ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-86-107

О разделимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве

М. Г. Гадоев, С. А. Исхоков, Ф. С. Исхоков

Гадоев Махмадрахим Гафурович — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики Политехнического института (филиал) Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова в г. Мирном (г. Мирный).
e-mail: — gadoev@rambler.ru
Исхоков Сулаймон Абунасрович — доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора Института математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан (г. Душанбе).
e-mail: — sulaimon@mail.ru
Исхоков Фаридун Сулаймонович — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан (г. Душанбе).
e-mail: — fariduniskhokov@mail.ru

Аннотация

Пусть Ω – произвольное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R_n и пусть $\Pi(0)$ – единичный куб с центром в начале системы координат. Для любой точки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R_n$ и любого вектора $\overrightarrow{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1 - \xi_1)/t_1, (x_2 - \xi_2)/t_2, \ldots, (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Пусть $g_j(x)\,(j = \overline{1,n})$ – определенные в Ω положительные функции.
Положим $\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi) = \Pi_{\xi\overrightarrow{g}(\xi)}(\xi)$, где $\varepsilon > 0$ и $\overrightarrow{g}(\xi) = (g_1(\xi), g_2(\xi), \ldots, g_n(\xi))$.

Предполагается, что множество Ω и функции $g_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, связаны следующим условием: (A) Существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что для всех $\xi \in \Omega$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi)$ содержится в Ω. Условие (A) является аналогом условия погружения, введенного П. И. Лизоркиным в 1980 году.

В работе исследуется разделимость дифференциального выражения

$$L(x, D_x) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega), \tag{*}$$

где r – некоторое натуральное число, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ – длина мультииндекса k, в лебеговом пространстве $L_p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$. Множество всех мультииндексов k, для которых $a_k(x) \not\equiv 0$, обозначим через $\mathscr{K}$. Пусть $O_{\mathscr{K}}$ – множество функций $u(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные в смысле С.Л. Соболева $D_x^k u(x)$ для всех $k \in \mathscr{K}$. Дифференциальное выражение (*) называется L_p-*разделимым*, если для всех функций $u(x) \in O_{\mathscr{K}}$ таких, что $u(x) \in L_p(\Omega)$, $L(x, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$ имеет место включение $a_k(x) D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$ для всех мультииндексов $k \in \mathscr{K}$.

Работа состоит из пяти разделов. В первом разделе приведена формулировка основных результатов, во втором разделе строится правый регуляризатор для исследуемого класса

дифференциальных выражений, а в разделах 3-5 приведены доказательства основных теорем работы.

Ключевые слова: разделимость, дифференциальный оператор с частными производными, нестепенное вырождение, правый регуляризатор, обратный оператор.

Библиография: 21 название.

Для цитирования:
М. Г. Гадоев, С. А. Исхоков, Ф. С. Исхоков О разделимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 86–107.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-86-107

On separation of a class of degenerate differential operators in the Lebesgue space

M. G. Gadoev, S. A. Iskhokov, F. S. Iskhokov

Gadoev Makhmadrakhim Gafurovich — doctor of physical and mathematical sciences, head of the department of fundamental and applied mathematics at the Mirny Polytechnic Institute (branch) of North-Eastern Federal University named after M. K. Ammosov (Mirnii).
e-mail: — gadoev@rambler.ru
Iskhokov Sulaimon Abunasrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, deputy director of the Dzhuraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan (Dushanbe).
e-mail: — fariduniskhokov@mail.ru
Iskhokov Faridun Sulaimonovich — kandidat of physical and mathematical sciences, scientific worker at the department of function theory and functional analysis of the Dzhuraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan (Dushanbe).
e-mail: — fariduniskhokov@mail.ru

Abstract

Let Ω be an arbitrary open set in n-dimensional Euclidian space R_n and let $\Pi(0)$ be the unit cube centered at the origin. For each point $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R_n$ and each vector $\vec{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ with positive components we define a parallelepiped $\Pi_{\vec{t}}(\xi)$ by the identity

$$\Pi_{\vec{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1 - \xi_1)/t_1, (x_2 - \xi_2)/t_2, \ldots, (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Let $g_j(x)$ $(j = \overline{1, n})$ be positive functions defined in Ω. We let $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi) = \Pi_{\varepsilon \vec{g}(\xi)}(\xi)$, where $\varepsilon > 0$ and $\vec{g}(\xi) = (g_1(\xi), g_2(\xi), \ldots, g_n(\xi))$.

It is assumed that the set Ω and functions $g_j(x)$, $j = \overline{1, n}$, are related by condition: (A) There exists a number $\varepsilon_0 > 0$ such that for each $\xi \in \Omega$ and any $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ the parallelepiped $\Pi_{\varepsilon, \vec{g}}(\xi)$ is contained in Ω. The condition (A) is an analogue of the immersion condition introduced by P.I. Lizorkin in 1980.

In the paper we investigate separation of a differential expression

$$L(x, D_x) = \sum_{|k| \le 2r} a_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega), \tag{1}$$

where r – a natural number, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ is a multi-index, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ is length of the multi-index, in the Lebesgue space $L_p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$. We denote by $\mathcal{K}$ the set of all multi-indexes k such that $a_k(x) \not\equiv 0$. Let $O_{\mathcal{K}}$ be the set of all functions $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$, that have Sobolev generalized derivatives $D_x^k u(x)$ for all $k \in \mathcal{K}$. The differential expression (*) is said to be L_p-*separated* if for all $u(x) \in O_{\mathcal{K}}$ such that $u(x) \in L_p(\Omega)$, $L(x, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$ the inclusion $a_k(x) D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$ holds for all multi-indexes $k \in \mathcal{K}$.

The work consists of five sections. The first section contains the statement of the main results, the right regularizer for the studied class of differential expressions is constructed in the second section, and sections 3-5 provide proofs of the main theorems of the paper.

Keywords: separation, partial differential operator, non-power degeneration, right-hand regularizing operator, inverse operator.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

M. G. Gadoev, S. A. Iskhokov, F. S. Iskhokov, 2019, "On separation of a class of degenerate differential operators in the Lebesgue space" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 86–107.

1. Введение

Понятие разделимости дифференциального оператора впервые было введено в фундаментальной работе [1], в которой исследовалась разделимость оператора Штурма-Лиувилля в пространстве L_2. Идеи и результаты этой работы позже обобщались многими авторами (см. [2-6] и имеющуюся в них библиографию). Первый результат по раделимости дифференциальных операторов с частными производными получен в работе [7]. Большая часть работ по разделимости операторов с частными производными посвящена операторам второго порядка (см., например, [4, 8-12] и библиографию в них) или операторам порядка больше второго специального вида (см., например, [13, 14] и библиографию в них). Случай вырождающихся операторов с частными производными высшего порядка общего вида рассмотрен лишь в работах [7, 15-18]. В этих работах сначала задается область Ω, в которой рассматривается дифференциальный оператор, и затем в этой области определяются функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора. В отличие от этого, в настоящей работе область Ω и функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора, задаются в паре друг с другом, и предполагается выполнение "условия погружения", введенное П. И. Лизоркиным в работе [19]. При этом дифференцируемость функций, с помощью которых определяется вырождение исследуемого оператора, не требуется. Примеры областей и весовых функций, удовлетворяющих условию погружения, рассмотрены в работе [19].

Работа состоит из пяти разделов. В первом разделе приведена формулировка основных результатов, во втором разделе строится правый регуляризатор для исследуемого класса дифференциальных выражений, а в разделах 3-5 приведены доказательства основных теорем работы.

2. Формулировка основных результатов

Пусть Ω – произвольное открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве R_n и пусть $\Pi(0)$ – единичный куб с центром в начале системы координат. Для любой точки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R_n$ и любого вектора $\overrightarrow{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ с положительными компонентами определим параллелепипед $\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi)$ равенством

$$\Pi_{\overrightarrow{t}}(\xi) = \{x \in R_n : ((x_1 - \xi_1)/t_1,\ (x_2 - \xi_2)/t_2, \ldots,\ (x_n - \xi_n)/t_n) \in \Pi(0)\}.$$

Пусть $g_j(x)\,(j=\overline{1,n})$ – определенные в Ω положительные функции.
Положим $\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi)=\Pi_{\xi\overrightarrow{g}(\xi)}(\xi)$, где $\varepsilon>0$ и $\overrightarrow{g}(\xi)=(g_1(\xi),g_2(\xi),\ldots,g_n(\xi))$.

Предполагается, что множество Ω и функции $g_j(x)$, $j=\overline{1,n}$, связаны следующим условием:

(A). Существует постоянная $\varepsilon_0>0$ такая, что для всех $\xi\in\Omega$ и всех $\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0)$ параллелепипед $\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(\xi)$ содержится в Ω.

Условие (A) является аналогом условия погружения, введенного в работе П.И. Лизоркина [19]. В этой работе также рассмотрены примеры областей Ω и положительных функций $g_j(x), j=1,2,\ldots,n$, удовлетворяющих условию погружения.

Пусть r – некоторое натуральное число. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$L(x,D_x)=\sum_{|k|\le 2r}a_k(x)D_x^k\quad(x\in\Omega),\tag{2}$$

где $k=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ – мультииндекс, $|k|=k_1+k_2+\ldots+k_n$ – длина мультииндекса,

$$D_x^k=\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}$$

и i – мнимая единица. Множество всех мультииндексов k, для которых $a_k(x)\not\equiv 0$, обозначим через $\mathscr{K}$. Пусть $O_{\mathscr{K}}$ – множество функций $u(x)\in L_{1,loc}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные в смысле С.Л. Соболева $D_x^k u(x)$ для всех $k\in\mathscr{K}$.

Определение 1. Дифференциальное выражение (1) называется *L_p-разделимым*, если для всех функций $u(x)\in O_{\mathscr{K}}$ таких, что $u(x)\in L_p(\Omega)$, $L(x,\,D_x)u(x)\in L_p(\Omega)$ имеет место включение $a_k(x)D_x^k u(x)\in L_p(\Omega)$ для всех мультииндексов $k\in\mathscr{K}$.

Символом $B(\tau,\overrightarrow{g},\Omega)$, где τ – положительное число, обозначим класс символов

$$L(x,s)=\sum_{|k|\le 2r}a_k(x)s^k\quad(x\in\Omega,s\in R_n)$$

с измеримыми коэффициентами, удовлетворяющими следующим условиям:

(I) $\inf\limits_{x\in\Omega,s\in R_n}|L(x,s)|=\delta\ne 0$

(II) $|a_k(x)s^{k'}|\le\tau g_1^{-k_1''}(x)g_2^{-k_2''}(x)\ldots g_n^{-k_n''}(x)|L(x,s)|$
для всех $x\in\Omega$, $s\in R_n$, $k=k'+k''$, $k''\ne 0$, $|k|\le 2r$;

(III) $\sum\limits_{|k|\le 2r}\left|\left(a_k(x)-a_k(y)\right)s^k\right|\le\tau|L(x,s)|$
для всех $s\in R_n$ и всех $x,y\in\Omega$ таких, что $|x_j-y_j|<\varepsilon^2 g_j(x)$, $j=1,2\ldots,n$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.

Теорема 1. *Пусть существует число $\lambda>0$ такое, что*

$$\lambda^{-1}\le\frac{g_j(x)}{g_j(y)}\le\lambda,\ \ j=1,2,\ldots,n,\tag{3}$$

для всех $y\in\Omega$ и всех $x\in\Pi_{\varepsilon,\overrightarrow{g}}(y)$, и пусть при некотором $\varkappa>0$ выполняется неравенство

$$\sum_{|k|\le 2r}|a_k(x)s^k|\le\varkappa|L(x,s)|\tag{4}$$

для всех $x\in\Omega$, $s\in R_n$.

Тогда найдется число $\tau_0 = \tau_0(n, r, p, \varkappa) > 0$, $1 < p < +\infty$, такое, что если $\tau \in (0, \tau_0)$ и $L(x, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, то замыкание $L_{(p)}$ оператора $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, в пространстве $L_p(\Omega)$ существует и имеет непрерывный обратный.

Далее будем писать $L(x, s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, если $L(x, s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$,

$$D_x^l a_k(x) \in L_{\infty,\, loc}(\Omega) \ (|l| \le |k| \le 2r), \tag{5}$$

и выполняется одно из следующих условий:

(IVa) $L(x,\, D_x)$ – симметрическое дифференциальное выражение;

(IVб) $$\sum_{\substack{l+k'+k''=k,\\ k''\neq 0,\, |k|\le 2r}} \left| \left(D_x^l a_k(x)\right) g_1^{k_1''}(x) g_2^{k_2''}(x) \ldots g_n^{k_n''}(x) s^{k'} \right| \le \tau |L(x,\, s)|$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$.

Далее вводим некоторые вспомогательные функциональные пространства, связанные с дифференциальным выражением (1). Обозначим через $\overset{0}{W}_{p,\, L}(\Omega)$ пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u;\, W_{p;\, L}(\Omega)\| = \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p dx + \sum_{|k|\le 2r} \int_\Omega \left| a_k(x) D_x^k u(x) \right|^p dx \right\}^{1/p}. \tag{6}$$

Обозначим через $W'_{p;\, L}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, пространство функций $u(x) \in L_p(\Omega) \cap O_{\mathscr{K}}$ с конечной нормой (5).

Как обычно, символом $\langle f,\, \varphi\rangle$, где $f \in D'(\Omega)$, обозначим значение обобщенной функции f на функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Обобщенная функция f отождествляется с некоторой функцией $g(x) \in L_{1,\, loc}(\Omega)$, если $\langle f,\, \varphi\rangle = \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

При выполнении условия гладкости (4) для произвольной функции $u(x) \in L_{1,\, loc}(\Omega)$ можно определить обобщенную функцию $a_k(x)D_x^k u(x)$ $(|k| \le 2r)$ по формуле

$$\left\langle a_k D^k u,\, \varphi \right\rangle = (-1)^{|k|} \int_\Omega u(x) D_x^k \left(a_k(x)\varphi(x)\right) dx \tag{7}$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Вводим пространство $W_{p,\, L}(\Omega)$ функций $u(x) \in L_p(\Omega)$, для которых обобщенные функции $a_k(x)D_x^k u(x)$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$ для всех $|k| \le 2r$ и конечна норма (5).

Для $u(x) \in L_p(\Omega)$ через $L(x,\, D_x)u(x)$ обозначим сумму всех обобщенных функций $a_k(x)D_x^k u(x)$, $|k| \le 2r$, определенных равенством (6) и вводим пространство $\mathcal{W}_{p,\, L}(\Omega)$ функций $u(x) \in L_p(\Omega)$, для которых обобщенная функция $L(x,\, D_x)u(x)$ принадлежит пространству $L_p(\Omega)$ и конечна следующая норма

$$\|u;\, \mathcal{W}_{p;\, L}(\Omega)\| = \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p dx + \int_\Omega |L(x,\, D_x)u(x)|^p dx \right\}^{1/p}. \tag{8}$$

Через $\overset{0}{\mathcal{W}}_{p;\, L}(\Omega)$ обозначим пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (7).

Заметим, что $W_{p,\, L}(\Omega)$, $\mathcal{W}_{p,\, L}(\Omega)$ являются полными пространствами.

Таким образом для дифференциального выражения (1) мы определили весовые пространства $\overset{0}{W}_{p,\, L}(\Omega)$, $W'_{p,\, L}(\Omega)$, $W_{p,\, L}(\Omega)$, $\mathcal{W}_{p,\, L}(\Omega)$. При этом первые два пространства определены без всякого предположения о гладкости коэффициентов $a_k(x)$, $|k| \le 2r$, а два последних пространства определены, когда выполняется условие гладкости (4).

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < +\infty$, *выполнены все условия теоремы 1 и пусть* τ_0 – *такое же число как в этой теореме. Тогда если* $\tau \in (0, \tau_0)$ *и* $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, *то* $D\left(L_{(p)}\right) = \overset{0}{W}_{p,L}(\Omega)$ *и для всех функций* $u \in D\left(L_{(p)}\right)$ *выполняются неравенства*

$$\|u;\, W_{p,L}(\Omega)\| \leq M\, \|L(\cdot;\, D)u;\, L_p(\Omega)\| \leq M\, \|u;\, W_{p,L}(\Omega)\|\,, \tag{9}$$

где число $M > 0$ *зависит только от* r, n, p, δ, $\varkappa$.

Если же при этом выполняется условие гладкости (4), то

$$\overset{0}{W}_{p,L}(\Omega) = W_{p,L}(\Omega) = \overset{0}{\mathcal{W}}_{p,L}(\Omega). \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < +\infty$ *и пусть выполняется условие (3). Тогда найдется число* $t_0 = t_0(r,\, n,\, p,\, \varkappa) > 0$ *такое, что если* $L(x,\, s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\quad 0 < \tau < t_0$, *то дифференциальное выражение* $L(x,\, D_x)$ L_p-*разделимо. При этом*

$$\overset{0}{W}_{p,L}(\Omega) = W_{p,L}(\Omega) = \mathcal{W}_{p,L}(\Omega) \tag{11}$$

и нормы в этих пространствах эквивалентны.

3. Построение правого регуляризатора

Применяя технику, использованную при доказательстве леммы 1 работы [20], доказывается следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть область* Ω *и положительные функции* $g_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *удовлетворяют условиям, сформулированным в разделе 1.*

Тогда существуют неотрицательные функции $\psi_1, \psi_2, \ldots$ *из класса* $C_0^\infty(\Omega)$ *такие, что:*

1) $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \psi_m^2(x) \equiv 1 \quad (x \in \Omega)$;

2) *покрытие* $\{\mathrm{supp}\ \psi_m\}_{m=1}^{+\infty}$ *области* Ω *имеет конечную кратность* $\Lambda(n, \lambda)$, *где* λ — *константа из условия (2);*

3) *для любого мультииндекса* k *существует конечное число* $M_k > 0$ *такое, что*

$$\left|D_x^k \psi_m(x)\right| \leq M_k g_1^{-k_1}(x) g_2^{-k_2}(x) \ldots g_n^{-k_n}(x) \quad (x \in \Omega);$$

4) *для всех* $x, y \in \mathrm{supp}\ \psi_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, *выполняется неравенство* $|x_j - y_j| < \varepsilon^2 g_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

В каждом множестве $\mathrm{supp}\,\psi_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, фиксируем точки $\{x^{(m,k)}, |k| \leq 2r\}$ и положим

$$L_m(s) = \sum_{|k| \leq 2r} a_k(x^{(m,k)}) s^k \quad (s \in R_n). \tag{12}$$

В пространстве $L_p(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$ вводим операторы

$$F = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi_m \psi_m,\ F' = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \Phi'_m \psi_m,\ D(F) = D(F') = C_0^\infty(\Omega), \tag{13}$$

где Φ_m, Φ'_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ – псевдодифференциальные операторы в R_n с символами $\Phi_m(s) = L_m^{-1}(s)$, $\Phi'_m(s) = \overline{\Phi_m(s)}$, соответственно. Символами $F_{(p)}$, $F'_{(q)}$ обозначим замыкания операторов F, F' с областями определения $D(F) = D(F') = C_0^\infty(\Omega)$ в пространствах $L_p(\Omega)$, $L_q(\Omega)$, соответственно.

Если коэффициенты $a_k(x)$, $|k| \leq 2r$, дифференциального оператора $L = L(x, D_x)$, $(D(L) = C_0^\infty(\Omega))$ дифференцируемы достаточное число раз, то формально сопряженный дифференциальный оператор $L'(x, D_x)$ задается равенством

$$L'(x, D_x)u = \sum_{|k|\leq 2r} D_x^k(a_k(x)u(x)). \tag{14}$$

Однако в теореме 1 дифференцируемость коэффициентов $a_k(x), |k| \leq 2r$, не предполагается. Поэтому в рассматриваемом случае равенство (13) теряет смысл, и трудно исследовать оператор $(L_{(q)})^*$, сопряженный относительно оператора $L_{(q)}$. В связи с этим обстоятельством мы вводим другое дифференциальное выражение с гладкими коэффициентами, которое связано с выражением $L(x, D_x)$ и имеет некоторые близкие свойства.

Положим

$$G(x, D_x) = \sum_{|k|\leq 2r} \widetilde{a}_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega), \tag{15}$$

где

$$\widetilde{a}_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_k(x^{(m,k)})\psi_m^2(x), \quad |k| \leq 2r. \tag{16}$$

Обозначим через $G'(x, D_x)$ дифференциальное выражение, сопряженное к $G(x, D_x)$.

Далее отметим некоторые соотношения между символами $L(x, s)$, $L_m(s)$. В силу условия (III) имеем

$$\left|(a_k(x) - a_k(x^{(k,m)}))s^k\right| \leq \tau|L(x, s)|. \tag{17}$$

Далее, в силу этого неравенства получаем

$$|L(x, s) - L_m(s)| \leq \sum_{|k|\leq 2r} |(a_k(x) - a_k(x^{(k,m)}))s^k| \leq \tau(2r)^n|L(x, s)|.$$

Отсюда при выполнении условия $0 < 2\tau < (1/2r)^n$ следует, что

$$|L(x, s) - L_m(s)| \leq \frac{1}{2}|L(x, s)| \ (x \in \mathrm{supp}\ \psi_m).$$

Следовательно,

$$|L(x, s)| \leq 2|L_m(s)| \leq 3|L(x, s)| \tag{18}$$

для всех $s \in R_n$ и всех $x \in \mathrm{supp}\ \psi_m,\ m = 1, 2, 3, \ldots$.

Согласно лемме 1 семейство функций $\{\psi_m^2(x)\}_{m=1}^\infty$ образует разбиение единицы области Ω конечной кратности $\Lambda(n, \lambda)$. Поэтому используя равенство (15) имеем

$$a_k(x) - \widetilde{a}_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_k(x)\psi_j^2(x) - \widetilde{a}_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty}(a_k(x) - a_k(x^{(k,j)}))\psi_j^2(x).$$

Далее в силу условия (III) имеем

$$\left|(a_k(x) - \widetilde{a}_k(x))s^k\right| \leq \tau|L(x, s)|. \tag{19}$$

Лемма 2. *В условиях теоремы 1 существует положительное число t_1 такое, что если $\tau \in (0, t_1)$, то существуют операторы $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ с $\|\cdot\|_p$-нормами, не превосходящими 1/2, такие, что на функциях $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняются равенства*

$$GFu = (E + \Gamma_1)u, \ G'F'u = (E + \Gamma_2)u. \tag{20}$$

Доказательство. Здесь в этой лемме и далее символом $\mathscr{L}_p[\Omega]$ обозначено пространство всех линейных операторов, действующих из $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, замыкания которых в пространстве $L_p(\Omega)$ являются ограниченными операторами.

Так как Φ_m – псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $L_m(s)$ (см. (11)) и $L_m = L_m(x; D_x), \ D(L_m) = C_0^\infty(\Omega)$, – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то

$$\sum_{m=1}^{\infty} \psi_m L_m \Phi_m \psi_m = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m^2 = E.$$

Используя это равенство имеем

$$GFu = (\Gamma_1 + E)u, \ \ u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{21}$$

где

$$\Gamma_1 = \Gamma_* + \Gamma_0, \quad \Gamma_* = \sum_{m=1}^{\infty} [G, \psi_m]\Phi_m\psi_m, \quad \Gamma_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(G - L_m)\Phi_m\psi_m. \tag{22}$$

Здесь и далее символ $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутатор, т.е. $[T_1, T_2] = T_1T_2 - T_2T_1$.

Далее заметим, что

$$\Gamma_* = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{|k| \le 2r} \widetilde{a}_k(x) \sum_{\substack{k'+k^*=k, \\ k' \ne 0}} \psi_m^{(k')} \Phi_m^{(k^*)} \psi_m \right),$$

где $\psi_m^{(k')} = D_x^{k'} \varphi_m(x)$ и $\Phi_m^{(k^*)}$ – псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^{k^*} L_m^{-1}(s)$. На основе этого равенства, применяя лемму 2.2 из [16], получаем

$$\|\Gamma_*\|_p \le M_1 \sum_{|k| \le 2r} \sum_{\substack{k'+k^*=k, \\ k' \ne 0}} \mathbb{P}_k^{(k',k^*)}, \tag{23}$$

где

$$\mathbb{P}_k^{(k',k^*)} = \sup_{m=1,2,3,\ldots} \left\| \psi_m^{(k')} \widetilde{a}_k \Phi_m^{(k^*)} \psi_m \right\|_p.$$

Применяя лемму 2.3 из [16] оценим норму псевдодифференциального оператора $\Phi_m^{(k^*)}$. Имеем

$$\left\| \Phi_m^{(k^*)} \right\|_p \le M_2 \sup_{s \in R_n} \left| s^{k^*} L_m^{-1}(s) \right|.$$

Учитывая это и применяя п.3 леммы 1, получим

$$\mathbb{P}_k^{(k',k^*)} \le M \sup \left| g_1^{-k_1'}(x) g_2^{-k_2'}(x) \ldots g_n^{-k_n'}(x) \widetilde{a}_k(x) \cdot s^{k^*} L_m^{-1}(s) \right|, \tag{24}$$

где верхняя грань берется по $x \in \operatorname{supp} \psi_m, \ s \in R_n, \ m = 1, 2, 3, \ldots$.

Из равенства (15) в силу условия (II) имеем

$$\left|\widetilde{a}_k(x)s^{k^*}\right| \leq \tau \sum_{j=1}^{\infty} g_1^{-k_1'}(x^{(k,j)}) g_2^{-k_2'}(x^{(k,j)}) \dots g_n^{-k_n'}(x^{(k,j)}) \cdot |L(x^{(k,j)}, s)| \psi_j^2(x).$$

Отсюда в силу условий (2) и (III) следует, что

$$|\widetilde{a}_k(x)s^{k*}| \leq \tau\lambda^{|k'|}(1+\tau)|L(x,s)| g_1^{-k_1'}(x) g_2^{-k_2'}(x) \dots g_n^{-k_n'}(x)$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R_n$, $k = k' + k^*$, $k' \neq 0$.

Если $x \in \mathrm{supp}\ \psi_m$, то в силу (17) из последнего неравенства следует, что

$$\left|\widetilde{a}_k(x)s^{k^*}\right| \leq \tau M_0\ g_1^{-k_1'}(x) g_2^{-k_2'}(x) \dots g_n^{-k_n'}(x) |L_m(s)|.$$

Используя это неравенство из (23) имеем $\mathbb{P}_k^{(k',k^*)} \leq \tau \cdot M_2$ для всех $k = k' + k^*,\ |k| \leq 2r,\ k' \neq 0$. Следовательно (см. (22)) существует число $M_3 > 0$ такое, что

$$\|\Gamma_*\|_p \leq \tau M_3. \tag{25}$$

Теперь оценим норму оператора Γ_0. Из равенства (21) в силу леммы 2.2 из [16] имеем

$$\|\Gamma_0\|_p \leq \Lambda(n,\nu) \cdot \sup_{m=1,2,\dots} \|\psi_m(G - L_m)\Phi_m\psi_m\|_p\,. \tag{26}$$

Применяя лемму 2.3 из [16], получим

$$\|\psi_m(G - L_m)\Phi_m\psi_m\|_p \leq \sup \left|(\widetilde{a}_k(x) - a_k(x^{(k,m)})s^k L_m^{-1}(s)\right|,$$

где верхняя грань берется по $s \in R_n$ и $x \in \mathrm{supp}\ \psi_m$. Отсюда в силу неравенств (16)-(18) следует, что

$$\|\psi_m(G - L_m)\Phi_m\psi_m\|_p \leq \tau \cdot M_4 \tag{27}$$

для всех $m = 1, 2, \dots;$ M_4 – некоторое конечное положительное число.

Таким образом (см. (25), (26)) существует положительное число M_5 такое, что $\|\Gamma_0\|_p \leq \tau M_5$. Теперь, учитывая равенство $\Gamma_1 = \Gamma_* + \Gamma_0$ из (24), получим $\|\Gamma_1\|_p \leq \tau(M_3 + M_5)$. Следовательно, существует число $t' > 0$, такое, что при $\tau \in (0, t')$ норма оператора Γ_1 не превосходит $1/2$.

Утверждение леммы 2 относительно оператора GF доказано. Оставшаяся часть утверждения этой леммы относительно оператора $G'F'$ доказывается аналогично.

Лемма 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда найдется положительное число* t_2 *такое, что если* $\tau \in (0, t_2)$ *и* $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, *то оператор* $G = G(\cdot, D)$, $D(G) = C_0^\infty(\Omega)$ $(G' = G'(\cdot, D),\ D(G') = C_0^\infty(\Omega))$ *в пространстве* $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $(L_q(\Omega)$, $q = p/(p-1))$ *имеет замыкание* $G_{(p)}$ $\left(G'_{(q)}\right)$ *со следующими свойствами*

$$G_{(p)}F_{(p)} = E + \Gamma_{1,(p)}, \quad R(G_{(p)}) = L_p(\Omega) \tag{28}$$

$$\left(G'_{(q)}F'_{(q)} = E + \Gamma_{2,(q)}, \quad R\left(G'_{(q)}\right) = L_q(\Omega)\right).$$

Здесь $\Gamma_{1,(p)}$ $\left(\Gamma_{2,(q)}\right)$ *– замыкание в* $L_p(\Omega)$ $(L_q(\Omega))$ *оператора* Γ_1, $D(\Gamma_1) = C_0^\infty(\Omega)$, $(\Gamma_2,\ D(\Gamma_2) = C_0^\infty(\Omega))$, *из леммы 2.*

Доказательство. Так как $\Gamma_1 \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\Gamma_1\|_p \leq 1/2$, то $\|\Gamma_1 u; L_p(\Omega)\| \leq 0,5\|u; L_p(\Omega)\|$ для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Отсюда в силу плотности класса $C_0^\infty(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ следует, что оператор

$\Gamma_1,\ D(\Gamma_1) = C_0^\infty(\Omega)$, допускает в $L_p(\Omega)$ замыкание $\Gamma_{1,(p)}$, норма которого не превосходит $1/2$. Поэтому $D(\Gamma_{1,(p)}) = L_p(\Omega)$.

Обозначим через $\underset{p}{\rightarrow}$ сходимость по норме пространства $L_p(\Omega)$.

Пусть v – произвольный элемент из $L_p(\Omega)$. Существует последовательность функций $\{v_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $v_j \underset{p}{\rightarrow} v$ при $j \longrightarrow \infty$. В силу определения оператора $\Gamma_{1,(p)}$ имеем $(E+\Gamma_1)v_j \underset{p}{\rightarrow} (E+\Gamma_{1,(p)})v$ при $j \longrightarrow \infty$. Из (19) следует, что $(E+\Gamma_1)v_j = GFv_j,\ \ j = 1,2,3,\ldots$. Поэтому

$$GFv_j \underset{p}{\rightarrow} (E+\Gamma_{1,(p)})v, \quad j \longrightarrow \infty. \tag{29}$$

Согласно лемме 2.3 из [16] псевдодифференциальный оператор Φ_m с символом $L_m^{-1}(s)$ имеет непрерывное продолжение в $L_p(R_n)$ и

$$\|\Phi_m\|_p \le M \sup_{s\in R_n} |L_m^{-1}(s)|. \tag{30}$$

Поэтому оператор (см. (12)) $F,\ D(F) = C_0^\infty(\Omega)$, допускает замыкание в пространстве $L_p(\Omega)$. Это замыкание обозначим через $F_{(p)}$. Следовательно

$$Fv_j \underset{p}{\rightarrow} F_{(p)}v, \quad j \longrightarrow \infty. \tag{31}$$

Пусть $R(F_{(p)})$ – область значений оператора $F_{(p)}$, и пусть $u(x)$ – произвольный элемент из $R(F_{(p)})$. Существует функция $v(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что $u = F_{(p)}v$. Пусть $\{v_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность функций из $C_0^\infty(\Omega)$, такая, что $v_j \underset{p}{\rightarrow} v,\ j \longrightarrow \infty$. Тогда из (30) следует, что $u_j \underset{p}{\rightarrow} u$, $j \longrightarrow \infty$, где $u_j = Fv_j,\ j = 1,2,3\ldots$.

Так как $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$ для всех $j = 1,2,3\ldots$ и $G_{(p)}$ – замыкание оператора $G = G(\cdot, D)$, $D(G) = C_0^\infty(\Omega)$, то $Gu_j \underset{p}{\rightarrow} G_{(p)}u,\ j \longrightarrow \infty$. Отсюда в силу равенств $u_j = Fv_j,\ u = F_{(p)}v$ имеем $GFv_j \underset{p}{\rightarrow} G_{(p)}F_{(p)}v,\ j \longrightarrow \infty$. Далее применяя (28) имеем

$$G_{(p)}F_{(p)}v = (E+\Gamma_{1,(p)})v \tag{32}$$

для всех $v \in L_p(\Omega) \cap D(F_{(p)})$. Так как $F_{(p)}$ – непрерывное продолжение оператора F, $D(F) = C_0^\infty(\Omega)$, во всем пространстве, то равенство (31) имеет место для всех $v \in L_p(\Omega)$. Первое равенство в (27) доказано.

Так как $D(\Gamma_{1,(p)}) = L_p(\Omega)$ и $\|\Gamma_{1,(p)}\|_p \le 1/2$, то согласно известной теореме из теории операторов (см., например, [21, стр. 230]), $(E+\Gamma_{1,(p)})$ – непрерывно обратимый оператор и $\|(E+\Gamma_{1,(p)})^{-1}\|_p < 1/\left(1 - \|\Gamma_{1,(p)}\|_p\right)$. Следовательно

$$R\left(E+\Gamma_{1,(p)}\right) = D\left(\left(E+\Gamma_{1,(p)}\right)^{-1}\right) = L_p(\Omega).$$

Отсюда и из первого равенства (27) следует, что $G_{(p)}F_{(p)}$ – обратимый оператор и

$$\left(G_{(p)}F_{(p)}\right)^{-1} = \left(E+\Gamma_{1,(p)}\right)^{-1}. \tag{33}$$

Поэтому $R\left(G_{(p)}F_{(p)}\right) = D\left(\left(G_{(p)}F_{(p)}\right)^{-1}\right) = L_p(\Omega)$. Так как $R\left(G_{(p)}F_{(p)}\right) \subseteq R\left(G_{(p)}\right)$ и $R\left(G_{(p)}\right) \subseteq L_p(\Omega)$, то отсюда следует, что $R\left(G_{(p)}\right) = L_p(\Omega)$. Второе равенство в (27) доказано.

Вторая часть утверждения леммы 3 относительно оператора $G' = G'(\cdot, D),\ D(G') = C_0^\infty(\Omega)$ доказывается аналогично.

Лемма 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и пусть t_2 – постоянная из леммы 3. Тогда, если $\tau \in (0,\, t_2)$, $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $1 < p < \infty$ и $q = p/(p-1)$, то*

$$G_{(p)} = (G'_{(q)})^*,\ G'_{(q)} = G^*_{(p)}. \tag{34}$$

Более того операторы $G_{(p)}$ и $G'_{(q)}$ имеют непрерывные обратные, и для них выполняются равенства

$$G^{-1}_{(p)} = F_{(p)}(E + \mathscr{S}_1),\ (G'_{(q)})^{-1} = F'_{(q)}(E + \mathscr{S}_2), \tag{35}$$

где операторы $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ соответственно принадлежат пространствам $\mathscr{L}_p[\Omega]$, $\mathscr{L}_q[\Omega]$ и их норма меньше единицы.

Доказательство. Обычным интегрированием по частям доказывается равенство $(Gu, v) = (u, G'v)$ для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Следовательно $(G_{(p)}u, v) = (u, G'_{(q)}v)\quad (u, v \in C_0^\infty(\Omega))$.

С другой стороны, согласно определению сопряженного оператора, $\left(G_{(p)}u, v\right) = \left(u, (G_{(p)})^* v\right)$ для всех $u \in D\left(G_{(p)}\right)$, $v \in D\left(G^*_{(p)}\right)$. Таким образом $G^*_{(p)}v = G'_{(q)}v$ $(v \in C_0^\infty(\Omega))$.

Согласно известной теореме в теории операторов (см., например, [21, стр.231]), если A – непрерывный линейный оператор в некотором банаховом пространстве, то имеет место равенство $(\mathrm{ker}A)^\perp = R(A^*)$, где знак $\perp$ означает ортогональное дополнение. Поэтому из равенства (см. лемму 3) $R\left(G'_{(q)}\right) = L_q(\Omega)$, следует, что

$$\ker\left(G'_{(q)}\right)^* = 0. \tag{36}$$

Так как (см. (27)) $R\left(G_{(p)}\right) = L_p(\Omega)$, то, применяя пункт (в) леммы 2.6 работы [16], из (35) получим $G_{(p)} = \left(G'_{(q)}\right)^*$. Первое равенство в (33) доказано. Аналогичным рассуждением доказывается и второе равенство в (33).

Из равенств (33) и (35) следует, что $\mathrm{ker}G_{(p)} = \ker\left(G'_{(q)}\right)^* = 0$. Следовательно, $G_{(p)}$ – обратимый оператор. Поэтому из равенства (32) имеем

$$F^{-1}_{(p)}G^{-1}_{(p)} = \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1}. \tag{37}$$

Вводим оператор $\mathscr{S}_1 = \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1} - E$. Используя (36) имеем

$$F_{(p)}\left(E + \mathscr{S}_1\right) = F_{(p)}\left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1} = F_{(p)}F^{-1}_{(p)}G^{-1}_{(p)} = G^{-1}_{(p)}.$$

Первое равенство в (34) доказано.

Применяя теорему 5 из [21, стр. 230], получаем

$$\left(E + \Gamma_{1,(p)}\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\Gamma_{1,(p)}\right)^j.$$

Отсюда следует, что $\|\mathscr{S}_1\|_p \le 1/\left(1 - \left\|\Gamma_{1,(p)}\right\|_p\right) < 1$.

Второе равенство в (34) и неравенство $\|\mathscr{S}_2\|_q < 1$ доказываются аналогично.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $1 < p < \infty$, выполнены все условия теоремы 1 и пусть t_2 – постоянная из леммы 3. Тогда если $\tau \in (0,\, t_2)$ и $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, то имеют место следующие равенства*

$$R\left(F_{(p)}\right) = D\left(G_{(p)}\right), \quad \mathrm{ker}F_{(p)} = 0. \tag{38}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – произвольный элемент из $R\left(F_{(p)}\right)$. Тогда существует функция $v(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что $u(x) = \left(F_{(p)}v\right)(x)$, $x \in \Omega$. Согласно нашим обозначениям $F_{(p)}$ – замыкание оператора F, определенного равенством (12), в пространстве $L_p(\Omega)$. Поэтому существует последовательность $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset C_0^{\infty}(\Omega)$ такая, что $v_j \underset{p}{\to} v$, $\quad Fv_j \underset{p}{\to} F_{(p)}v$, $j \longrightarrow \infty$. Положим $u_j = Fv_j$. Тогда $u_j \underset{p}{\to} u$, $\; j \longrightarrow \infty$.

Так как $u_j \in C_0^{\infty}(\Omega)$, то согласно лемме 2 $GFv_j = (E + \Gamma_1)\, v_j$, $\; j = 1, 2, 3, \ldots$.

В силу ограниченности оператора $E + \Gamma_1$ имеем $(E + \Gamma_1)\, v_j \underset{p}{\to} \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right) v$, $\; j \longrightarrow \infty$. Поэтому $GFv_j \underset{p}{\to} \left(E + \Gamma_{1,(p)}\right) v = G_{(p)}F_{(p)}v$, $\; j \longrightarrow \infty$. Следовательно $u_j \underset{p}{\to} u$ и $Gu_j \underset{p}{\to} Gu$ при $j \longrightarrow \infty$, то есть $u \in D\left(G_{(p)}\right)$.

Таким образом,

$$R\left(F_{(p)}\right) \subset D\left(G_{(p)}\right). \tag{39}$$

Пусть $w \in D\left(G_{(p)}\right)$. Положим $v = G_{(p)}w$. Так как согласно лемме 4 существует обратный оператор $G_{(p)}^{-1}$, то $w = G_{(p)}^{-1}v$. Отсюда и из равенства (34) следует, что $w = F_{(p)}\left(E + \mathscr{S}_1\right) v$. Следовательно, $w \in R\left(F_{(p)}\right)$ и доказано включение $D\left(G_{(p)}\right) \subset R\left(F_{(p)}\right)$. Отсюда и из (38) следует первое равенство в (37).

Пусть $F_{(p)}v = 0$. Тогда из (см. (27)) $G_{(p)}F_{(p)}v = (E + \Gamma_1)\, v$ следует, что $(E + \Gamma_1)\, v = 0$. Из обратимости оператора $(E + \Gamma_1)$ следует, что $\ker(E + \Gamma_1) = 0$. Поэтому $v = 0$. Второе равенство в (37) доказано, что завершает доказательство леммы 5.

4. Доказательство теоремы 1

Сначала докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма 6. *В условиях теоремы 1 существует, число $t_3 > 0$ такое, что если $\tau \in (0, t_3)$ и $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, то существует оператор $\Gamma \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ с $\|\cdot\|_p$-нормой, не превосходящей $1/2$, такой, что*

$$LFu = (E + \Gamma)u \quad \left(u \in C_0^{\infty}(\Omega)\right). \tag{40}$$

Доказательство. Аналогично равенствам (20), (21), доказывается равенство (39), где

$$\Gamma = \Gamma' + \Gamma'', \quad \Gamma' = \sum_{m=1}^{+\infty} [L,\, \psi_m]\Phi_m\psi_m, \quad \Gamma'' = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m\left(L - L_m\right)\Phi_m\psi_m.$$

Далее поступая также, как в доказательстве леммы 2, доказывается, что $\|\Gamma\|_p \le \tau\mathbb{M}_0$, где $\mathbb{M}_0$ – некоторая положительная постоянная. Следовательно, при $t_3 = 1/2\tau\mathbb{M}_0$ и $\tau \in (0, t_3)$ норма оператора Γ не превосходит $1/2$. Лемма 6 доказана.

Теперь переходим к непосредственному доказательству теоремы 1. Сначала покажем, что оператор (см. (1)) $L = L(\cdot, D)$, $D(L) = C_0^{\infty}(\Omega)$, допускает замыкание в пространстве $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Для этого нам достаточно показать, что если $Lu_j \underset{p}{\to} v$, $u_j \underset{p}{\to} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$, где $v \in L_p(\Omega)$ и $u_j \in C_0^{\infty}(\Omega)$ для $j = 1, 2, \ldots$, то $v = 0$.

Так как $C_0^{\infty}(\Omega) \subset D(G_{(p)})$ и согласно лемме 5 (см. (37)) $D(G_{(p)}) = R(F_{(p)})$, то $u_j \in R(F_{(p)})$ для $j = 1, 2, \ldots$. Следовательно, существуют функции $v_j \in L_p(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots$, такие, что $u_j = F_{(p)}v_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Поэтому

$$LF_{(p)}v_j \underset{p}{\to} v \text{ и } F_{(p)}v_j \underset{p}{\to} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Далее применяя лемму 6 (см. (39)) имеем

$$LF_{(p)}v_j = \left(E+\Gamma_{(p)}\right)v_j \underset{p}{\to} v,\ F_{(p)}v_j \underset{p}{\to} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда в силу обратимости оператора $\left(E+\Gamma_{(p)}\right)$ следует, что

$$v_j \underset{p}{\to} \left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1} v,\ F_{(p)}v_j \underset{p}{\to} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty. \tag{41}$$

Так как $F_{(p)}$ – замкнутый непрерывный оператор, то из $v_j \underset{p}{\to} w$, $F_{(p)}v_j \underset{p}{\to} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$ следует, что $F_{(p)}w = 0$. Поэтому из (40) получаем $F_{(p)}\left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1} v = 0$. Отсюда в силу равенства (37) имеем $\left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1} v = 0$, то есть $v = 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, доказано, что оператор $L = L(\cdot,\, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, имеет в пространстве $L_p(\Omega)$, $1<p<\infty$, замыкание. Это замыкание обозначим через $L_{(p)}$.

Далее докажем равенство

$$\ker L_{(p)} = 0. \tag{42}$$

Пусть $L_{(p)}v = 0$. Существует последовательность $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ такая, что

$$u_j \underset{p}{\to} v,\ Lu_j \underset{p}{\to} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty. \tag{43}$$

Так как (см. (37)) $C_0^\infty(\Omega) \subset D(G_{(p)}) = R(F_{(p)})$, то функции $u_j,\ j=1,\,2,\ldots$, можно представить в виде $u_j = F_{(p)}v_j,\ j = 1,\,2,\ldots$. Подставляя это в (42) имеем

$$F_{(p)}v_j \underset{p}{\to} v,\ LF_{(p)}v_j \underset{p}{\to} 0 \text{ при } j \longrightarrow +\infty.$$

Отсюда в силу леммы 6 получим $\left(E+\Gamma_{(p)}\right)v_j \underset{p}{\to} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$. Поскольку $\left(E+\Gamma_{(p)}\right)$ – обратимый оператор, то $v_j \underset{p}{\to} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$. Таким образом, $F_{(p)}v_j \underset{p}{\to} v$, $v_j \underset{p}{\to} 0$ при $j \longrightarrow +\infty$. Отсюда в силу замкнутости оператора $F_{(p)}$ находим $F_{(p)}v = 0$. Следовательно (см. лемму 5), $v = 0$. Равенство (41) доказано.

Далее, в силу равенства (39), поступая так же, как в доказательстве леммы 3, доказывается, что $L_{(p)}F_{(p)} = E + \Gamma_{(p)}$. Так как $R\left(E+\Gamma_{(p)}\right) = L_p(\Omega)$, то отсюда следует, что $R\left(L_{(p)}F_{(p)}\right) = L_p(\Omega)$. Далее учитывая $R\left(L_{(p)}F_{(p)}\right) \subseteq R\left(L_{(p)}\right) \subseteq L_p(\Omega)$ получим

$$R\left(L_{(p)}\right) = L_p(\Omega). \tag{44}$$

Отсюда и из (41) следует существование обратного оператора $L_{(p)}^{-1}$.

Так как $\left\|\Gamma_{(p)}\right\| \le 1/2$, то $\left(E+\Gamma_{(p)}\right)$ – обратимый оператор и $\left\|\left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1}\right\| \le 1$. Положим $\mathcal{J} = \left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1} - E$. Используя равенство $L_{(p)}F_{(p)} = E + \Gamma_{(p)}$ имеем

$$L_{(p)}^{-1} = F_{(p)}(E+\mathcal{J}), \tag{45}$$

где $\mathcal{J} \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\mathcal{J}\|_p < 1$. Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2

Сначала докажем неравенство

$$\left\|a_k D^k F\right\|_p \le C_1 < +\infty,\ |k| \le 2r, \tag{46}$$

где оператор F определен равенством (12).

Представим оператор $a_k D^k F$ в виде

$$a_k D^k F = F_*^{(k)} + F_{**}^{(k)}, \tag{47}$$

где

$$F_*^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m a_k \Phi_m^{(k)} \psi_m, \; F_{**}^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left[a_k D^k, \, \psi_m\right] \Phi_m \psi_m, \tag{48}$$

$\Phi_m^{(k)}$ – псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^k L_m^{-1}(s)$.

Далее оценим норму оператора $F_*^{(k)}$. Для этого представим оператор $F_*^{(k)}$ в виде

$$F_*^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,\,k)}\right)\right) \Phi_m^{(k)} \psi_m + \sum_{m=1}^{+\infty} \psi_m a_k \left(x^{(m,\,k)}\right) \Phi_m^{(k)} \psi_m.$$

Применяя лемму 2.2 из [16], получаем

$$\left\|F_*^{(k)}\right\|_p \le M_1 \left(\mathbb{C}_{1,\,k} + \mathbb{C}_{2,\,k}\right), \tag{49}$$

где

$$\mathbb{C}_{1,\,k} = \sup_{m=1,\,2,\,\dots} \left\|\psi_m \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,\,k)}\right)\right) \Phi_m^{(k)} \psi_m\right\|_p, \; \mathbb{C}_{2,\,k} = \sup_{m=1,\,2,\,\dots} \left\|\psi_m a_k \left(x^{(m,\,k)}\right) \Phi_m^{(k)} \psi_m\right\|_p.$$

Поступая также, как при оценке нормы оператора Γ_0 в доказательстве леммы 3, получаем

$$\left\|\psi_m \left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,\,k)}\right)\right) \Phi_m^{(k)} \psi_m\right\|_p \le M_{11} \sup \left|\left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,\,k)}\right)\right) s^k L_m^{-1}(s)\right| \le$$
$$\le M_{12} \sup \left|\left(a_k(x) - a_k\left(x^{(m,\,k)}\right)\right) s^k L^{-1}(x,\,s)\right| \le \tau\, M_{13},$$

где верхняя грань берется по $x \in \operatorname{supp} \psi_m$, $s \in R_n$. Таким образом, $\mathbb{C}_{1,\,k} \le M_{13}\tau, \; |k| \le 2r$, где M_{13} – некоторая положительная постоянная.

Из (17) и условия (3) следует, что

$$\left|a_k \left(x^{(m,\,k)}\right) s^k L_m^{-1}(s)\right| \le M_{14}$$

для всех $s \in R_n$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Отсюда в силу леммы 2.3 из [16] имеем

$$\mathbb{C}_{2,\,k} \le M_{15} \sup_{m=1,2,3,\dots} \sup_{s \in R_n} \left|a_k \left(x^{(m,\,k)}\right) s^k L_m^{-1}(s)\right| \le M_{15} M_{14}.$$

Далее учитывая (48) имеем

$$\|F_*^{(k)}\|_p \le M_{16} < +\infty, \tag{50}$$

где M_{16} – положительная постоянная, зависящая от r, n, p, $\varkappa$, δ, λ.

Представим оператор $F_{**}^{(k)}$ в виде

$$F_{**}^{(k)} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{\substack{k'+k''=k,\\ k' \ne 0}} C(k',\, k'') a_k(x) \psi_m^{(k')} \Phi_m^{(k'')} \psi_m,$$

где $C(k',\, k'')$ – постоянные числа, $\psi_m^{(k')}(x) = D_x^{k'} \psi_m(x)$ и $\Phi_m^{(k'')}$ – псевдодифференциальный оператор в R_n с символом $s^{k''} L_m^{-1}(s)$.

Применяя лемму 2.2 из [16], получим

$$\left\|F_{**}^{(k)}\right\|_p \leq \Lambda^{1/p}(n,\,\lambda) \sum_{\substack{k'+k''=k,\\ k'\neq 0}} \mathbb{C}^{(k)}_{(k',\,k'')},$$

где

$$\mathbb{C}^{(k)}_{(k',\,k'')} = \sup_{1,\,2,\,\ldots} \left\|a_k(x)\psi_m^{(k')}\Phi_m^{(k'')}\psi_m\right\|_p.$$

Из утверждения п. 3 леммы 1, неравенства (17) и условия (II) следует, что

$$\sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m}\sup_{s\in R_n}\left|\psi_m^{(k')}(x)a_k(x)s^{k''}L_m^{-1}(s)\right| \leq$$
$$\leq M_{21}\sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m}\sup_{s\in R_n}\left|a_k(x)g_1^{k_1'}(x)g_2^{k_2'}(x)\ldots g_n^{k_n'}(x)s^{k''}L_m^{-1}(s)\right| \leq$$
$$\leq M_{22}\sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m}\sup_{s\in R_n}\left|a_k(x)g_1^{k_1'}(x)g_2^{k_2'}(x)\ldots g_n^{k_n'}(x)s^{k''}L^{-1}(x,\,s)\right| \leq \tau M_{22} < +\infty.$$

Далее учитывая неравенство

$$\left\|\Phi_m^{(k'')}\right\|_p \leq M_{23}\sup_{s\in R_n}\left|s^{k''}L_m^{-1}(s)\right|,$$

имеем

$$\left\|a_k(x)\psi_m^{(k')}\Phi_m^{(k'')}\psi_m\right\|_p \leq M_{23}\sup_{x\in \operatorname{supp}\psi_m}\sup_{s\in R_n}\left|\psi_m^{(k')}(x)a_k(x)s^{k''}L_m^{-1}(s)\right| \leq \tau M_{22}M_{23} < +\infty.$$

Таким образом

$$\left\|F_{**}^{(k)}\right\|_p \leq M_{24} < +\infty, \tag{51}$$

где M_{24} – некоторая положительная постоянная, зависящая только от r, n, p, $\varkappa$, δ, λ.

В силу равенства (46) из (49) и (50) следует неравенство (45).

Далее докажем неравенство

$$\left\|a_kD^ku;\,L_p(\Omega)\right\| \leq C_2\left\|Lu;\,L_p(\Omega)\right\| \quad (1<p<+\infty) \tag{52}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$; C_2 – некоторая положительная постоянная, не зависящая от $u(x)$.

Пусть $u(x)$ – произвольная функция из $C_0^\infty(\Omega)$. Так как (см. лемму 5) $C_0^\infty(\Omega)\subset D\left(G_{(p)}\right) = R\left(F_{(p)}\right)$, то существует функция $v\in L_p(\Omega)$ такая, что $u = F_{(p)}v$. Учитывая это, в силу равенства $L_{(p)}F_{(p)} = E+\Gamma_{(p)}$ имеем $v = \left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1}Lu$. Далее применяя неравенство (45) имеем

$$\left\|a_kD^ku;\,L_p(\Omega)\right\| = \left\|a_kD^kF_{(p)}v;\,L_p(\Omega)\right\| \leq C_1\left\|v;\,L_p(\Omega)\right\| =$$
$$= C_1\left\|\left(E+\Gamma_{(p)}\right)^{-1}Lu;\,L_p(\Omega)\right\| \leq C_2\left\|Lu;\,L_p(\Omega)\right\|.$$

Неравенство (51) доказано.

Из (12) следует, что (см. (I), (29))

$$\left\|F_{(p)}\right\|_p \leq \Lambda^{1/p}(n,\lambda)\sup_{m=1,\,2,\,\ldots}\left\|\Phi_m\right\|_p \leq M\sup_{s\in R_n}\left|L_m^{-1}(s)\right| \leq M_*,$$

где постоянная $M_* > 0$ зависит только от r, n, p, $\varkappa$, δ. Отсюда и из (44) следует ограниченность оператора $L_{(p)}^{-1}$. Поэтому существует положительная постоянная C_0 такая, что

$$\|u;\, L_p(\Omega)\| \le C_0 \, \|Lu;\, L_p(\Omega)\| \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)) . \tag{53}$$

Теперь применяя неравенства (51), (52) находим (см. (5))

$$\|u;\, W_{p;\,L}(\Omega)\| \le \|u;\, L_p(\Omega)\| + \sum_{|k|\le 2r} \left\| a_k D^k u;\, L_p(\Omega) \right\| \le M_3 \, \|Lu;\, L_p(\Omega)\| .$$

Таким образом левое неравенство в (8) для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ доказано. Правое неравенство в (8) очевидно. Так как по определению $\overset{0}{W}_{p;\,L}(\Omega)$ – пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (5) и $L_{(p)}$ – замыкание в $L_p(\Omega)$ оператора $L = L(\cdot,\, D)$, $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, то из доказанного неравенства по непрерывности следует, что $D\left(L_{(p)}\right) = \overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$, и неравенство (8) имеет место для всех $u \in D\left(L_{(p)}\right)$.

Первая часть утверждения теоремы 2 доказана.

Далее докажем, что всякая функция $u(x) \in L_p(\Omega)$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{|k|\le 2r} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \int_\Omega \left| a_k\left(x^{(m,\,k)}\right) \psi_m^2(x) D_x^k u(x) \right|^p dx \right) < +\infty, \tag{54}$$

принадлежит области определения оператора $L_{(p)}$.

Пусть $G(x,\, D_x)$ – вспомогательное дифференциальное выражение, определенное равенствами (14), (15) и $G_{(p)}$ – замыкание оператора $G(x,\, D_x)$, $D(G) = C_0^\infty(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$.

Так как коэффициенты $\widetilde{a}_k(x)$ выражения $G(x,\, D_x)$ достаточно гладкие, то можно определить выражение $G'(x,\, D_x)$ сопряженное к $G(x,\, D_x)$. Через $G'_{(q)}$ обозначим замыкание оператора $G'(x,\, D_x)$, $D(G') = C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $L_q(\Omega)$, $q = p/(p-1)$.

Из (14), (15) имеем

$$\|Gu;\, L_p(\Omega)\| \le \sum_{|k|\le 2r} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\int_\Omega \left| a_k\left(x^{(m,\,k)}\right) \psi_m^2(x) D_x^k u(x) \right|^p dx \right)^{1/p} .$$

Отсюда в силу условия (53) получим $Gu \in L_p(\Omega)$. Теперь в силу пункта (г) леммы 2.6 работы [16] из $u \in L_p(\Omega)$ и $Gu \in L_p(\Omega)$ следует, что $u \in D\left(\left(G'_{(q)}\right)^*\right)$ и в силу (33) $u \in D\left(G_{(p)}\right)$. Так как (см. (37)) $D\left(G_{(p)}\right) = R\left(F_{(p)}\right)$, то $u \in R\left(F_{(p)}\right)$. Отсюда в силу равенства

$$D\left(L_{(p)}\right) = R\left(F_{(p)}\right) \tag{55}$$

следует, что $u \in D\left(L_{(p)}\right)$.

Докажем равенство (54). Пусть $v(x)$ – произвольный элемент из $R\left(F_{(p)}\right)$. Тогда существует функция $w(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что $v(x) = \left(F_{(p)} w\right)(x)$, $x \in \Omega$. Существует последовательность функций $w_1(x)$, $w_2(x)$, $\ldots$ из $C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $w_j \underset{p}{\to} w$ и $Fw_j \underset{p}{\to} F_{(p)} w$, при $j \longrightarrow +\infty$. Обозначим $v_j = Fw_j$. Тогда имеем $w_j \underset{p}{\to} w$ и $v_j \underset{p}{\to} v$ при $j \longrightarrow +\infty$. Так как $\{w_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$, то применяя лемму 6 имеем $LFw_j = (E+\Gamma) w_j$, $j = 1, 2, \ldots$. В силу ограниченности оператора $(E+\Gamma)$ из $w_j \underset{p}{\to} w$, $j \longrightarrow +\infty$, следует, что $(E+\Gamma) w_j \underset{p}{\to} (E+\Gamma) w$ при $j \longrightarrow +\infty$. Отсюда ввиду равенства $L_{(p)} F_{(p)} = E + \Gamma_{(p)}$ следует, что $LFw_j \underset{p}{\to} L_{(p)} F_{(p)} w$ при $j \longrightarrow +\infty$. Подставляя сюда $v_j = Fw_j$, $v = F_{(p)} w$ находим $v_j \underset{p}{\to} v$ и $Lv_j \underset{p}{\to} L_{(p)} v$ при $j \longrightarrow +\infty$. Следовательно, $v \in D\left(L_{(p)}\right)$.

Таким образом, включение $R\left(F_{(p)}\right) \subset D\left(L_{(p)}\right)$ доказано. Обратное включение следует из равенства $L_{(p)}^{-1} = F_{(p)}(E + \mathcal{J})$, где $\mathcal{J} \in \mathscr{L}_p[\Omega]$ и $\|\mathcal{J}\|_p < 1$. Равенство (54) доказано.

Далее докажем, что

$$W'_{p,\,L}(\Omega) \subset D\left(L_{(p)}\right). \tag{56}$$

Пусть $u \in W'_{p;\,L}(\Omega)$. Тогда $u \in L_p(\Omega) \cap O_{\mathscr{K}}$ и конечна норма (5). Выберем точки $x^{(m,\,k)} \in \operatorname{supp}\psi_m$, $|k| \le 2r$, $m = 1,\,2,\,\ldots$, которые имеются в определении вспомогательного дифференциального выражения $G(x,\,D_x)$ (см. (14), (15)), таким образом, чтобы для почти всех $x \in \operatorname{supp}\psi_m$ выполнялось неравенство $\left|a_k(x)D_x^k u(x)\right| \le |a_k(x)|$. Тогда учитывая конечность покрытия $\{\operatorname{supp}\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ области Ω (см. пункт 2) леммы 1) имеем

$$\sum_{|k|\le 2r}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\Omega}\left|a_k\left(x^{(m,\,k)}\right)\psi_m^2(x)D_x^k u(x)\right|^p dx\right) \le$$

$$\le 2^p\Lambda(n,\,\lambda)\sum_{|k|\le 2r}\int_{\Omega}\left|a_k\,(x)\,D_x^k u(x)\right|^p dx \le 2^p\Lambda(n,\,\lambda)\,\|u;\,W_{p;\,L}(\Omega)\| < +\infty.$$

Следовательно, условие (53) выполняется и $u \in D\left(L_{(p)}\right)$. Вложение (55) доказано.

Пусть выполнено условие гладкости (4). Тогда для любой функции $u(x) \in L_{1,\,loc}(\Omega)$ по формуле (6) можно определить обобщенную функцию $a_k\,(x)\,D_x^k u(x)$. Следовательно, можно определить и пространства $W_{p,\,L}(\Omega)$, $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$. Заметим, что норма в пространствах $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$, $W'_{p,\,L}(\Omega)$, $W_{p,\,L}(\Omega)$ определяется одним и тем же равенством (5). Поэтому с помощью рассуждений аналогичных доказательству вложения (55) можно показать, что для любой функции $u \in W_{p,\,L}(\Omega)$ выполняется условие (53), и следовательно $u \in D\left(L_{(p)}\right)$, то есть имеет место вложение $W_{p,\,L}(\Omega) \subset D\left(L_{(p)}\right)$. Так как $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega) \subset W_{p,\,L}(\Omega)$ и $D\left(L_{(p)}\right) = \overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega)$, то $\overset{0}{W}_{p,\,L}(\Omega) = W_{p,\,L}(\Omega)$. Равенство $\overset{0}{\mathcal{W}}_{p,\,L}(\Omega) = D\left(L_{(p)}\right)$ непосредственно следует из определения оператора $L_{(p)}$ и пространства $\overset{0}{\mathcal{W}}_{p,\,L}(\Omega)$. Равенство (9) доказано.

6. Доказательство теоремы 3

Непосредственными вычислениями доказывается следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть символ*

$$A(x,s) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x)s^k \quad (x \in \Omega, s \in R_n)$$

принадлежит классу $B(\tau_1, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\tau_1 \in (0,\,1)$, *и пусть коэффициенты* $b_k(x)$ *символа*

$$A_0(x,\,s) = \sum_{|k|\le 2r} b_k(x)s^k \quad (x \in \Omega, s \in R_n)$$

удовлетворяют условию

$$\sum_{\substack{k'+k''=k,\\ |k|\le 2r}}\left|b_k(x)s^{k'}g_1^{k''_1}(x)g_2^{k''_2}(x)\ldots g_n^{k''_n}(x)\right| \le \tau_2|A(x,\,s)|, \tau_2 \in (0,\,1/2),$$

для всех $x \in \Omega$, $s \in R^n$.

Тогда символ $A_1(x,\,s) = A(x,\,s) + A_0(x,\,s)$ *принадлежит классу* $B(\tau_3, \overrightarrow{g}, \Omega)$, *где* $\tau_3 \ge$ $\ge \tau_1 + 6\tau_2$.

Обозначим через $L'(x,\, s)$ символ дифференциального выражения $L'(x,\, D_x)$, сопряженного к дифференциальному выражению $L(x,\, D_x)$.

Лемма 8. *Существует число $\mu \in (0,\, 1/4)$, зависящее только от r и n, такое, что если $L(x,s) \in \mathbb{B}(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$, $\tau \in (0,\, \mu)$, то $L'(x,s) \in B\left(\dfrac{8\tau}{\mu}, \overrightarrow{g}, \Omega\right)$. Если при этом выполняется неравенство*

$$\sum_{|k|\le 2r} \left| a_k(x) s^k \right| \le \varkappa \left| L(x,\, s) \right| \quad \left(x \in \Omega,\, s \in R^n \right),$$

то

$$\sum_{|k|\le 2r} \left| a'_k(x) s^k \right| \le \varkappa' \left| L'(x,\, s) \right| \quad \left(x \in \Omega,\, s \in R^n \right),$$

где $\varkappa' = 4\varkappa + 3$ и $a'_k(x)$ – коэффициенты символа $L'(x,\, s)$.

Доказательство основано на применении леммы 7.

Далее докажем, что в условиях теоремы 3 имеет место равенство

$$\ker \left(L'_{(q)} \right)^* = 0. \tag{57}$$

Сначала рассмотрим случай, когда выполняется условие (IVa). В этом случае $L(x,\, D_x)$ – симметричное дифференциальное выражение, то есть $L'(x,\, D_x) = L(x,\, D_x)$. Поэтому к оператору $L' = L'(x,\, D_x)$, $\quad D(L') = C_0^\infty(\Omega)$, можно применить теорему 1. Тогда (см. (41), (43)) $\ker \left(L'_{(q)} \right) = 0$, $\quad R\left(L'_{(q)} \right) = L_q(\Omega)$. Так как $R\left(L'_{(q)} \right) \oplus \ker \left(L'_{(q)} \right)^* = L_q(\Omega)$, то отсюда следует (56).

Теперь рассмотрим случай, когда выполняется условие (IVб). В этом случае подбираем число $t_0 = t_0(r,\, n,\, p,\, K) > 0$ следующим образом

$$t_0 = \frac{\mu}{8} \min \left\{ t_3(r,\, n,\, p,\, \varkappa),\, \tau_0(r,\, n,\, p,\, \varkappa) \right\},$$

где число $\mu > 0$ – такое же как в лемме 8, $t_3 = t_3(r,\, n,\, p,\, \varkappa)$ – положительное число, определенное в лемме 6, $\tau_0(r,\, n,\, p,\, \varkappa)$ – положительное число, определенное в теореме 1. Тогда $L(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$ при $\tau \in (0,\, t_0)$ и в силу леммы 8 имеем $L'(x,s) \in B(\tau, \overrightarrow{g}, \Omega)$. Следовательно к оператору $L' = L'(x,\, D_x)$, $\quad D(L') = C_0^\infty(\Omega)$, заданному в пространстве $L_q(\Omega)$, можно применить теорему 1. Поэтому (см. (43)) $R\left(L'_{(q)} \right) = L_q(\Omega)$ и следовательно $\ker \left(L'_{(q)} \right)^* = 0$. Равенство (56) доказано в случае выполнения условия (IVб).

Так как $\tau < t_3(r,\, n,\, p,\, \varkappa)$, то к оператору $L = L(x,\, D_x)$, $\quad D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, заданному в пространстве $L_p(\Omega)$, можно применить теорему 1. Поэтому (см. (43)) $R\left(L_{(p)} \right) = L_p(\Omega)$. Отсюда и из (56) в силу пункта (в) леммы 2.6 из [16] следует равенство $\left(L'_{(q)} \right)^* = L_{(p)}$. Теперь из утверждения пункта (г) леммы 2.6 из [16] следует, что $u(x) \in D\left(\left(L'_{(q)} \right)^* \right) = D\left(L_{(p)} \right)$ тогда и только тогда, когда $u(x) \in L_p(\Omega)$ и обобщенная функция

$$\left(L(x,\, D_x) u \right)(x) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x) D_x^k u(x)$$

принадлежит пространству $L_p(\Omega)$. Следовательно,

$$D\left(L_{(p)} \right) = \mathcal{W}_{p,\, L}(\Omega). \tag{58}$$

Далее, применяя теорему 2, имеем

$$D\left(L_{(p)} \right) = W_{p,\, L}(\Omega) = \overset{0}{W}_{p,\, L}(\Omega). \tag{59}$$

Следовательно

$$D\left(L_{(p)}\right) = W_{p,\,L}(\Omega) = \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega). \tag{60}$$

Равенство (10) теоремы 3 следует из (57), (58).

Далее покажем, что из (59) следует разделимость дифференциального выражения $L(x,\,D_x)$ (см. определение 1). Пусть функция $u(x) \in L_p(\Omega)$ такая, что $L(x,\,D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$. Тогда из определения функционального пространства (см. (7)) $\mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$ следует, что $u(x) \in \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$. Так как $W_{p,\,L}(\Omega) = \mathcal{W}_{p,\,L}(\Omega)$, то $u(x) \in W_{p,\,L}(\Omega)$, то есть $\|u;\,W_{p;\,L}(\Omega)\| < +\infty$. Отсюда в силу равенства (5) следует, что $a_k(x)D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$ для всех мультииндексов $k \in \mathscr{K}$. Разделимость дифференциального выражения $L(x,\,D_x)$ доказана, что и завершает доказательство теоремы 3.

7. Заключение

В работе найдены некоторые достаточные условия разделимости эллиптических операторов высшего порядка в произвольной (ограниченной или неограниченной) области, коэффициенты которых имеют нестепенное вырождение на границе области.

Попутно установлены соответствующие весовые интегральные неравенства, которые могут найти приложения в теории нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных. Доказанные в работе теоремы об обратимости вспомогательных дифференциальных операторов позволяют в дальнейшем исследовать разрешимость некоторых граничных задач для эллиптических уравнений с вырождением.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Everitt W.N., Giertz M. Some properties of the domains of certain differential operators // Proc. Lond. Math. Soc. 1971. Vol. 23(3). P. 301–324.
2. Chernyavskaya N. A., Shuster L. A. Correct Solvability, Embedding Theorems and Separability for the Sturm-Liouville Equation // Jul 23 2013 math.CA arXiv:1307.5611v1.
3. Chernyavskaya N. A., Shuster L. A. Weighted Estimates for Solutions of the General Sturm-Liouville Equation and the Everitt-Giertz Problem. I // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2). 2015. Vol. 58. P. 125–147.
4. Brown R.C., Hinton D.B. Two separation criteria for second order ordinary or partial differential operators // Mathem. Bohemica. 1999. Vol. 124(2-3). P. 273–292.
5. Brown R.C. Separation and disconjugacy // Journ. of Inequ. in Pure and Appl. Math. 2003. Vol. 4(3), Art. 56. P. 1–16.
6. Ospanov K.N., Akhmetkaliyeva R.D. Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation // Electr. J. of Quantat. Theory of Diff. Equat. 2012. No. 66. P. 1–12. http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/
7. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости // ДАН СССР. 1973. Т. 213, № 5. С. 1009–1011.
8. Бойматов К.Х. О методе Эверитта и Гирца для банаховых пространств // Доклады Академии наук (Россия). 1997. Т. 356, № 1. С. 10–12.
9. Бойматов К.Х. Коэрцитивные оценки и разделимость для нелинейных диффереациальных операторов второго порядка // Матем. заметки. 1989. Т. 46, № 6. С. 110–112.

10. Zayed E.M.E., Omran S.A. Separation of the Tricomi differential operator in Hilbert space with application to the existance and uniqueness theorem // Int. J. Contemp. Math. Sciences, 2011. Vol. 6(8). P. 353–364.

11. Omran S.A., Gepreel K., Nofal E.T.A. Separation of the general differential wave equation in Hilbert space // Int. J. Nonlinear Science. 2011. Vol. 11(3). P. 358–365. http://www.nonlinearscience.org.uk/

12. Muratbekov M., Otelbaev M. On the existence of a resolvent and separability for a class of singular hyperbolic type differential operators on an unbounded domain // Eurasian mathematical journal. 2016. Vol. 7(1). P. 50–67.

13. Zayed E.M.E. Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with the existance and uniqueness theorem // J. Math. Anal. Appl. 2008. Vol. 337. P. 659–666.

14. Zayed E.M.E., Omran S.A. Separation for triple-harmonic differential operator in Hilbert space // Int. J. Math. Combin. 2010. Vol. 4. P. 13–23.

15. Бойматов К.Х. L_2-оценки обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1975. Т. 223, № 3. С. 521–524.

16. Бойматов К.Х.Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Труды Математического инс-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170. С. 37–76.

17. Бойматов К.Х. Коэрцитивные свойства сильно вырождающихся эллиптических уравнений // Доклады РАН. 1993. Т. 330, № 4. С. 409–414.

18. Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Труды Математического инс-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1983. Т. 161. С. 195–217.

19. Лизоркин П.И. Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p-нормах // Труды Математического инс-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1980. Т. 156. С. 130–142.

20. Исхоков С.А. О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 11. С. 536–542.

21. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 4-ое издание // М.: Наука, 1976. 576 с.

REFERENCES

1. Everitt W.N., Giertz M., 1971, "Some properties of the domains of certain differential operators", *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 23(3), pp. 301–324.

2. Chernyavskaya N. A., Shuster L. A., 2013, "Correct Solvability, Embedding Theorems and Separability for the Sturm-Liouville Equation", Jul 23 2013 math.CA arXiv:1307.5611v1.

3. Chernyavskaya N. A., Shuster L. A., 2015, "Weighted Estimates for Solutions of the General Sturm-Liouville Equation and the Everitt-Giertz Problem. I", *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2)*, vol. 58, pp. 125–147.

4. Brown R.C., Hinton D.B., 1999, "Two separation criteria for second order ordinary or partial differential operators", *Mathem. Bohemica.*, vol. 124(2-3), pp. 273–292.

5. Brown R.C., 2003, "Separation and disconjugacy", *Journ. of Inequ. in Pure and Appl. Math.*, vol. 4(3), Art. 56, pp. 1–16.

6. Ospanov K.N., Akhmetkaliyeva R.D., 2012, "Separation and the existence theorem for second order nonlinear differential equation", *Electr. J. of Quantat. Theory of Diff. Equat.*, No. 66, pp. 1–12. http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

7. Boimatov K.Kh., 1973, "Theorems on the separation property", *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* vol. 213, № 5, pp. 1009–1011.

8. Boimatov K.Kh., 1997, "On the Everitt and Giertz method for Banach spaces", *Dokl. Akad. Nauk,* vol. 356, № 1, pp. 10–12.

9. Boimatov K.Kh., 1989, "Coercive estimates and separability for second-order nonlinear differential operators", *Mat. Zametki*, vol. 46, № 6, pp. 110–112.

10. Zayed E.M.E., Omran S.A., 2011, "Separation of the Tricomi differential operator in Hilbert space with application to the existance and uniqueness theorem", *Int. J. Contemp. Math. Sciences,* vol. 6(8), pp. 353–364.

11. Omran S.A., Gepreel K., Nofal E.T.A., 2011, "Separation of the general differential wave equation in Hilbert space", *Int. J. Nonlinear Science*, vol. 11(3), pp. 358–365. http://www.nonlinearscience.org.uk/

12. Muratbekov M., Otelbaev M., 2016, "On the existence of a resolvent and separability for a class of singular hyperbolic type differential operators on an unbounded domain", *Eurasian mathematical journal*, vol. 7(1), pp. 50–67.

13. Zayed E.M.E., 2008, "Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with the existance and uniqueness theorem", *J. Math. Anal. Appl.,* vol. 337, pp. 659–666.

14. Zayed E.M.E., Omran S.A., 2010, "Separation for triple-harmonic differential operator in Hilbert space", *Int. J. Math. Combin.*, vol. 4, pp. 13–23.

15. Boimatov K.Kh., 1975, "L_2-estimates of the generalized solutions of elliptic differential equations", *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* vol. 223(3), pp. 521–524.

16. Boimatov K.Kh., 1987, "Separability theorems, weighted spaces and their applications", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 170, pp. 39–81.

17. Boimatov K.Kh., 1993, "Coercivity properties of strongly degenerate elliptic equations", *Russian Acad. Sci. Dokl. Math,* vol. 47, № 3, pp. 489–497.

18. Otelbaev M., 1984, "Coercive estimates and separability theorems for elliptic equations in R^n", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 161, pp. 213–239.

19. Lizorkin P.I., 1980, "Estimate of mixed and intermediate derivatives in weighted L_p-norms", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 156, pp. 141–153.

20. Iskhokov S.A., 2003, "Smoothness of the generalized solution of an elliptic equation with nonpower degeneracy", *Differential equations,* vol. 39, № 11, pp. 1618–1625. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000019354.37211.26.

21. Kolmogorov A.N., Fomin S.V., 1999, "Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis", Dover Publications, INC., 576 p.

Получено 14.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.