ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 4.

УДК 511.2

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-32-45

Об одной аддитивной задаче Хуа-Ло-Кена

И. Аллаков, А. Ш. Сафаров

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, профессор, Термезский государственный университет, физико-математический факультет, кафедра "Алгебра и геометрия" (г. Термез, Узбекистан).

e-mail: iallakov@mail.ru

Сафаров Абдувахит — аспирант, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан).

e-mail: asafarov1977@mail.ru

Аннотация

Пуст X достаточно большое вещественное число и $k \geq 2$ натуральное число, M множества натуральных чисел не превосходящие X , которые непредставимы в виде суммы простого и фиксированной степени простого числа, $E_k(X) = \text{card} M$.

В настоящей работе доказана теорема

Теорема. Для достаточно больших X справедлива оценка $E_k(X) \ll X^\gamma$, где

$$\gamma < \begin{cases} 1 - (17612,983k^2(\ln k + 6,5452))^{-1}, & \text{при } 2 \leq k \leq 205, \\ 1 - (68k^3(2 \ln k + \ln \ln k + 2,8))^{-1}, & \text{при } k > 205, \\ 1 - (137k^3 \ln k)^{-1}, & \text{при } k > e^{628}. \end{cases}$$

В частности из этой теоремы следует, что оценка и $\gamma < 1 - (137k^3 \ln k)^{-1}$, полученная В. А. Плаксыным для достаточно больших k , остается справедливой при $\ln k > 628$.

Ключевые слова: Характер Дирихле, нули L -функции, гипотеза Римана, исключительное множество, исключительный нуль, оценка снизу, оценка сверху.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

И. Аллаков, А. Ш. Сафаров. Об одной аддитивной задаче Хуа-Ло-Кена // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 32–45.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 4.

UDC 511.2

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-32-45

About one additive problem Hua Loo Keng's

I. Allakov, A. Sh. Safarov

Allakov Ismail — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Termez state University, faculty of physics and mathematics, Department of "Algebra and geometry" (Termez, Uzbekistan).

e-mail: iallakov@mail.ru

Safarov Abduvohit — graduate student, Termez state University (Termez, Uzbekistan).

e-mail: asafarov1977@mail.ru

Abstract

Let X be enough big real number and $k \geq 2$ be a natural number, M be a set of natural numbers n not exceeding X , which cannot be written as a sum of prime and fixed degree a prime, $E_k(X) = \text{card} M$. In present paper is proved theorem.

THEOREM. For it is enough greater X —equitable estimation $E_k(X) \ll X^\gamma$, where

$$\gamma < \begin{cases} 1 - (17612, 983k^2(\ln k + 6, 5452))^{-1}, & \text{при } 2 \leq k \leq 205, \\ 1 - (68k^3(2 \ln k + \ln \ln k + 2, 8))^{-1}, & \text{при } k > 205, \\ 1 - (137k^3 \ln k)^{-1}, & \text{при } k > e^{628}. \end{cases}$$

In particular from this theorems follows that estimation $\gamma < 1 - (137k^3 \ln k)^{-1}$, got by V. A. Plaksin for it is enough greater k , remains to be equitable under $\ln k > 628$.

Keywords: The Dirichlet charakter, Dirichlet L -function, exceptional set, representation numbers, exceptional zero, exceptional nature, main member, remaining member..

Bibliography: 16 titles.

For citation:

I. Allakov, A. Sh. Safarov, 2019, "About one additive problem Hua Loo Keng's", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 32–45.

1. Введение

I. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ. Пусть X -достаточно большое вещественное число, $k \geq 2$ - натуральное число, M - множество натуральных чисел $n \leq X$, непредставимых в виде

$$n = p_1 + p_2^k, \quad (1)$$

и удовлетворяющие условию

$$(n-1, \prod_p p) = 1, \quad (2)$$

$$\varphi(p) \nmid k$$

где p_1, p_2, p — простые числа, $\varphi(p)$ — функция Эйлера (см.[5-7]) .

В. А. Плаксин [8,9], рассмотрев $E_k(X) = \text{card} M$, доказал, что $E_k(X) \ll X^\gamma$, где $0 < \gamma < 1$ всегда и $\gamma < 1 - (137k^3 \ln k)^{-1}$ при достаточно большом k .

В настоящей работе улучшен результат В. А. Плаксина [9]. А именно доказана

ТЕОРЕМА. Для достаточно больших X справедлива оценка $E_k(X) \ll X^\gamma$,

где

$$\gamma < \begin{cases} 1 - (17612, 983k^2(\ln k + 6, 5452))^{-1}, & \text{при } 2 \leq k \leq 205, \\ 1 - (68k^3(2 \ln k + \ln \ln k + 2, 8))^{-1}, & \text{при } k > 205, \\ 1 - (137k^3 \ln k)^{-1}, & \text{при } k > e^{628}. \end{cases}$$

В частности из этой теоремы следует, что оценка $\gamma < 1 - (137k^3 \ln k)^{-1}$, полученная В. А. Плаксиным [9] для достаточно больших k , остается справедливой при $\ln k > 628$. Доказательство теоремы основывается на идеи работ [1,9] и на результаты работ [2–4].

2. ОБОЗНАЧЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ЕДИНИЧНОГО ИНТЕРВАЛА.

Пусть ε — произвольное малое положительное число, $X > X_{k,\varepsilon}$, $X_{k,\varepsilon}$ — достаточно большое положительное число, будем считать что

$$0 < \varepsilon < \frac{2}{7k4^k}, \quad X = P^k, \quad Q = X^{17\varepsilon}, \quad \tau = XQ^{-1}, \quad \Delta = \tau^{-1}, \quad Z = Q^{0,3}, \quad L = \ln X, \quad l = \ln \ln X,$$

$c_1, c_2, \dots$ — эффективные вычислимые положительные постоянные, в худшем случае зависящие от $\varepsilon, k, X_{k,\varepsilon}$.

Далее, пусть

$$R(n) = k \sum_{\substack{n=p_1+p_2^k \\ \frac{X}{3} < p_1, p_2^k \leq X}} \ln p_1 \ln p_2$$

и

$$S_k(a) = k \sum_{\frac{X}{3} < p^k \leq X} \ln p \quad e(\alpha p^k).$$

Тогда

$$R(n) = \int_{-\Delta}^{1-\Delta} S_1(\alpha) S_k(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha.$$

Теперь на интервале интегрирования выделим множество M_1 больших и множество M_2 малых дуг обычным способом (см., напр. [10,15]) для подобных задач. В рассматриваемом случае большая дуга — это $M_1(a, q) = (\frac{a}{q} - \Delta, \frac{a}{q} + \Delta)$, где $1 \leq q \leq Q, 0 \leq a \leq q$ и $(a, q) = 1$.

Поэтому $M_1 = \cup_{a,q} M_1(a, q)$ и M_2 -множество тех α , для которых $-\Delta < \alpha < 1 - \Delta$ и $\alpha \notin M_1$.

Таким образом, мы будем иметь

$$R(n) = R_1(n) + R_2(n) \tag{3}$$

где

$$R_1(n) = \int_{M_1} S_1(\alpha) S_k(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha, \quad R_2(n) = \int_{M_2} S_1(\alpha) S_k(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha. \tag{4}$$

Ясно, что если $R(n) > 0$, то для n существует представление в виде (1) с условием (2) (см. [12,14]).

2. Основная часть.

3. МАЛЫЕ ДУГИ. Покажем, что

$$\sum_{n \leq X} R_2^2(n) < X P^{2-5\varepsilon}. \tag{5}$$

Согласно тождеству Персеваля имеем

$$\sum_{n \leq X} R_2^2(n) = \int_{M_2} |S_1(\alpha) S_k(\alpha)|^2 d\alpha = \max_{M_2} |S_k(\alpha)|^2 \int_{M_2} |S_1(\alpha)|^2 d\alpha \leq m_1^2 m_2.$$

Здесь

$$m_2 = \int_0^1 |S_1(\alpha)|^2 d\alpha \leq \sum_{\frac{X}{3} < p \leq X} \ln^2 p < 0,7XL. \tag{6}$$

Для $m_1 = \max_{M_2} |S_k(\alpha)|$ используя теоремы 7.1 [16], при $\rho_0 = (17k^2(2lnk + lnlnk + 2, 8))^{-1}$, $4\varepsilon \leq \rho_0$, находим

$$m_1 \leq c_1 P^{1-3\varepsilon}. \quad (7)$$

Согласно (6), (7) получим

$$\sum_{n \leq X} R_2^2(n) < 0, 7X L c_1^2 P^{2-6\varepsilon} < X P^{2-5\varepsilon}.$$

Из (5) следует, что при $k \geq 2$ количество $n \leq X$, для которого $R_2(n) \geq P^{1-2\varepsilon}$ не больше чем $E_k^{(1)}(X) < X^{1-\frac{\varepsilon}{k}}$. Таким образом

$$R_2(n) \leq P^{1-2\varepsilon} \quad (8)$$

для всех $n \leq X$, за исключением не более чем $E_k^{(1)} < (X)^{1-\frac{\varepsilon}{k}}$ значений n из них.

4. БОЛЬШИЕ ДУГИ. Ясно, что в силу (4)

$$R_1(n) = \sum_{q \leq Q} \sum_{a=1}^q \int_{-\Delta}^{\Delta} S_1\left(\frac{a}{q} + \eta\right) S_k\left(\frac{a}{q} + \eta\right) e\left(-\left(\frac{a}{q} + \eta\right)n\right) d\eta. \quad (9)$$

где суммирование по всем a , с условием $1 \leq a \leq q$, $(a, q) = 1$.

Сначала несколько преобразуем $R_1(n)$. Для этого введем обозначения:

$$U_k(\chi, \eta) = k \sum_{\frac{X}{3} < p^k \leq X} \chi(p) \ln p e(p^k \eta), \quad (10)$$

$$T_k(\eta) = k \sum_{\frac{X}{3} < n^k \leq X} e(n^k \eta) \quad \text{и} \quad \tilde{T}_k(\eta) = -k \sum_{\frac{X}{3} < n^k \leq X} n^{\tilde{\beta}-1} e(n^k \eta).$$

Сумму $W_k(\chi, \eta)$ определим следующим образом

$$W_k(\chi_0, \eta) = U_k(\chi_0, \eta) - T_k(\eta), \quad W_k(\tilde{\chi}\chi_0, \eta) = U_k(\tilde{\chi}\chi_0, \eta) - \tilde{T}_k(\eta)$$

и

$$W_k(\chi, \eta) = U_k(\chi, \eta) \quad \text{если} \quad \chi \neq \chi_0, \quad \chi \neq \tilde{\chi}\chi_0. \quad (11)$$

Здесь χ — характер Дирихле по модулю q , χ_0 — главный характер по модулю q , $\tilde{\chi}$ — исключительный примитивный характер по модулю $\tilde{r}, \tilde{r}|q$ (см. [11]). Далее пусть

$$F_k(\chi) = F_k(q, \chi, a) = \sum_{v=1}^q \chi(v) e\left(\frac{av^k}{q}\right).$$

Используя эти обозначения, находим

$$S_1(\alpha) = \frac{1}{\varphi(q)} \left\{ F_1(\chi_0) T_1(\eta) + F_1(\tilde{\chi}\chi_0) \tilde{T}_1(\eta) + \sum_{\chi \pmod{q}} F_1(\chi) W_1(\chi, \eta) \right\}. \quad (12)$$

Отметим, что здесь первые два члена являются главными членами, а третий — остаток. Если $E_{\tilde{\beta}} = 0$ или $r \nmid q$ то в правой части (12) следует опускать второй член. Так как для

любого x , $|(\eta x^k)'| \leq k|\eta|P^{k-1} \leq kX^{17\varepsilon - \frac{1}{k}} < \frac{1}{2}$ при $X > X_{k,\varepsilon}$, $0 < x \leq P$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{34k}$. Как и в [8] (см. §3 работы [3]), при $P_1 = \sqrt[k]{\frac{X}{3}}$ имеем

$$T_k(\eta) = k \int_{P_1}^P e(t^k \eta) dt + O(1) = \sum_{\frac{X}{3} < m \leq X} \frac{e(m\eta)}{m^{1-\frac{1}{k}}} + O(1) = \Gamma_k(\eta) + O(1).$$

Аналогично

$$\tilde{T}_k(\eta) = - \sum_{\frac{X}{3} < m \leq X} \frac{m^{(\tilde{\beta}-1)/k} e(m\eta)}{m^{1-\frac{1}{k}}} + O(1) = \tilde{\Gamma}_k(\eta) + O(1).$$

Поэтому, для $S_k(\alpha)$ подобно (14) в главных дугах, имеет место представление

$$S_k(\alpha) = \frac{1}{\varphi(q)} \left\{ F_k(\chi_0) \Gamma_k(\eta) + F_k(\tilde{\chi} \chi_0) \tilde{\Gamma}_k(\eta) + \sum_{\chi \pmod{q}} F_k(\bar{\chi}) W_k(\chi, \eta) + O(1) \right\}. \quad (13)$$

Здесь использовали оценку (см. (6), [9])

$$|F_k(p, \chi, a)| \leq k\sqrt{p}, p \nmid a. \quad (14)$$

В (15) также первые два члена - главные члены, третий член остаток.

Поскольку

$$O \left(\sum_{q \leq Q} \sum_{a=1(a,q)=1}^q \int_{-\Delta}^{\Delta} \left| S_1\left(\frac{a}{q} + \eta\right) \right| d\eta \right) \ll \Delta X Q^2 \ll X^{51\varepsilon},$$

то из (11) получим

$$R_1(n) = R_3(n) + R_4(n) + O(X^{51\varepsilon}), \quad (15)$$

где главный член (произведение главных членов в (12) и (13))

$$\begin{aligned} R_3(n) = & \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{a=1(a,q)=1}^q \int_{-\Delta}^{\Delta} \left\{ F_1(\chi_0) F_k(\chi_0) T_1(\eta) \Gamma_k(\eta) + F_1(\chi_0) F_k(\tilde{\chi} \chi_0) T_1(\eta) \tilde{\Gamma}_k(\eta) + \right. \\ & + F_1(\tilde{\chi} \chi_0) F_k(\chi_0) \tilde{T}_1(\eta) \Gamma_k(\eta) + F_1(\tilde{\chi} \chi_0) F_k(\tilde{\chi} \chi_0) \tilde{T}_1(\eta) \tilde{\Gamma}_k(\eta) \left. \right\} \times \\ & \times e\left(-\left(\frac{a}{q} + \eta\right)n\right) d\eta = \sum_{i=1}^4 R_3^{(i)}(n) \end{aligned}$$

и остаток

$$\begin{aligned} R_4(n) = & \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{a=1(a,q)=1}^q \int_{-\Delta}^{\Delta} \left\{ F(\chi_0) T_1(\eta) \sum_{\chi \pmod{q}} F_k(\bar{\chi}) W_k(\chi, \eta) + \right. \\ & + F_1(\tilde{\chi} \chi_0) \tilde{T}_1(\eta) \sum_{\chi \pmod{q}} F_k(\bar{\chi}) W_k(\chi, \eta) + F_k(\chi_0) \Gamma_k(\eta) \sum_{\chi \pmod{q}} F_1(\bar{\chi}) W_1(\chi, \eta) + \\ & + F_k(\tilde{\chi} \chi_0) \tilde{\Gamma}_k(\eta) \sum_{\chi \pmod{q}} F_1(\bar{\chi}) W_1(\chi, \eta) + \sum_{\chi_1 \pmod{q}} F_1(\bar{\chi}) W_1(\chi, \eta) \times \end{aligned}$$

$$\times \sum_{\chi_2 \pmod{q}} F_k(\bar{\chi}_2) W_k(\chi_2, \eta) \} e(-(\frac{a}{q} + \eta)) d\eta = \sum_{i=1}^5 R_4^{(i)}(n).$$

4.1. ГЛАВНЫЙ ЧЛЕН. Согласно (15) главный член $R_3(n)$ является суммой четырех слагаемых, которые изучаются одинаково. Поэтому мы ограничимся с подробным рассмотрением одного из этих слагаемых. Например, $R_3^{(2)}(n)$ (в [9] подробно рассмотрен $R_3^{(3)}(n)$).

$$\begin{aligned} R_3^{(2)}(n) &= \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r}/q}} \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{a=1}^q F_1(\chi_0) F_k(\tilde{\chi}\chi_0) \int_{-\Delta}^{\Delta} T_1(\eta) \tilde{\Gamma}_k(\eta) e(-n\eta) d\eta = \\ &= \frac{1}{\varphi^2(\tilde{r})} G(\tilde{r}, \chi_0, \tilde{\chi}^*, n) A_{\tilde{r}}(n, \frac{Q}{\tilde{r}}) I_3. \end{aligned}$$

Здесь использовали мультипликативность $G(\tilde{r}, \chi_0, \tilde{\chi}^* \chi_0, n)$.

Рассмотрим I_3 . Так как в силу леммы 1 [9]

$$\left| \int_{\Delta}^{1/2} T_1(\eta) \tilde{\Gamma}_k(\eta) e(-n\eta) d\eta \right| \ll \tau^{\frac{1}{k}},$$

то

$$I_3 = \int_{-1/2}^{1/2} T_1(\eta) \tilde{\Gamma}_k(\eta) e(-n\eta) d\eta + O(\tau^{\frac{1}{k}}) = - \sum_{\substack{m+n_1=n \\ \frac{X}{3} < m, n_1 \leq X}} \frac{m^{(\tilde{\beta}-1)/k}}{m^{1-1/k}} = J_3 + O(\tau^{\frac{1}{k}}).$$

Здесь $J_3 \ll P$. Таким образом, согласно леммам 6, 7 [9] находим, что

$$\begin{aligned} R_3^{(2)}(n) &= \frac{G(\tilde{r}, \chi_0, \tilde{\chi}^*, n)}{\varphi^2(\tilde{r}) \pi_{\tilde{r}}(n)} (A(n) + O(Q^{-0,1})) \left\{ J_3 + O(\tau^{\frac{1}{k}}) \right\} = \\ &= \frac{\rho(\tilde{r}, \chi_0, \tilde{\chi}^*, n)}{\rho(\tilde{r}, n)} \left(A(n) J_3 + O \left(A(n) \tau^{\frac{1}{k}} J_3 Q^{-0,1} + Q^{-0,1} \tau^{\frac{1}{k}} \right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда в силу лемму 8 [9] и

$$L^{-k} \ll \sigma(n) \ll L^k, \quad \pi_r(n) A_r(n, Qr^{-1}) \ll L^k, \quad r \leq Q, \quad (16)$$

(см. следствие леммы 5 работы [4]), получим

$$R_3^{(2)}(n) = \frac{\rho(\tilde{r}, \chi_0, \tilde{\chi}^*, n)}{\rho(\tilde{r}, n)} (A(n) J_3 + O(P^{1-3,4\epsilon})).$$

Обращаясь аналогичным образом с остальными слагаемыми из (15), находим

$$\begin{aligned} R_3^{(2)}(n) &= A(n) \left(J_1 + \frac{\rho(\tilde{r}, \tilde{\chi}^*, \chi_0, n)}{\rho(\tilde{r}, n)} J_2 + \frac{\rho(\tilde{r}, \tilde{\chi}^*, \tilde{\chi}^*, n)}{\rho(\tilde{r}, n)} J_4 + \frac{\rho(\tilde{r}, \chi_0, \tilde{\chi}^*, n)}{\rho(\tilde{r}, n)} J_3 \right) + \\ &+ O(P^{1-3,4\epsilon}) + O \left(P^{1-3,4\epsilon} \frac{(n, \tilde{r})}{\tilde{r}^{0,33}} \right) = A(n) J + O(P^{1-3,4\epsilon}) + O \left(P^{1-3,4\epsilon} \frac{(n, \tilde{r})}{\tilde{r}^{0,33}} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

для всех $n \leq X$ за исключением $E_k^{(2)}(X) \ll X^{1-3,4\epsilon}$ значений n из них. Здесь

$$J_1 = \sum_{n_1+m=n} \frac{1}{m^{1-1/k}}, \quad J_2 = - \sum_{n_1+m=n} \frac{n_1^{\tilde{\beta}-1}}{m^{1-1/k}},$$

$$J_3 = - \sum_{n_1+m=n} \frac{m^{\frac{\tilde{\beta}-1}{k}}}{m^{1-1/k}}, \quad J_4 = \sum_{n_1+m=n} \frac{n_1^{\tilde{\beta}-1} m^{\frac{\tilde{\beta}-1}{k}}}{m^{1-1/k}}$$

и $\frac{X}{3} < n_1$, $m \leq X$, $\frac{X}{2} < n \leq X$.

Нетрудно показать, что

$$J_i \ll P \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (18)$$

Например:

$$J_1 = \sum_{\substack{n=n_1+m \\ \frac{X}{3} < n_1, m \leq X}} m^{-1+\frac{1}{k}} = \sum_{\substack{m=n-n_1 \\ \frac{X}{3} < m \leq \frac{2X}{3}}} m^{-1+\frac{1}{k}} \leq P.$$

Рассмотрим J . В доказательстве теоремы мы предполагаем, что $X/2 < n \leq X$ и $k \geq 2$ поэтому справедливо неравенство $P/8 < J_1 \leq P$. Следовательно, если $E_{\tilde{\beta}} = 1$, то используя лемму 6 [9] и (18) из (17), находим

$$J = J_1 + O\left(\frac{P}{\tilde{r}^{0,33}}(n, \tilde{r})\right).$$

Таким образом, если $(n, \tilde{r}) \leq \tilde{r}^{1/4}$, то

$$J = J_1 + O\left(\frac{P}{\tilde{r}^{0,08}}\right) \geq P\left(\frac{1}{8} + O(\tilde{r}^{-2/25})\right).$$

В силу леммы 1 [2] $\tilde{r} \gg L^2 l^{-2}$. Поэтому при достаточно большом X отсюда получим

$$J \geq 0, 12P.$$

Пусть теперь $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и $(n, \tilde{r}) > \tilde{r}^{1/4} \gg L^{1/4}$. Тогда используя рассуждения приведенные в §6 [3] будем иметь:

при k - нечетном

$$J = J_1 + \frac{\rho(\tilde{r}, \tilde{\chi}^*, \tilde{\chi}^*, n)}{\rho(\tilde{r}, n)} J_4 \geq J_1 - J_4 > J_1(1 - Z^{\tilde{\beta}-1}),$$

а при k - четном

$$J = J_1 + \frac{\rho(\tilde{r}, \chi_0, \tilde{\chi}^*, n)}{\rho(n, \tilde{r})} J_3 \geq J_1 - J_3 > J_1(1 - Z^{\tilde{\beta}-1}).$$

Поэтому, применяя теорему о среднем и лемму 1.2, убедимся, что

$$\begin{aligned} J &> J_1 \frac{Z - Z^{\tilde{\beta}}}{Z} = J_1 \frac{(1 - \tilde{\beta})Z^{\Theta} \ln Z}{Z} \geq \frac{1}{8} P(1 - \tilde{\beta}) Z^{\tilde{\beta}-1} \ln Z = \\ &= \frac{1}{8} P((1 - \tilde{\beta}) \ln Z) e^{(\tilde{\beta}-1) \ln Z} \geq C_{11} P(1 - \tilde{\beta}) \ln Z, \end{aligned}$$

где $C_{11} = 0, 124$. обозначим

$$C_{12} = \min\left(\frac{1}{8}; 0, 12; 0, 124\right) = 0, 12. \quad (19)$$

Таким образом, из (17) находим

$$R_3(n) > \begin{cases} C_{12} A(n) P(1 - \tilde{\beta}) \ln Z + O(P^{1-3,5\epsilon}), & \text{если } E_{\tilde{\beta}} = 1 \text{ и } (n, \tilde{r}) > \tilde{r}^{\frac{1}{4}}; \\ C_{12} A(n) P + O(P^{1-3,5\epsilon}), & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (20)$$

Согласно лемме 8 [4] $A(n) > 0$ для всех $X/2 < n \leq X$, за исключением $\ll X^{0,88}$ значений n . Следовательно, (20) справедливо для всех $n \leq X$, за исключением $E_k^{(2)}(X) \ll X^{1-34\epsilon}$ значений n из них.

4.2. ОСТАТОК. Теперь рассмотрим $R_4(n)$. Согласно (15) $R_4(n)$ является суммой пяти слагаемых. Нетрудно заметить, что $R_4^{(1)}(n)$ и $R_4^{(2)}(n)$, а также $R_4^{(3)}(n)$ и $R_4^{(4)}(n)$ дает одинаковый вклад в $R_4(n)$. Поэтому ограничимся рассмотрением $R_4^{(1)}(n)$, $R_4^{(3)}(n)$ и $R_4^{(5)}(n)$. Сначала рассмотрим $R_4^{(5)}(n)$, которое является более общим среди рассматриваемых $R_4^{(i)}(n)$.

Имеем

$$\begin{aligned} R_4^{(5)}(n) &= \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{\chi_1, \chi_2 \pmod{q}} \sum_{a=1}^q F_1(\bar{\chi}_1) F_k(\bar{\chi}_2) e\left(-\frac{a}{q}n\right) \int_{-\Delta}^{\Delta} W_1(\chi_1, \eta) W_k(\chi_2, \eta) e(-n\eta) d\eta = \\ &= \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{\chi_1, \chi_2 \pmod{q}} G(q, \bar{\chi}_1, \bar{\chi}_2, n) I_5(\chi_1, \chi_2). \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть χ_s — характер по модулю q индуцированный примитивным характером ξ_s по $\text{mod } r_s$, $s = 1, 2$; $r = [r_1, r_2]$, $g = qr^{-1}$. Тогда $I_5(\chi_1, \chi_2) = I_5(\xi_1, \xi_2)$.

Обозначим

$$W_k(\chi) = \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |W_k(\chi, \eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad W_k = \sum_{r \leq Q\chi \pmod{r}}^* W_k(\chi). \quad (22)$$

Используя пункты 3 и 4, $R_4^{(5)}(n)$ можем представить в виде

$$R_4^{(5)}(n) = \sum_{r \leq Q} \sum_{[r_1, r_2]=r} \sum_{\xi_1}^* \sum_{\xi_2}^* \frac{G(r, \bar{\xi}_1 \chi_0, \bar{\xi}_2 \chi_0, n)}{\varphi^2(r)} I_5(\xi_1, \xi_2) A_r(n, Qr^{-1}). \quad (23)$$

Правую часть этого представления разобьем на две суммы: в первую сумму включаем все r с условием $r \leq Z$, а во вторую сумму все остальные r , т.е. $Z < r \leq Q$. Таким образом,

$$R_4^{(5)}(n) = R_5(n) + R_6(n).$$

Оценим $R_6(n)$.

$$|R_6(n)| \leq \sum_{Z < r \leq Q} \sum_{[r_1, r_2]=r} \sum_{\xi_1}^* \sum_{\xi_2}^* \frac{|G(r, \bar{\xi}_1 \chi_0, \bar{\xi}_2 \chi_0, n)|}{\varphi^2(r) \pi_r(n)} W_1(\xi_1) (W_k \xi_2) \pi_r(n) |A_r(n, Q/r)|.$$

Отсюда в силу оценки (21), используя лемму 6 [2], получим

$$|R_6(n)| \leq lL^k \sum_{Z < r \leq Q} \frac{(n, r)}{r^{0,33}} \sum_{[r_1, r_2]=r} \sum_{\xi_1}^* W_1(\xi_1) \sum_{\xi_2}^* W_k(\xi_2).$$

Обозначая правую часть этого соотношения через $Z(n)$, изучим среднее значение оценки $Z(n)$. Используя лемму 3 [2] и оценки

$$\sum_{n \leq X} (n, r) < X\tau(r)$$

имеем

$$\sum_{n \leq X} Z(n) \ll XW_1W_kZ^{-0,3} \ll \frac{X}{Z^{0,3}} X^{\frac{1}{2}} \frac{P}{X^{\frac{1}{2}}} \ll XPZ^{-0,3}.$$

Отметим, что здесь мы использовали лемму 4 [5] для оценки W_1 и W_k . Возможность применения этой леммы для оценки W_k будет показано в конце этого пункта.

Из полученной оценки следует, что для всех $n \leq X$, за исключением

$$E_k^{(3)}(X) \ll X^{1-1,53\varepsilon+1,7\frac{\varepsilon}{k}}$$

значений n , имеет место неравенство

$$Z(n) \leq P^{1-1,7\varepsilon}; \quad R_6(n) \ll P^{1-1,7\varepsilon}.$$

К каждому слагаемому суммы $R_5(n)$, в силу условий $r \leq Z$ и $Q^{0,7} \leq Qr^{-1}$, применимы леммы 6 и 7 [9]. Поэтому, если из множества $n \leq X$, исключить

$$E_k^{(4)}(X) \ll X^{1-1,7\varepsilon}$$

чисел, то для оставшихся n будет иметь место оценка

$$|R_5(n)| \leq A(n)W_1W_k + O(PQ^{-0,1}).$$

Таким образом,

$$R_4^{(5)}(n) \leq A(n)W_1W_k + O(PQ^{1-1,7\varepsilon}).$$

для всех $\frac{X}{2} < n \leq X$, за исключением

$$E_k^{(3)}(X) + E_k^{(4)}(X) \ll E_k^{(3)}(X)$$

значений n .

Теперь рассмотрим $R_4^{(1)}(n)$. Имеем

$$R_4^{(1)}(n) = \sum_{q \leq Q} \sum_{\chi(\bmod q)} \varphi^{-2}(q) G(q, \chi_0, \bar{\chi}, n) I_1(\chi)$$

(ср. (21)). Поэтому в этом случае, вместо (23) получим

$$R_4^{(1)}(n) = \sum_{r \leq Q} \sum_{\xi(\bmod r)} \varphi^2(r) G(q, \chi_0, \bar{\xi}, n) I_1(\xi) A_r(n, Q/r).$$

Далее, оценивая так же, как в случае $R_4^{(5)}(n)$ и учитывая

$$|I_1(\chi)| \leq W_k(X) \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |T_1(\eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \leq 3W_k(X) X^{\frac{1}{2}},$$

находим

$$R_4^{(1)}(n) < 3A(n)W_k(X)^{\frac{1}{2}} + O(P^{1-1,7\varepsilon}).$$

Так как

$$|I_3(\chi)| \leq W_1(X) \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\tilde{\Gamma}_k(\eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} < 3P(X)^{-\frac{1}{2}} W_1(X),$$

то, поступая с $R_4^{(3)}(n)$, совершенно аналогично, получим

$$|R_4^{(3)}(n)| < 3A(n)PX^{-\frac{1}{2}}W_1 + O(P^{1-1,7\varepsilon}).$$

Таким образом, собирая полученные оценки для $R_1(n)$ из (15), находим

$$R_1(n) < A(n) \left(6W_k X^{\frac{1}{2}} + 6W_1 X^{\frac{-1}{2}} + W_1 W_k \right) + O(P^{1-1,7\epsilon}). \quad (24)$$

Суммы W_1, W_k в правой части (24) оценим при помощи лемм 3 и 4 [5].

Для W_k в силу (22) и (11), (12) имеем

$$W_k = \sum_{r \leq Q\chi(\text{mod } r)} \sum^* \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} \left| k \sum_{\substack{\frac{X}{3} < p^k \leq X}}^{\#} \chi(p) \ln p e(p^k \eta) \right|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применим лемму 3 [3] при $\delta = \frac{1}{2\Delta}$ и $\Theta = \frac{1}{2}$, получим

$$W_k = \pi \sum_{r \leq Q\chi(\text{mod } r)} \sum^* \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| 2\Delta k \sum_{\substack{x < p^k \leq x + \frac{1}{2}\Delta \\ \frac{X}{3} < p^k \leq X}}^{\#} \chi(p) \ln p \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (25).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} W_1 &= \pi \sum_{r \leq Q\chi(\text{mod } r)} \sum^* \left(\int_{\frac{X}{3}}^{X + \frac{1}{2}\Delta} \left| \Delta \sum_{\substack{x < p \leq x+h \\ \frac{X}{3} < p^k \leq X}}^{\#} \chi(p) \ln p \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2,5671\pi X^{\frac{1}{2}} \sum_{r \leq Q\chi(\text{mod } r)} \sum^* \left(\max_{x \leq \frac{3}{2}X} \max_{h \leq \frac{X}{2}} \left(h + \frac{X}{Q} \right)^{-1} \left| \sum_x^{x+h} \chi(p) \ln p \right| \right). \end{aligned}$$

Применение леммы 4 [7] дает ($17\epsilon < k$)

$$W_1 = X^{\frac{1}{2}} \begin{cases} C_{13} \exp(-\frac{C_5}{17\epsilon}), & \text{если } E_{\tilde{\beta}} = 0; \\ \tilde{C}_{13} \exp(-\frac{C_5}{17\epsilon}) (1 - \tilde{\beta}) \ln Z, & \text{если } E_{\tilde{\beta}} = 1, \end{cases} \quad (26)$$

где $C_{13} = 5,1392$, $\tilde{C}_{13} = 2791,157$.

При $k > 1$ учитывая, что при $1 < \Theta_1 < 2$

$$\left(x + \frac{1}{2\Delta} \right)^{\frac{1}{k}} = x^{\frac{1}{k}} \left(1 + \frac{\Theta_1}{2k\Delta x} \right) \leq x^{\frac{1}{k}} \left(1 + \frac{1}{k\Delta x} \right) = x^{\frac{1}{k}} + \frac{x^{\frac{1}{k}}}{k\Delta x}$$

и обозначая $y = x^{\frac{1}{k}}$ и $h_1 = \frac{x^{\frac{1}{k}}}{k\Delta x}$, из (25) находим

$$\begin{aligned} W_k &\leq k\pi \sum_{r \leq Q\chi(\text{mod } r)} \sum^* \left(\int_{X/3}^{X + \frac{1}{2\Delta}} \left| \Delta \sum_{x < p^k \leq x + \frac{1}{2\Delta}}^{\#} \chi(p) \ln p \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq 2,5671kX^{1/2} \sum_{r \leq Q\chi(\text{mod } r)} \sum^* \max_{y \leq \frac{3}{2}P} \max_{h_1 \leq \frac{1}{2}P} \left| \frac{P}{Xh_1} \sum_y^{y+h_1} \chi(p) \ln p \right|. \end{aligned}$$

Теперь применяем лемму 4 [5], при $P = Q$, $X = P$, тогда

$$W_k = \frac{P}{X^{\frac{1}{2}}} \begin{cases} C'_{13} \exp\left(-\frac{C_5}{17k\varepsilon}\right), & \text{если } E_{\tilde{\beta}} = 0; \\ \tilde{C}'_{13} \exp\left(-\frac{C_7}{17k\varepsilon}\right) (1 - \tilde{\beta}) \ln Z, & \text{если } E_{\tilde{\beta}} = 1, \end{cases} \quad (27)$$

где $C_{13} = C_{13}k$, $\tilde{C}_{13} = \tilde{C}_{13}k$ и $17\varepsilon k < \kappa$.

В силу (26) и (27) из (24) получим, если $E_{\tilde{\beta}} = 0$

$$R_4(n) < C_{14}A(n)P \exp\left(-\frac{C_5}{17k\varepsilon}\right) + O(P^{1-1,7\varepsilon}), \quad (28)$$

где $C_{14} = 135,75318$ при $k = 2$, $C_{14} = 178,87091$ при $k = 3$ и $C_{14} = 48,91k + 25,0196$ при $k \geq 4$. Если $E_{\tilde{\beta}} = 1$, то

$$R_1(n) < \tilde{C}_{14}A(n)P \exp\left(-\frac{C_7}{17k\varepsilon}\right) (1 - \tilde{\beta}) \ln Z + O(P^{1-1,7\varepsilon}), \quad (29)$$

где

$$\tilde{C}_{14} = e^{9,726}(ke^{0,191} + 1) = e^{9,726}(1,2105k + 1), \quad k \geq 2.$$

3. Заключение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ.

У нас $17\varepsilon < \kappa k^{-1} = \frac{1,01}{115k}$ или $\varepsilon \leq \frac{1,01}{1955k}$. Если $E_{\tilde{\beta}} = 0$, то для почти всех $n \leq X$ (за исключением $\ll E_k^1(X)$ значения) согласно (15), (20) и (28), имеем

$$\begin{aligned} R_1(n) &> A(n)P \left\{ \left(c_{12} - c_{14} \exp\left(-\frac{C_5}{17k\varepsilon}\right) \right) + O\left(P^{-3,5\varepsilon}L^k + L^kP^{-1,7\varepsilon} + P^{51k\varepsilon-1}L^k\right) \right. \\ &\quad \left. \right\} \geq 0,01A(n)P > PL^{-k} > P^{1-\varepsilon}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\varepsilon \leq \varepsilon_2 = \frac{c_5}{17k \ln \left(\frac{10c_{14}}{9c_{12}} \right)}. \quad (31)$$

$$17\varepsilon_2 = (1045,5876k(\ln k + 6,5452))^{-1}, \quad k \geq 2;$$

Если $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и $(n, \tilde{r}) \leq \tilde{r}^{0,3}$, то в силу (15), (20), (29) для почти всех $n \leq X$, $\frac{X}{2} < n \leq X$ (за исключением $\ll E_k^{(1)}(X)$ значений n) снова имеем (30) с

$$\varepsilon \leq \varepsilon_3 = \frac{C_7}{17k \ln \left(\frac{10c_{15}}{9c_{12}} \right)} \quad (32)$$

если $C_{15} = C_1\tilde{C}_{14}$;

$$17\varepsilon_3 = (137,67088k(\ln k + 6,75183))^{-1}, \quad \text{при } k \geq 2.$$

Пусть теперь $E_{\tilde{\beta}} = 1$ и $(n, \tilde{r}) > \tilde{r}^{0,3}$, тогда исключаем те n , для которых $\tilde{r} > P^{2\varepsilon}$. Количество исключаемых n , $\frac{X}{2} < n \leq X$, в этом случае есть

$$E_k^{(4)}(X) \ll \sum_{n \leq X} (n, \tilde{r}) \tilde{r}^{-0,3} < X \frac{\tau(n)\tau(\tilde{r})}{(\tilde{r}^{0,3})} \leq XP^{-0,5\varepsilon}.$$

Для оставшихся n , модуль $\tilde{r}$, будет малым, т.е. $\tilde{r} \leq P^{2\varepsilon} < Z$.
Следовательно,

$$R_1(n) \geq 0, 1C_{12} \frac{P}{A}(n)(1 - \tilde{\beta}) \ln Z + O(P^{1-1,7\varepsilon}),$$

для всех n , $\frac{X}{2} < n \leq X$, (за исключением $E_k(X) \ll X^\gamma$ значений n , $n \leq X$), где

$$\varepsilon \leq \varepsilon_4 = C_7/17k \ln \left(\frac{10\tilde{c}_{14}}{9c_{12}} \right) \quad (33)$$

$$17\varepsilon_4 = (137,67088k(\ln k + 13,181599))^{-1}, \quad \text{при } k \geq 2.$$

В силу леммы 2 [5]

$$(1 - \tilde{\beta}) \ln Z > C_2(4\varepsilon P^\varepsilon \ln^2 P)^{-1}.$$

Поэтому

$$R_1(n) \geq C_{16} P^{1-\varepsilon} A(n) L^{-2} + O(P^{1-1,7\varepsilon}) > C_{17} P^{1-\varepsilon} L^{-k-2} + O(P^{1-1,7\varepsilon}) > C_{18} P^{1-1,5\varepsilon} > P^{1-1,6\varepsilon} \quad (34)$$

для всех $n \leq X$, за исключением $E_k(X) \ll X^{1-\varepsilon/k}$ значений n , из них. Положим $\varepsilon = \min(\frac{\kappa}{17k}; \varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3)$ тогда в силу (31), (32), (33) получим $\varepsilon = \varepsilon_2$. Теперь из (30), (34), (8) получим утверждение сформулированной теоремы. Отметим, что $\frac{\rho_0}{4} < \varepsilon_2$ при $k > 205$, а также $((137k^3 \ln k)^{-1} < \frac{\rho_0}{4} < \varepsilon_2$ при $\ln k > 628$, то есть если $2 \leq k \leq 205$, то $\gamma = 1 - \frac{\varepsilon_2}{k}$, если же $k > 205$, то $\gamma = 1 - \frac{\rho_0}{4}$ и в частности если $k > e^{628}$, то можно положить $\gamma = 1 - \frac{1}{137k^3 \ln k}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аллаков И. О представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии // Известия ВУЗов. "Математика". Казань, 2000. № 8(459). С. 3–15.
2. Аллаков И. Сонлар назариясининг баъзи бир аддитив масалаларини аналитик усуллар билан ечиш: Монография. Т.: "Таълим 2012. 200 с.
3. Аллаков И. Об одной бинарной аддитивной задаче с простыми числами из арифметической прогрессии // Докл. АН РУз. 1991. № 7. С. 9.
4. Аллаков И. О числах, представимых в виде суммы простого и фиксированной степени простого числа // Алгебра и её приложения: Тезисы докладов международной конф. 5–9 августа 2002. Красноярск, 2002. С. 3–4.
5. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об одной тернарной задаче с простыми числами // Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения: Тез. докл. V междунар. конф. 19–20 мая 2003. Тула, 2003. С. 18–19.
6. Виноградов А. И. О бинарной проблеме Харди-Литтлвуда // Acta arithm. Варшава, 1985. V. 46. Р. 33–56.
7. Жукова А. А. Проблема Харди-Литтлвуда // Изв. Вузов. Математика. 2000. 2(453). С. 41–49.
8. Плаксин В. А. Исключительное множество суммы простого и фиксированной степени простого числа. Петрозаводск, 1984. 33 с. Деп. в ВИНТИ, 23.10.84. № 7010-84.
9. Плаксин В. А. Об одном вопросе Хуа-Ло-Кена // Мат. заметки. 1990. № 3(47). С. 78–90.

10. Чубариков В. Н. Многомерные проблемы теории простых чисел // Чебышевский сборник, том 12. Вып. 4(2011). С. 176–256.
11. Davenport. H. Multiplicative Number Theory, Third edition, Graduate Texts in Math. 71, 2000. New York: Springer-Verlag. 178 p.
12. Jorg Brudern. Representations of natural numbers as the sum of a prime and a k-th power. //Tsukuba Journal of Mathematics. Vol. 32, No. 2 (December 2008), pp. 349–360.
13. Montgomery H. L., Vaughan R. C. The exceptional set in Goldbach's problem // Acta arithm. 1975. V. 27. P. 353–370.
14. Montgomery H. L. and Vaughan R. C. Multiplicative number theory. I. Classical theory. Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York. 2006. 552 p.
15. Vaughan R. C. The Hardi-Littlewood method. // Cambridge University Press, New York. 1997. 233 p.
16. Vinogradov A. I. The method of trigonometrical Sums in the Theory of Numbers. Moscow: Nauka, 1980. 144 p.

REFERENCES

1. Аллаков И. О представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии // Известия ВУЗов. "Математика". Казань, 2000. № 8(459). С. 3–15.
2. Аллаков И. Сонлар назариясининг баъзи бир аддитив масалаларини аналитик усуллар билан ечиш. Монография. Т.: "Таълим 2012", 200 с.
3. Аллаков И. Об одной бинарной аддитивной задаче с простыми числами из арифметической прогрессии // Докл. АН РУз. 1991. № 7. С. 9.
4. Аллаков И. О числах, представимых в виде суммы простого и фиксированной степени простого числа // Алгебра и её приложения: Тезисы докладов междунар. конф. 5-9 августа 2002. Красноярск, 2002. С. 3–4.
5. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об одной тернарной задаче с простыми числами // Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения: Тез. докл. V междунар. конф. 19–20 мая 2003. Тула, 2003. С. 18–19.
6. Виноградов А. И. О бинарной проблеме Харди-Литтлвуда // Acta arithm. Варшава, 1985. V. 46. P. 33–56.
7. Жукова А. А. Проблема Харди-Литтлвуда // Изв. Вузов. Математика. 2000. 2(453). С. 41–49.
8. Плаксин В. А. Исключительное множество суммы простого и фиксированной степени простого числа. Петрозаводск, 1984, 33 с. Деп. в ВИНТИ, 23.10.84. № 7010-84.
9. Плаксин В. А. Об одном вопросе Хуа-Ло-Кена // Мат. заметки. 1990. № 3(47). С. 78–90.
10. Чубариков В. Н. Многомерные проблемы теории простых чисел // Чебышевский сборник, том 12. Вып. 4(2011). С. 176–256.

11. Davenport. H. Multiplicative Number Theory, Third edition, Graduate Texts in Math. 71, 2000. New York: Sringer-Verlag. 178 p.
12. Jorg Brudern. Representations of natural numbers as the sum of a prime and a k-th power // Tsukuba Journal of Mathematics. Vol. 32, No. 2 (December 2008), pp. 349–360.
13. Montgomery H. L., Vaughan R. C. The exceptional set in Goldbach' s problem // Acta arithm. 1975. V. 27. P. 353–370.
14. Montgomery H. L. and Vaughan R. C. Multiplicative number theory. I. Classical theory. Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York. 2006. 552 p.
15. Vaughan R. C. The Hardi-Littlewood method. // Cambridge University Press, Nev York. 1997. 233 p.
16. Vinogradov A. I. The metod of trigonometrical Sums in the Theory of Numbers. Moskov: Nauka, 1980. 144 p.

Получено 8.10.2019 г.

Принято в печать 20.12.2019 г.