. editor. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. (Перевод: М., Наука, 1979) National bureau standards applied mathematics series.55, 1964. 830 с.
19. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука 1964. 344 с.
20. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука 1971. 1108 с.
21. Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петью Г., Фогель Т. Функции математической физики. Справочное руководство. (Перевод с французского Н. Я. Виленкина). М.: Наука 1963. 103 с.

REFERENCES

1. Suetin P. K. Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny. M.: Nauka: glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1979. 416 s.
2. Bahvalov N. S., Panasenko G. P. Osrednennye processov v periodicheskikh sredah. M.: Nauka, 1984. 352 s.
3. Pobedrya B. E. Mekhanika kompozicionnyh materialov. M.: Izd-vo MGU, 1984. 336 s.
4. Bogolyubov N. H., Mitropol'skij YU. A. Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij. M.: Nauka, 1974. 504 s.
5. Lomakin V. A. Teoriya uprugosti neodnorodnyh tel. M.: Izd-vo MGU, 1976. 367 s.
6. Lions ZHak-Lui. Nekotorye metody resheniya nelinejnyh kraevykh zadach: Per. s fr. Pod red. i s predisl. O. A. Olejnik. Izd. 3-e. M.: Editorial, 2010. 586 s.
7. Najfe A. H. Metody vozmushchenij. M.: Mir, 1976. 456 s.
8. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differencial'nyh uravneniyam. M.: Nauka, 1971. 576 s.

9. Stepanov V.V. Kurs differencial'nyh uravnenij. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1958. 468 s.
10. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkciy i funkcional'nogo analiza. M.: Nauka, 1972. 496 s.
11. Kech V., Teodoresku P. Vvedenie v teoriyu obobshchennyh funkciy s prilozheniyami v tekhnike. M: Mir, 1978. 518 s.
12. Gorbachev V.I. Metod tenzorov Grina dlya resheniya kraevykh zadach teorii uprugosti neodnorodnykh sred // Vychislitel'naya mekhanika deformiruемого tverdogo tela. 1991. № 2. 61–76.
13. Sedov L.I. Mekhanika sploshnoj sredy. Tom 2. M.: Nauka, 1970. 568 s.
14. Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1971. 512 s.
15. Vladimirov V.S. Obobshchennye funkcii v matematicheskoy fizike. M.: Nauka, 1976. 280 s.
16. Matveev N.M. Sbornik zadach i uprazhnenij po obyknovennym differencial'nyim uravneniyam. M.: Rosvuzizdat, 1962. 292 s.
17. Bateman H., Erdelyi A. Higer transcendental functions. Volume 1. (Perevod s anglijskogo N.YA. Vilenkina. Izd. vtoroe, stereotipnoe: M., Nauka, 1974) MC GRAV-HILL BOOK COMPANY, INC., New York Toronto London, 1953. 296 s.
18. Abramowitz M., Stegun I. editor. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. (Perevod: M., Nauka, 1979) National bureau standards applied mathematics series.55, 1964. 830 s.
19. YAnke E., Emde F., Lyosh F. Special'nye funkcii. M.: Nauka 1964. 344 s.
20. Gradshtejn I. S., Ryzhik I., M. Tablicy integralov, summ, ryadov i proizvedenij. M.: Nauka 1971. 1108 s.
21. Kampe de Fer'e ZH., Kempbell R., Pet'o G., Fogel' T. Funkcii matematicheskoy fiziki. Spravochnoe rukovodstvo. (Perevod s francuzskogo N.YA. Vilenkina). M.: Nauka 1963. 103 s.

Получено 4.10.2019 г.

Принято в печать 20.12.2019 г.