ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 1 (2013)

УДК 511.3

О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ В КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ L-ФУНКЦИИ ДИРИХЛЕ

О. А. Матвеева (г. Саратов)

Аннотация

Получены плотностные теоремы о нулях полиномов Дирихле, аппроксимирующих L-функции Дирихле в критической области.

Ключевые слова: полиномы Дирихле, L-функции Дирихле, нули полиномов Дирихле.

ZEROS OF DIRICHLET POLYNOMIALS APPROXIMATING DIRICHLET L-FUNCTIONS IN THE CRITICAL STRIP

O. A. Matveeva

Abstract

Density theorems about zeros of dirichlet polynomials approximating Dirichlet L-fuctions in the critical strip are obtained.

1. Введение

В работе [1] была приведена вычислительная схема построения полиномов Дирихле $Q_n(s),\ s = \sigma + it$, которые в прямоугольнике $0 < \sigma < 1,\ 0 < t < T$ аппроксимируют целые функции, заданные рядами Дирихле с периодическими коэффициентами, с показательной скоростью. В частности, эта схема позволяет эффективно вычислять нули L-функций Дирихле, лежащие в критической полосе. В данной работе показано, что, с одной стороны, известные факты о нулях L-функций Дирихле дают возможность получить результаты о нулях аппроксимирующих полиномов Дирихле; с другой стороны, поведение в критической полосе аппроксимирующих полиномов Дирихле определяет поведение L-функций Дирихле.

2. Конструкция полиномов Дирихле, аппроксимирующих в критической полосе L-функции Дирихле

Рассмотрим L-функцию Дирихле

$$L(s,\chi)=\sum_{1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},\quad s=\sigma+it, \tag{1}$$

и соответствующий степенной ряд

$$g(z)=\sum_{1}^{\infty}\chi(n)t^n. \tag{2}$$

В силу периодичности коэффициентов этот ряд определяет рациональную функцию, полюсы которой располагаются на единичной окружности. Эта функция регулярна в точке $z=1$. Будем считать, что она регулярна и в точке $z=-1$. Рассмотрим разложение этой функции по полиномам Чебышёва

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kT_k(x),$$

где

$$c_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}g(t)T_k(t)dt.$$

Пусть

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kT_k(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k^{(n)}x^k$$

и

$$Q_n(s)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^{(n)}}{k^s}, \tag{3}$$

где $b_k^{(n)}$ – те же коэффициенты, что и у многочлена $P_n(x)$.

Известно [2], что в любой полосе $0<\sigma_0<\sigma,\ |t|<T$ имеют место оценки

$$||L(s,\chi)-Q_n(s)||\le C\frac{1}{\rho^n}, \tag{4}$$

где константа C не зависит от n и σ_0 и где ρ - величина большая, чем единица, равная полусумме осей эллипса, фокусы которого лежат в точках ± 1, и внутри которого регулярна функция $g(t)$, определённая равенством (2).

Важным моментом в вычислительной схеме, приведённой в [1], является задача определения степени аппроксимирующего полинома $Q_n(s)$, нули которого в заданном прямоугольнике $0 < \sigma < 1,\ 0 < t \leq T$ совпадают с нулями L-функции Дирихле. В работе [1] эта задача решалась следующим образом: степень аппроксимирующего полинома определялась совпадением в данном прямоугольнике нулей $Q_n(s)$ и $Q_{2n}(s)$. Здесь мы укажем иной способ определения степени аппроксимирующего полинома, в основе которого лежат известные факты относительно распределения нулей L-функций Дирихле и нулей почти-периодических функций класса Δ.

Обозначим через $N(T, \chi)$ число нулей L-функции Дирихле $L(s, \chi)$ в прямоугольнике $\frac{1}{2} < \sigma_0 \leq \sigma < 1,\ 0 < t \leq T$.

Известно [3], что для характера χ по модулю k имеет место соотношение

$$N(T, \chi) = \frac{\ln T}{2\pi} T + A(k)T + O(\ln T), \tag{5}$$

где константа $A(k)$ зависит от k и $A(k) < \frac{\ln 2k}{2}$.

Обозначим через $N(\sigma_0, T, \chi)$, где $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$, число нулей L-функции, лежащих в прямоугольнике $\sigma_0 \leq \sigma < 1,;\ 0 < t \leq T$. Для величины $N(\sigma_0, T, \chi)$ известно [4] соотношение вида

$$N(\sigma_0, T, \chi) = O(T). \tag{6}$$

Там же ([4]) приведены более точные оценки, чем оценка (6).

Отметим, что соотношение (6) показывает, что для любого $\varepsilon > 0$ вне полосы $\frac{1}{2} - \varepsilon < \sigma < \frac{1}{2} + \varepsilon$ находится бесконечно малая часть нулей L-функции Дирихле.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = Q_n(\frac{1}{2} + it).$$

Эта функция является почти-периодической функцией класса $\Delta = \frac{\ln n}{\pi}$. Для нулей почти-периодических функций класса Δ имеют место [5] результаты, которые в терминах полинома Дирихле $Q_n(s)$ формулируются следующим образом:

– все нули полинома $Q_n(s)$ лежат в полосе $-h < \sigma < h$;

– пусть $N(T)$ — число нулей полинома $Q_n(s)$, лежащих в прямоугольнике $-h < \sigma < h,\ 0 < t \leq T$. Тогда имеет место соотношение

$$N(T) = \frac{\ln n}{2\pi} T + \omega(T), \tag{7}$$

где $\omega(t)$ — некоторая ограниченная функция.

Пусть $Q_n(s)$ — аппроксимирующий полином, нули которого лежат в прямоугольнике $0 < \sigma < 1,\ 0 < t \leq T$ и совпадают с нулями L-функции Дирихле. Так как L-функция не имеет нулей при $\sigma \geq 1$, то можно считать, что главная часть нулей $Q_n(s)$, у которых мнимая часть не превосходит T, лежит в нашем прямоугольнике. Сравнивая главные части формул (5) и (7), получаем $n \geq [T]$. С учётом остальных слагаемых, входящих в эти формулы, можно считать, что

$$n \geq [2T]. \tag{8}$$

Последнее условие подтверждается экспериментально.

3. Некоторые результаты относительно нулей полиномов Дирихле $Q_n(s)$, лежащих в прямоугольнике $0 < \sigma_0 \leq \sigma < 1,\ 0 < t \leq T,\ n = [2T]$.

Пусть $Q_n(s)$ – аппроксимирующий полином L-функции Дирихле, число нулей которого в прямоугольнике $0 < \sigma < 1,\ 0 < t \leq T,\ n = [2T]$ обозначим $N_n(T)$. Тогда в силу оценки (5) получаем следующее утверждение:

Теорема 1. *Имеет место соотношение*

$$N_n(T) = \frac{\ln n}{\pi} n + Cn + O(\ln n),$$

где константа в символе «O» не зависит от n.

Обозначим через $N_n(\sigma_0, T),\ \frac{1}{2} < \sigma < 1,\ n = [2T]$, число нулей такого полинома, лежащих в прямоугольнике $\sigma_0 \leq \sigma < 1,\ 0 < t \leq T$. Тогда в силу оценки (6) получим следующее утверждение:

Теорема 2. *Имеет место соотношение*

$$N_n(\sigma_0, T) = O(n),$$

где константа в символе «O» не зависит от n.

Отметим, что приведённая здесь численная схема позволит не только получить результаты относительно нулей аппроксимирующих полиномов, но и позволит определиться с численными экспериментами, связанными с поведением L-функций Дирихле в критической полосе. Например, легко видеть, что известная гипотеза Линделёфа о росте модуля L-функций Дирихле на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ эквивалентна условию:

Для аппроксимирующих полиномов $Q_n(s)$ при $T = \dfrac{n}{2}$ выполняются оценки

$$\max_{0<t\leq T} \left| Q_n\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \leq Cn^{\varepsilon}, \tag{9}$$

где ε — произвольное положительное число, а константа C не зависит от n.

В связи с этим встаёт задача вычисления величин

$$\max_{0<t\leq T}\left|Q_n\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|, \quad T=\frac{n}{2}. \tag{10}$$

Известная теорема Бора [6] о том, что

$$\sup_{t\in R}\left|\sum_{n\leq x}\phi(n)n^{-it}\right|\geq C\sum_{p\leq x}|\phi(n)|$$

позволяет только оценить величину (10) снизу.

Для оценки величины (10) сверху необходимо применить численную схему, которая связана с вычислением полиномов $Q_n(s)$.

В заключении отметим, что аналогичные факты будут иметь место и в случае рядов Дирихле с периодическими коэффициентами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коротков А. Е., Матвеева О. А. Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серии: Математика. Физика. 2011. №17(112). Вып. 24. С. 47—53.

2. Кузнецов В. Н., Водолазов А. М. Аппроксимационный критерий периодичности конечнозначных функций натурального аргумента // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. научн. тр. Саратов: Изд-во Сарат. гос. ун-та, 2003. Т. 2. С. 27—32.

3. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.

4. Туран П. О новых результатах в аналитической теории чисел. // Проблемы аналитической теории чисел. М.: Мир, 1975. С. 118—142.

5. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Изд-во технико-теоретической лит., 1956.

6. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. М.: Мир, 1988. Т. 2.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
Поступило 10.03.2013