ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-58-68

Об оценке меры иррациональности $\arctg \frac{1}{2}$ ¹

М. Г. Башмакова, В. Х. Салихов

Салихов Владислав Хасанович — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры Высшей математики, Брянский государственный технический университет, (г. Брянск).

e-mail: svdh@rambler.ru

Башмакова Мария Геннадьевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Высшей математики, Брянский государственный технический университет, (г. Брянск).

e-mail: mariya-bashmakova@yandex.ru

Аннотация

Оценка меры иррациональности различных трансцендентных чисел является одним из направлений теории диофантовых приближений. Начиная с работ Э. Бореля конца 19 века, разрабатывались как общие методы получения оценок для классов значений некоторых функций, так и специализированные подходы для оценки отдельных величин. Различные методы, в частности, применялись для исследования арифметических свойств значений функции $\arctg x$.

Для получения оценок показателя иррациональности значений $\arctg x$ многими авторами эта функция рассматривалась как частный случай гипергеометрической функции Гаусса. Одной из первых работ, в которой были получены такие оценки, стала работа М. Хуттнера 1987 г. [1], доказавшего общую теорему об оценках мер иррациональности значений гипергеометрической функции вида $F_2^1(1, \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k} | \varepsilon x^k)$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \varepsilon = \pm 1$. Большую роль в развитии темы сыграли работы А. Хеймонена, Т. Матала-Ахо и К. Вананена [2], [3] в которых также был построен метод, позволявший получать оценки показателя иррациональности для значений $F_2^1(1, \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k} | z)$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, в том числе для $F_2^1(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} | -z^2) = \frac{1}{z} \arctg z$. Рассмотренный ими подход использовал приближение гипергеометрической функции полиномами Якоби и дал много конкретных результатов.

В последние десятилетия для построения оценок широкое распространение получили методы, использующие интегралы, симметричные относительно какой-либо замены параметров [4],[5],[6]. Впервые интеграл, принципиально использующий свойство симметричности, был применён в работе В.Х.Салихова [4] и позволил получить новую оценку показателя иррациональности для $\ln 3$. Чуть позже В. Х. Салихов [7], применив аналогичный симметризованный комплексный интеграл, получил новую оценку меры иррациональности числа π . В этой работе было использовано классическое равенство $\frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$. Таким же способом, то есть с помощью комплексного симметризованного интеграла, в работе Е. Б. Томашевской [8] были оценены значения вида $\arctg \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}, n > 2$, и улучшены некоторые предыдущие результаты для таких величин. Позднее, Е. Б. Томашевской [9] был разработан аналогичный интеграл для оценки $\arctg \frac{1}{2}$, который позволил доказать результат $\mu(\arctg \frac{1}{2}) \leq 11.7116\dots$, остававшийся лучшим до настоящего времени.

В 2014 г. К. Ву и Л. Ванг [10] немного улучшили результат В. Х. Салихова для $\ln 3$, рассмотрев другой тип интегральной конструкции, также использующей симметричность. В данной работе идея К. Ву и Л. Ванга применена для изменения интеграла Е. Б. Томашевской, что позволило улучшить его арифметические свойства и усилить предыдущий результат для меры иррациональности числа $\arctg \frac{1}{2}$.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-01-00296-а).

Ключевые слова: мера иррациональности, гипергеометрическая функция, симметризованный интеграл.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

М. Г. Башмакова, В. Х. Салихов. Об оценке меры иррациональности $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 58–68.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-58-68

On irrationality measure $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

M. G. Bashmakova, V. Kh. Salikhov (Bryansk)

Salikhov Vladislav Khasanovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Docent, Professor of department Higher mathematics, Bryansk State technical university.

e-mail: svdh@rambler.ru

Bashmakova Mariya Gennadievna — candidate of Physico-mathematical Sciences, docent of department Higher mathematics, Bryansk State technical university.

e-mail: mariya-bashmakova@yandex.ru

Abstract

An evaluation of irrationality measure for various transcendental numbers is one of the field in diophantine approximation theory. Starting with the works of E. Borel at the end of 19th century, were developed both general methods of evaluation for classes of some functions values and specialized approaches for estimating peculiar numbers. Diverse methods particularly were practiced for the investigating of arithmetic properties of the function $\operatorname{arctg} x$ values .

For getting evaluation on irrationality measure of $\operatorname{arctg} x$ values many authors regarded them as particular case of Gauss hypergeometric function. One of the first such kind of papers was the article of M. Huttner 1987 [1], who proved a generalized theorem about estimation on irrationality measure of the Gauss hypergeometric function values $F_2^1(1, \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k} | \varepsilon x^k)$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \varepsilon = \pm 1$. A big role in progress of theme have been played by works of A. Heimonen, T. Matala-aho, K. Väänänen [2], [3], in which was also constructed a method for evaluation on irrationality measure of the Gauss hypergeometric function values of the form $F_2^1(1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} | z)$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, including $F_2^1(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} | -z^2) = \frac{1}{z} \operatorname{arctg} z$. The approach considered by them had used approximation of the Gauss hypergeometric function by Jacobi type polynomials and gave a lot of concrete results.

Last decades for evaluation of various numbers were broadly spreading methods, which used symmetric on some changes of variable integrals [4],[5],[6]. Originally, integral qualitatively using the property of symmetry was applied by V.Kh.Salikhov [4], who used it to got the new estimate for $\ln 3$. A little later V. Kh. Salikhov [7] had applied similar symmetrized complex integral for obtaining new evaluation of π . In that work he put to use classical equality $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$. The same method, i.e. complex symmetrized integral was used by E. B. Tomashevskaya [8], who had estimated values of $\operatorname{arctg} \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n > 2$ and some of previous results for such numbers were improved by her. Later on E. B. Tomashevskaya [9] had elaborated analogical integral for estimation of $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, which one had allowed to prove the best result until now $\mu(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}) \leq 11.7116\dots$

In 2014 K. Wu and L. Vang [10] improved the result of V. Kh. Salikhov for $\ln 3$, applying a new type integral construction, which also had used a property of symmetry. In present paper

we took the idea of K. Wu and L. Vang and applied it to the integral of E. B. Tomashevskaya. It allowed us to improve arithmetic properties of integral and obtain better result for extent of irrationality $\arctg \frac{1}{2}$.

Keywords: irrationality measure, hypergeometric function, symmetrized integral.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

M. G. Bashmakova, V. Kh. Salikhov, 2019, "On irrationality measure $\arctg \frac{1}{2}$ ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 58–68.

1. Введение

При изучении свойств иррациональных и трансцендентных чисел одним из исследуемых вопросов является возможность их приближения рациональными дробями. Множество рациональных чисел всюду плотно в $\mathbb{R}$, поэтому его элементы находятся в сколь угодно малой окрестности любого вещественного числа γ , но вопрос становится содержательным, если говорить о приближении γ рациональными числами с ограниченными знаменателями. Одной из применяемых характеристик качества такого приближения служит мера иррациональности.

Мерой (показателем) иррациональности числа γ будем называть величину $\mu(\gamma)$, определяемую как нижняя граница чисел μ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $q_0(\varepsilon) > 0$, такое, что неравенство $\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| \geq q^{-\mu-\varepsilon}$ выполняется для всех целых чисел p, q при $q \geq q_0(\varepsilon)$.

Получение оценок мер иррациональности связано с построением приближения рассматриваемого значения. Обычно для этого используются вещественные или комплексные интегралы, бесконечные суммы, аппроксимации Паде и др. Исследование получаемой линейной формы позволяет построить оценку, которая будет тем лучше, чем удачнее подобрано приближение. В этом смысле общие методы обычно уступают специализированным конструкциям, разработанным для конкретного числа. Так было, например, для $\ln 3$ [4], π [7], $\ln 2$ [11] и др.

Оценки показателя иррациональности значений функции $\arctg x$ были получены разными авторами [1], [2], [6], в основном общими методами. Для числа $\arctg \frac{1}{2}$ наилучшая на данный момент оценка $\mu(\arctg \frac{1}{2}) \leq 11.7116\dots$ принадлежит Е.Б.Томашевской [9]. Этот результат был доказан с помощью специально разработанного интеграла

$$Y = \int_{16-4i}^{16+4i} \frac{(x-18-4i)^{3n}(x-16+4i)^{3n}(x-18+4i)^{3n}(x-16-4i)^{3n}(x-17)^{4n} dx}{x^{5n+1}(34-x)^{5n+1}}, \quad (1)$$

подынтегральная функция которого $S(x)$ такова что $S(34-x) = S(x)$, то есть обладает свойством симметричности относительно точки $x = 17$. Именно это свойство сыграло ключевую роль при построении оценки. С использованием этого типа симметричности были получены и другие результаты [5],[8]. Много новых оценок было также получено с применением симметричности других видов. Одним из недавних результатов применения симметризованного интеграла стало улучшение показателя иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ [12], [13], которое было достигнуто за счёт объединения интеграла Р.Марковеккио [11], получившего ранее новую оценку для $\ln 2$, и идеи симметричности.

Подынтегральная функция (1) заменой переменной $t = (x-17)^2$ приводится к виду $h(t)(f(t))^n$, где

$$h(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}(289-t)}, f(t) = \frac{(t^2 + 30t + 289)^3 t^2}{(289-t)^5}. \quad (2)$$

Изменение данной интегральной конструкции путём введения дополнительных множителей, аналогичных рассматриваемым в [10], позволило улучшить её приближающие свойства и получить новую оценку для $\arctg \frac{1}{2}$. Основным результатом данной работы заключается в следующем утверждении:

ТЕОРЕМА 1. *Справедлива следующая оценка меры иррациональности:*

$$\mu(\arctg \frac{1}{2}) \leq 9.272044\dots$$

Доказательство данного утверждения будет основываться на исследовании интеграла вида

$$\hat{I} = \frac{1}{i} \int_{16-4i}^{16+4i} \frac{\prod_{j=1}^4 (x - x_j)^{\alpha_0 n} (x - 17)^{2\alpha_1 n} (7x^2 - 238x + 2040)^{\alpha_2 n} (39x^2 - 1326x + 11560)^{\alpha_3 n} dx}{x^{n+1} (34 - x)^{n+1}}, \quad (3)$$

где $x_1 = 16 - 4i, x_2 = 16 + 4i, x_3 = 18 - 4i, x_4 = 18 + 4i, \alpha_j n \in \mathbb{N}, j = 0, \dots, 3$. Эта интегральная конструкция была построена на основе интеграла (1), при помощи добавления дополнительных множителей, улучшающих арифметические свойства. Будем в дальнейшем обозначать подинтегральную функцию (3) как $R(x)$.

Стандартная схема, применяемая для исследования показателя иррациональности, использует классический подход, принадлежащий М.Хата [14]:

ЛЕММА 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{R}$ - иррационально, $l_n = g_n \gamma + p_n$, где $g_n, p_n \in \mathbb{Z}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |g_n| = \delta, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |l_n| \leq -\tau, \tau > 0$, тогда $\mu(\gamma) \leq 1 + \frac{\delta}{\tau}$.*

Заметим, что в работе [15] было доказано более общее утверждение. Применение леммы 1 к интегралу (3) позволит получить заявленный результат.

2. Доказательство основного утверждения

Рассмотрим интеграл (3). Подынтегральная функция обладает свойством симметричности, так что замена переменной $t = (x - d)^2$, где $d = 17$, позволяет привести интеграл к виду

$$I(t, \bar{\alpha}) = \frac{1}{i} \int_{-15-8i}^{-15+8i} \frac{(t^2 + 30t + 289)^{\alpha_0 n} t^{\alpha_1 n} (7t + 17)^{\alpha_2 n} (39t + 289)^{\alpha_3 n} dt}{2\sqrt{t}(289 - t)^{n+1}}, \quad (4)$$

где $\bar{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Обозначим

$$g(t, \bar{\alpha}) = \frac{(t^2 + 30t + 289)^{\alpha_0} t^{\alpha_1} (7t + 17)^{\alpha_2} (39t + 289)^{\alpha_3}}{(289 - t)}, \quad (5)$$

тогда

$$I(t, \bar{\alpha}) = \frac{1}{i} \int_{-15-8i}^{-15+8i} \frac{dt}{2\sqrt{t}(289 - t)} (g(t, \bar{\alpha}))^n. \quad (6)$$

Дополнительные множители, отличающие функцию $g(t, \bar{\alpha})$ интеграла (5) от $f(t)$ из интеграла (2), улучшают арифметические свойства интеграла Е.Б.Томашевской, уменьшая значение подинтегральной функции и добавляя сокращение простых множителей.

Исследуем свойства многочленов, входящих в подинтегральную функцию (4). Введём необходимые обозначения. Пусть $A \in \mathbb{N}, B \in \mathbb{Z}^+, (A, B) = 1$ при $B \neq 0$.

Для $t = (x - d)^2$ будем рассматривать многочлены вида

$$P(t) = At + B = Ax^2 - 2Adx + Ad^2 + B \equiv A_2x^2 + A_1x + A_0 \equiv \tilde{P}(x) \text{ и}$$

$$P^*(t) = At^2 + Bt + C = Ax^4 - 4dAx^3 + (6d^2A + B)x^2 - (4d^3A + 2dB)x + (Ad^4 + Bd^2 + C) \equiv \sum_{j=0}^4 A_j^* x^j \equiv \tilde{P}^*(x).$$

Для любой несократимой дроби $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{N}$ рассмотрим показатель $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p$ для простого числа p такой, что $\frac{a}{b} = p^{\nu_p} \frac{a_1}{b_1}$, $(a_1, b_1) = 1$, $(a_1, p) = 1$, $(b_1, p) = 1$.

Для каждого многочлена $P(t)$ определим величину $\nu_p(P(t))$ при $p \in \{2, 5, 17\}$ как $\nu_2(P) = \min(3, \nu_2(A_0))$, $\nu_5(P) = \min(1, \nu_5(A_0))$, $\nu_{17}(P) = \min(2, \nu_{17}(A_0))$.

Для каждого многочлена $P^*(t)$ определим $\nu_p(P^*(t))$ при $p \in \{2, 5, 17\}$ как $\nu_2(P^*) = \min(6, \nu_2(A_0), \nu_2(A_1) + 2, \nu_2(A_2) + 4)$, $\nu_5(P^*) = \min(2, \nu_5(A_0), \nu_5(A_1) + 1)$, $\nu_{17}(P^*) = \min(4, \nu_{17}(A_0), \nu_{17}(A_1) + 1, \nu_{17}(A_2) + 2)$.

Для любой функции $f(x)$, аналитической в точке $x = 0$, обозначим $D_0(f(x)) = f(0)$;

$$D_N(f(x)) = \frac{f^{(N)}(0)}{N!}, N \in \mathbb{N}.$$

ЛЕММА 2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{Z}^+$, $N \leq 2m$. Тогда выполняются следующие оценки: $\nu_2(D_N(P^m)) \geq m\nu_2(P) - 2N$, $\nu_5(D_N(P^m)) \geq m\nu_5(P) - N$, $\nu_{17}(D_N(P^m)) \geq m\nu_{17}(P) - N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\tilde{P}^m(x) = \sum_{|\bar{m}|=m} \gamma(\bar{m}) A_0^{m_0} A_1^{m_1} A_2^{m_2} x^{m_1+2m_2},$$

$$\bar{m} = (m_0, m_1, m_2) \in (\mathbb{Z}^+)^3, |\bar{m}| = m_0 + m_1 + m_2, \gamma(\bar{m}) = \frac{m!}{m_0!m_1!m_2!} \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Тогда } D_N(\tilde{P}^m(x)) = \sum_{\substack{|\bar{m}|=m \\ m_1+2m_2=N}} \gamma(\bar{m}) A_0^{m_0} \bar{A}_3 d^{m_1} 2^{m_2}, \bar{A}_3 = (-1)^{m_1} A^{m_1+2m_2}.$$

При $p = 2$:

$$\nu_2(D_N(\tilde{P}^m(x))) \geq m_0\nu_2(A_0) + m_1 = (m_0\nu_2(A_0) + 3m_1 + 3m_2) - 2m_1 - 3m_2 \geq \nu_2(P)(m_0 + m_1 + m_2) - (m_1 + 2m_2) - (m_1 + m_2) \geq m\nu_2(P) - 2N.$$

$$\text{При } p = 5 : \nu_5(D_N(\tilde{P}^m(x))) \geq m_0\nu_5(A_0) = (m_0\nu_5(A_0) + m_1 + m_2) - m_1 - m_2 \geq \nu_5(P)(m_0 + m_1 + m_2) - (m_1 + m_2) \geq m\nu_5(P) - N.$$

$$\text{При } p = 17 : \nu_{17}(D_N(\tilde{P}^m(x))) \geq m_0\nu_{17}(A_0) + m_1 = (m_0\nu_{17}(A_0) + 2m_1 + 2m_2) - m_1 - 2m_2 \geq \nu_{17}(P)(m_0 + m_1 + m_2) - (m_1 + 2m_2) = m\nu_{17}(P) - N. \quad \square$$

ЛЕММА 3. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{Z}^+$, $N \leq 4m$. Тогда выполняются следующие оценки: $\nu_2(D_N((P^*)^m)) \geq m\nu_2(P^*) - 2N$, $\nu_5(D_N((P^*)^m)) \geq m\nu_5(P^*) - N$, $\nu_{17}(D_N((P^*)^m)) \geq m\nu_{17}(P^*) - N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $(\tilde{P}^*(x))^m = \sum_{|\bar{m}|=m} \gamma^*(\bar{m}) A_0^{*m_0} A_1^{*m_1} A_2^{*m_2} A_3^{*m_3} A_4^{*m_4} x^{4m_4+3m_3+2m_2+m_1}$,

$$\text{где } \bar{m} = (m_0, \dots, m_4) \in (\mathbb{Z}^+)^5, |\bar{m}| = \sum_{j=0}^4 m_j, \gamma^*(\bar{m}) = \frac{m!}{m_0!m_1!m_2!m_3!m_4!} \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Тогда } D_N((\tilde{P}^*(x))^m) = \sum_{\substack{|\bar{m}|=m \\ m_1+2m_2+3m_3+4m_4=N}} \gamma^*(\bar{m}) \prod_{j=0}^4 (A_j^*)^{m_j}.$$

$$\text{При } p = 2 \text{ имеем } \nu_2(D_N(\tilde{P}^*(x)^m)) \geq \sum_{j=0}^4 m_j \nu_2(A_j^*) = \sum_{j=0}^4 m_j (\nu_2(A_j^*) + 2j) - 2N \geq m\nu_2(P^*) - 2N,$$

так как неравенства $\nu_2(A_j^*) + 2j \geq \nu_2(P^*)$ для $j \in \{0, 1, 2\}$ следуют из определения $\nu_2(P^*)$, а для $j \in \{3, 4\}$ выполняются ввиду $\nu_2(P^*) \leq 6$, $\nu_2(A_j^*) \geq 0$.

При $p = 5$: $\nu_5(D_N(\tilde{P}^*(x)^m)) \geq \sum_{j=0}^4 m_j \nu_5(A_j^*) = \sum_{j=0}^4 m_j (\nu_5(A_j^*) + j) - N \geq m \nu_5(P^*) - N$,

так как неравенства $\nu_5(A_j^*) + j \geq \nu_5(P^*)$ при $j \in \{0, 1\}$ следуют из определения $\nu_5(P^*)$, а для $j \in \{2, 3, 4\}$ выполняются ввиду $\nu_5(P^*) \leq 2, \nu_5(A_j^*) \geq 0$.

При $p = 17$ аналогично:

$$\nu_{17}(D_N(\tilde{P}^*(x)^m)) \geq \sum_{j=0}^4 m_j \nu_{17}(A_j^*) = \sum_{j=0}^4 m_j (\nu_{17}(A_j^*) + j) - N \geq m \nu_{17}(P^*) - N. \quad \square$$

В соответствии с определением интеграла (4) имеем многочлены:

$$\begin{aligned} P_0^*(t) &= t^2 + 30t + 289 = x^4 - 68x^3 + 1764x^2 - 20672x + 92480 = \tilde{P}_0^*(x), \\ P_1(t) &= t = x^2 - 34x + 289 = \tilde{P}_1(x), \\ P_2(t) &= 7t + 17 = 7x^2 - 238x + 2040 = \tilde{P}_2(x), \\ P_3(t) &= 39t + 289 = 39x^2 - 1326x + 11560 = \tilde{P}_3(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Обозначим $\Pi_k = \prod_{j=1}^3 p_j^{\nu_{p_j}(P_k(t))}$ для $P_k(t)$, $\Pi_k^* = \prod_{j=1}^3 p_j^{\nu_{p_j}(P_k^*(t))}$ для $P_k^*(t)$ при $p_1 = 2$, $p_2 = 5, p_3 = 17$. Из определения $\nu_p(P^*(t)), \nu_p(P(t))$ для многочленов (7) получим:

$$\Pi_0^* = 2^6 5^1 17^2, \Pi_1 = 17^2, \Pi_2 = 2^3 5^1 17^1, \Pi_3 = 2^3 5^1 17^2. \quad (8)$$

В силу симметричности, для подынтегральной функции (3) справедливо представление:

$$R(x) = Q_m(x) + \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{a_j}{x^j} + \frac{a_j}{(34-x)^j} \right), \quad (9)$$

где $m = 2n(2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 2n - 2$, $Q_m(x) = \sum_{\nu=0}^m b_\nu x^\nu$, все $b_\nu \in \mathbb{Z}[x]$.

Возьмём $\alpha_0 = 0.53819, \alpha_1 = 0.21230, \alpha_2 = 0.13580, \alpha_3 = 0.18161$ и n кратное 10^5 . Рассмотрим коэффициенты a_j в разложении (9).

ЛЕММА 4. Для любого $j = 1, \dots, n+1$ справедливо представление:
 $a_j = 2^{1.18137n+2j-3} 5^{-0.1444n+j-1} 17^{-2+j} A_j$, где $A_j \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдём коэффициенты a_j .

Рассмотрим $\bar{m} = \{m_0, \dots, m_4\}, \bar{m} \in (\mathbb{Z}^+)^5, |\bar{m}| = \sum_{j=0}^4 m_j$.

Имеем

$$a_j = D_{n+1-j}(x^{n+1}R(x)) = \sum_{|\bar{m}|=n+1-j} D_{m_0}(\tilde{P}_0^*(x))^{\alpha_0 n} \prod_{k=1}^3 D_{m_k}(\tilde{P}_k(x))^{\alpha_k n} D_{m_4}(34-x)^{-n-1}.$$

Ясно что $D_{m_4}(34-x)^{-n-1} = \binom{n+m_4}{m_4} 2^{-n-m_4-1} 17^{-n-m_4-1}$. Тогда в силу (8) и лемм 2,3

$$\begin{aligned} \nu_2(a_j) &\geq 6\alpha_0 n - 2m_0 + 3\alpha_2 n - 2m_2 + 3\alpha_3 n - 2m_3 - n - m_4 - 1 = n(6\alpha_0 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3) - \\ &- (m_0 + m_2 + m_3 + m_4) - (m_0 + m_2 + m_3) - n - 1 \geq 4.18137n - 2(n+1-j) - n - 1 = \\ &= 1.18137n + 2j - 3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_5(a_j) &\geq \alpha_0 n - m_0 + \alpha_2 n - m_2 + \alpha_3 n - m_3 \geq n(\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3) - n - 1 + j = \\ &= -0.1444n - 1 + j; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_{17}(a_j) &= 2\alpha_0 n - m_0 + 2\alpha_1 n - m_1 + \alpha_2 n - m_2 + 2\alpha_3 n - m_3 - n - m_4 - 1 \geq \\ &\geq (2\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)n - 2n - 2 + j = -2 + j. \quad \square \end{aligned}$$

Пусть далее $\Delta = 1.18137n, K = \mathbb{Z}[i]$ – кольцо гауссовских чисел, многочлен $Q_m(x)$ определён в равенстве (9).

ЛЕММА 5. Пусть $Q_m(x) = \sum_{\nu=0}^m \beta_\nu \theta^\nu$, где $\theta = x - 16 + 4i$, все $\beta_\nu \in K$. Тогда для всех $\nu = 0, 1, \dots, \alpha_0 n - 1$ справедливо: $\beta_\nu = 2^{\Delta-2\nu-3} \beta'_\nu, \beta'_\nu \in K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим схему, впервые использованную в работе [5]. Из вида $R(x)$ в интеграле (3) имеем для θ таких что $|\theta| < |16 + 4i| = \sqrt{272}$

$$R(x) = \sum_{\nu=\alpha_0 n}^{\infty} \gamma_\nu \theta^\nu, \quad (10)$$

где все $\gamma_\nu \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$. Далее для $j = 1, \dots, n + 1$

$$\frac{1}{x^j} = \frac{1}{(16 - 4i + \theta)^j} = \frac{1}{(16 - 4i)^j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu d_{\nu ij} \theta^\nu}{(16 - 4i)^\nu},$$

где $d_{\nu ij} = \frac{j(j+1)\dots(j+\nu-1)}{\nu!} \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{1}{(34 - x)^j} = \frac{1}{(18 + 4i - \theta)^j} = \frac{1}{(18 + 4i)^j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_{\nu ij} \theta^\nu}{(18 + 4i)^\nu}.$$

Из (9) и (10) получим

$$\sum_{\nu=\alpha_0 n}^{\infty} \gamma_\nu \theta^\nu = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_j}{(16 - 4i)^j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^\nu d_{\nu ij}}{(16 - 4i)^\nu} \right) \theta^\nu + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_j}{(18 + 4i)^j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_{\nu ij}}{(18 + 4i)^\nu} \theta^\nu + \sum_{\nu=0}^m \beta_\nu \theta^\nu.$$

Поэтому для $\nu = 0, 1, \dots, \alpha_0 n - 1$

$$\beta_\nu = - \sum_{j=1}^{n+1} a_j d_{\nu ij} \left(\frac{(-1)^\nu}{(16 - 4i)^{j+\nu}} + \frac{1}{(18 + 4i)^{j+\nu}} \right). \quad (11)$$

Из леммы 4 и равенства (11) получим представление:

$\beta_\nu = 2^{\Delta-2\nu-3} \frac{\tilde{\beta}_\nu}{(85)^{N_\nu}}$, где $\tilde{\beta}_\nu \in K, N_\nu \in \mathbb{N}$. Но $\beta_\nu \in K$, поэтому $\beta_\nu = 2^{\Delta-2\nu-3} \beta'_\nu$, где $\beta'_\nu \in K$, и лемма доказана. $\square$

Обозначим теперь $q_N = \text{НОК}(1, 2, \dots, N)$.

ЛЕММА 6. Имеет место соотношение $q_{m+1} \frac{1}{i} \int_{16-4i}^{16+4i} Q_m(x) dx = 2^\lambda A$, где $A \in \mathbb{Z}$,

$\lambda = \min(\Delta, 3\alpha_0 n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \Lambda &= q_{m+1} \frac{1}{i} \int_{16-4i}^{16+4i} Q_m(x) dx = q_{m+1} \left(\frac{1}{i} \left(\sum_{\nu=0}^m \frac{\beta_\nu}{\nu+1} (x-16+4i)^{\nu+1} \right) \Big|_{16-4i}^{16+4i} \right) = \\ &= q_{m+1} \left(\sum_{\nu=0}^{\alpha_0 n-1} \frac{\beta_\nu}{\nu+1} 8^{\nu+1} i^\nu + \sum_{\nu=\alpha_0 n}^m \frac{\beta_\nu}{\nu+1} 8^{\nu+1} i^\nu \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что $q_{m+1} \frac{1}{\nu+1} \in \mathbb{N}, \nu = 0, 1, \dots, m$.

Для слагаемых первой суммы ввиду леммы 5 имеем: $\beta_\nu 8^{\nu+1} = 2^{\Delta-2\nu-3} 2^{3\nu+3} \beta'_\nu = 2^\Delta \beta''_\nu$, где все $\beta''_\nu \in K$.

Для слагаемых второй суммы: $\beta_\nu \in K$, $8^{\nu+1} = 2^{3\alpha_0 n} 2^{3\nu+3-3\alpha_0 n}$, где $3\nu + 3 - 3\alpha_0 n \in \mathbb{N}$, поэтому $\Lambda = 2^\lambda A$, где $A \in K$.

Из (9) имеем

$$\Lambda \equiv q_{m+1} \frac{1}{i} \int_{16-4i}^{16+4i} Q_m(x) dx = q_{m+1} \frac{1}{i} \sum_{\nu=0}^m \frac{b_\nu}{\nu+1} ((16+4i)^{\nu+1} - (16-4i)^{\nu+1}) \in \mathbb{Z},$$

поскольку $b_\nu \in \mathbb{Z}$.

Следовательно $A \in \mathbb{Z}$, что и требовалось. $\square$

Теперь, используя представление (9), получаем для интеграла (3)

$$\hat{I} = \frac{1}{i} \int_{16-4i}^{16+4i} Q_m(x) dx + \frac{1}{i} \int_{16-4i}^{16+4i} \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_1}{34-x} \right) dx + \frac{1}{i} \int_{16-4i}^{16+4i} \sum_{j=2}^{n+1} \left(\frac{a_j}{x^j} + \frac{a_j}{(34-x)^j} \right) dx \equiv I_1 + I_2 + I_3.$$

По лемме 6 имеем $q_{1.21218n} I_1 = 2^{-1.18137n} A$, $A \in \mathbb{Z}$.

Для I_2 справедливо

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{i} a_1 (\ln x - \ln(34-x)) \Big|_{16-4i}^{16+4i} = \frac{1}{i} a_1 \left(\ln \frac{16+4i}{16-4i} - \ln \frac{18-4i}{18+4i} \right) = 2a_1 (\arctg \frac{1}{4} + \arctg \frac{2}{9}) = \\ &= 2a_1 \arctg \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Для I_3 получим

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{i} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{a_j}{-j+1} \left(\frac{1}{x^{j-1}} - \frac{1}{(34-x)^{j-1}} \right) \Big|_{16-4i}^{16+4i} = \\ &= \frac{1}{i} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{a_j}{-j+1} \left(\frac{(4-i)^{j-1}}{2^{2j-2} 17^{j-1}} - \frac{(4+i)^{j-1}}{2^{2j-2} 17^{j-1}} - \frac{(9+2i)^{j-1}}{2^{j-1} 85^{j-1}} + \frac{(9-2i)^{j-1}}{2^{j-1} 85^{j-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{i} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{a_j}{-j+1} \left(\frac{\mu_j}{2^{2j-2} 17^{j-1}} + \frac{\mu'_j}{2^{j-1} 5^{j-1} 17^{j-1}} \right), \mu_j, \mu'_j \in K, j = 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

В соответствии с представлением I_1, I_2, I_3 и леммой 4 заключаем, что выполнено равенство

$$2^{-1.18137n+1} \cdot 5^{0.1444n} \cdot 17 \cdot q_{1.21218n} I(t, \bar{\alpha}) = A_n \arctg \frac{1}{2} + B_n, \quad (12)$$

где $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$, $I(t, \bar{\alpha})$ определён равенством (6).

Применим к данной линейной форме лемму 1.

Для исследования асимптотики интеграла (6) используем метод перевала. Этот подход хорошо известен и постоянно применяется при исследовании подобных линейных форм, более подробное изложение можно найти, например, в [5], [6].

Рассмотрим подынтегральную функцию $g(t, \bar{\alpha})$. Уравнение $\frac{d}{dt} \ln g(t, \bar{\alpha}) = 0$ имеет пять корней, максимальное значение функции $\ln |g(t, \bar{\alpha})|$ достигается в точке $t_0 = -11.70909 - 2.58761i$, при этом $\ln |g(t_0, \bar{\alpha})| = -1.36036... \equiv \tau^*$.

Асимптотика коэффициента A_n также исследуется методом перевала. Точкой перевала в данном случае является $t_1 = 784.15031...$, и $\ln |g(t_1, \bar{\alpha})| = 5.45126... \equiv \delta^*$. Учитывая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln q_{Cn} = C$, из представления (12) и леммы 1 получаем заявленную оценку

$$\mu(\arctg \frac{1}{2}) \leq 1 - \frac{\delta^* + 0.1444 \ln 5 - 1.18137 \ln 2 + 1.21218}{\tau^* + 0.1444 \ln 5 - 1.18137 \ln 2 + 1.21218} = 9.272044...$$

Сравнение подынтегральных функций интеграла Е.Б.Томашевской (1) и интеграла (3) позволяет оценить эффективность дополнительно введённых многочленов $P_2(t) = 7t + 17$ и $P_3(t) = 39t + 289$. Вносимые ими степени простых чисел 2, 5, 17 помогают компенсировать эти множители в знаменателе коэффициентов линейной формы. Выбор оптимальных параметров α_j осуществлялся с помощью компьютерной программы.

3. Заключение

В последние десятилетия в области построения оценок мер иррациональности было получено много интересных результатов. С помощью интегральных конструкций такого типа как в данной работе, с дополнительными многочленами, в последнее время было улучшено несколько предыдущих оценок для различных величин. Хотя данная интегральная конструкция не может быть обобщена, рассмотренный метод позволяет построить аналогичные интегралы для других чисел. Учёт индивидуальных особенностей интеграла позволяет лучше приблизить исследуемое значение и получить новые результаты. Эта область исследований в настоящее время развивается и интерес к ней проявляется в научных школах разных стран.

Авторы выражают признательность Е.Б.Томашевской за глубокую проработку темы по оценке значений функции $\operatorname{arctg} x$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huttner M. Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques // J. Number Theory. 1987. Vol. 26. P. 166-178.
2. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function // Manuscripta Math. 1993. Vol. 81. P. 183-202.
3. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures // Bull. Austral. Math. Soc. 1994. Vol. 50, № 2. P. 225-243.
4. Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 3$ // Доклады Академии наук. 2007. Том 417, № 6. С. 753-755.
5. Сальникова Е. С. Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов // Математические заметки. 2008. Т.83. №3. С. 428-438.
6. Башмакова М. Г. О приближении значений гипергеометрической функции Гаусса рациональными дробями // Математические заметки. 2010. Т.88, №6. С. 785-797.
7. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π // Успехи математических наук. 2008. Том 63, № 3. С. 163-164.
8. Томашевская Е. Б. О мере иррациональности числа $\ln 5 + \pi/2$ и некоторых других чисел // Чебышевский сборник. 2007. Том 8. №2. С. 97-108.
9. Томашевская Е. Б. О диофантовых приближениях значений некоторых аналитических функций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Брянский государственный технический университет. 2009. 99 с.
10. Wu Q., Wang L. On the irrationality measure of $\log 3$ // Journal of number theory. 2014. №142. С. 264-273.
11. Marcovecchio R. The Rhin-Viola method for $\ln 2$ // Acta Arithm. 2009. Vol. 139.2. P. 147-184.

12. Андросенко В. А., Салихов В. Х. Симметризованная версия интеграла Марковеккио в теории диофантовых приближений // Матем. заметки. 2015. Том 97, №4, С. 483 – 492.
13. Андросенко В. А. Мера иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ // Изв. РАН. Серия математическая. 2015. Том 79, №1, С. 3 – 20.
14. Hata M. Irrationality measures of the values of hypergeometric functions // Acta Arith. 1992. Vol. LX. P. 335-347.
15. Wu Q. On the linear independence measure of logarithms of rational numbers // Math. Of computation. 2002. Vol. 72, №242. P. 901-911.

REFERENCES

1. Huttner, M., 1987, "Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques", *J. Number Theory*, vol. 26, pp. 166-178.
2. Heimonen, A., Matala-aho, T., Väänänen, K., 1993, "On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function", 1993, *Manuscripta Math.*, vol. 81, pp. 183-202.
3. Heimonen, A., Matala-aho, T., Väänänen, K., 1994, "An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures", *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 50, no 2, pp. 225-243.
4. Salikhov, V. Kh., 2007, "On the irrationality measures of $\ln 3$ ", *Doklady Mathematics*, vol. 417, no 6, pp. 753-755.
5. Salnikova, E. S., 2008, "Diophantine approximations of $\log 2$ and other logarithms", *Mathematical Notes*, vol. 83, no. 3, pp. 428-438.
6. Bashmakova M. G., 2010, "Approximation of values of the Gauss hypergeometric function by rational fractions", *Mathematical Notes*, vol. 88, no. 6, pp. 785-797.
7. Salikhov, V. Kh., 2008, "On the irrationality measures of π ", *Russian Mathematical Surveys* vol. 63, no. 3, pp. 163-164.
8. Tomashevskaya E. B., 2007, "On the irrationality measure of the number $\log 5 + \frac{\pi}{2}$ and some other numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 8, no. 2, pp. 97-108.
9. Tomashevskaya E. B., 2009, "Diophantine approximations of a values of some analytic functions", Dissertation., Bryansk State technical University, 99 pp.
10. Wu, Q., Wang, L., 2014, "On the irrationality measure of $\log 3$ ", *Journal of number theory.*, no. 142, pp. 264-273.
11. Marcovecchio, R., 2009, "The Rhin-Viola method for $\ln 2$ ", *Acta Arith.*, vol. 139.2, pp. 147-184.
12. Androsenko, V. A., Salikhov, V. Kh., 2015, "Symmetrized version of the Markovecchio integral in the theory of Diophantine approximations", *Mathematical Notes*, vol. 97, no. 4, pp. 483-492.
13. Androsenko, V. A., 2015, "Irrationality measure of the number $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ ", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 79, no. 1, pp. 3-20.
14. Hata, M., 1992, "Irrationality measures of the values of hypergeometric functions", *Acta Arith.*, vol. LX, pp. 335-347.

15. Wu, Q., 2002, "On the linear independence measure of logarithms of rational numbers", *Math. Of computation.*, vol. 72, no. 242, pp. 901-911.

ФГБОУ ВО Брянский государственный технический университет

Получено 21.06.2018 г.

Принято в печать 20.12.2019 г.