ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 4.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-6-31

О жизни и научной деятельности академика Зарулло Хусеновича Рахмонова

В. Н. Чубариков

Чубариков Владимир Николаевич —доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Аннотация

Статья посвящена доктору физико-математических наук, академику Академии наук Республики Таджикистан, выдающемуся специалисту в области теории чисел Зарулло Хусеновичу Рахмонову в связи с его 60–летием. Приводится краткая биография, основные этапы его научной карьеры. Дан обзор результатов З. Х. Рахмонова по следующим проблемам теории чисел: о распределении чисел Гольдбаха и чисел Харди-Литтлвуда в коротких арифметических прогрессиях, по проблеме средних значений функции Чебышева и проблеме нулей дзета-функции Римана, лежащих в коротких прямоугольниках критической полосы, по оценкам коротких тригонометрических сумм с простыми числами и проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми, по проблеме Сельберга, касающейся нулей дзета-функции Римана, лежащих на коротких промежутках критической прямой.

В заключение представлен список основных научных публикаций З. Х. Рахмонова

Ключевые слова: Зарулло Хусенович Рахмонов, Институт математика им. А.Джураева, короткие арифметические суммы, дзета-функция Римана.

Библиография: 91 названий.

Для цитирования:
В. Н. Чубариков. О жизни и научной деятельности академика Зарулло Хусеновича Рахмонова // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 4, с. 6–31.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 4.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-4-6-31

About the life and activities of academician Zarullo Husenovich Rakhmonov

V. N. Chubarikov

Chubarikov Vladimir Nikolaevich —doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, president of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscov).
e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

The article is devoted to the doctor of physico-mathematical Sciences, academician of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, one of the foremost experts in the field of number theory, Zarullo Husenovich Rakhmonov in connection with his 60–year anniversary. Provides a brief biography, the main stages of development of his scientific career. We give the review of results of Z. H. Rakhmonov on following problems: on the distribution of the Goldbach's and Hardy–Littlewood's numbers in short arithmetical progressions, on the problem of mean values of the Chebyshev's function and the problem of the Riemann zeta-function zeros belonging to short rectangular in the critical strip, to estimations short trigonometric sums over primes and on the Goldbach's problem with almost equals summands, on the Selberg's problem concerning to the Riemann's zeta-function zeros lying on short intevals of the critical line. In conclusion, the author presents a list of main scientific publications Z. H. Rakhmonov

Keywords: Zarullo Husenovich Rakhmonov, Institute of mathematics im. A. Juraev, a short amount, dzeta-function of Riemann.

Bibliography: 91 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, 2019, "On several problems of the analytic number theory (to the sixtieth years of the birthday of the Academic AS RT of Zarullo Husenovich Rakhmonov) " , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 4, pp. 6–31.

1. Краткая биография

Талантливый математик и замечательный широко образованный человек, Зарулло Хусенович Рахмонов является ярким представителем таджикской школы теории чисел. Зарулло Хусенович Рахмонов — ученики выдающихся математиков в области теории чисел, профессоров А.А. Карацубы и В.Н. Чубарикова.

З.Х. Рахмонов родился 10 декабря 1958 года в Ганчинском районе Согдийской области Таджикской ССР. В 1976 году он закончил среднюю школу и поступил в Таджикский национальный университет, в 1979 году продолжил учебу на механико-математическом факультете Московского Государственного университета им. М.В. Ломоносова, став учеником В.Н. Чубарикова. Курсовые работы З.Х. Рахмонова были посвящены теореме Г.Ф. Вороного о числе целых точек под гиперболой (3-курс), вывод асимптотических формул среднего значения степеней функции $\tau_k(n)$ (число представлений натурального число n в виде произведений натуральных сомножителей) с помощью их производящих функций (4-курс), дипломная работа посвящена выводу асимптотической формулы для количества чисел, являющихся суммой двух квадратов простых чисел в интервалах малой длины.

В 1982 году после окончания университета по рекомендации Ученого совета механико-математического факультета МГУ З.Х. Рахмонов поступил в аспирантуру отделения математики механико-математического факультета Московском Государственном университета им. М.В. Ломоносова по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел, и в 1986 году под руководством А.А. Карацубы и В.Н. Чубарикова защитил кандидатскую диссертацию на тему «Распределение значений характеров Дирихле» в Диссертационном Совете Д.053.05.05 при МГУ им. М.В. Ломоносова.

Возвратившись в Таджикистан, З.Х.Рахмонов в 1986 году начал трудовую деятельность как ассистент на кафедре алгебры и теории чисел Таджикского национального университета, а в 1987 году был избран старшим преподавателем и в 1991 году – доцентом этой кафедры.

С января 1992 года по декабрь 1994 года З.Х.Рахмонов проходил докторантуру и 4 октября 1996 году на Диссертационном Совете Д.053.05.05 при МГУ им. М.В. Ломоносова защитил

докторскую диссертацию на тему «Простые числа и средние значения функции Чебышева», по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

В 1996 году Рахмонов З.Х. избран заведующим кафедрой алгебры и теории чисел Таджикского Национального университета. С 1999 года до настоящего времени является директором Института математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан.

В 2000 году он избран членом-корреспондентом Академии наук Республики Таджикистан. В 2012 году Рахмонову З.Х. присвоено ученое звание профессора по специальности ««Математическая логика, алгебра и теория чисел». В 2017 году Рахмонов З.Х. избран академиком Академии наук Республики Таджикистан. В 2011 году Правительством Республики Таджикистан ему была присуждена медаль «*20 лет независимости Республики Таджикистан*».

Женат, имеет трех детей. Жена – Саломова Мохира Бободжоновна, преподаватель кафедры медицинской подготовки Таджикского национального университета. Сыновья: Фируз, Парвиз, Фирдавс, выпускники механико-математического факультета Московского Государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Зарулло Хусенович Рахмонов является прекрасным человеком, и ему присуща отзывчивость к людским проблемам. Более 20 лет З.Х. Рахмонов занимает должность директора Института математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан. В труднейших условиях конца 90-их ему удалось сохранить научный потенциал Института и организовать подготовку молодых математиков через аспирантуру. Руководимый им Институт по всем наукометрическим показателям занимает ведущее место среди научно-исследовательских учреждений АН РТ. Двери его кабинета всегда открыты для любого сотрудника института, любого, кто нуждается в его совете и помощи. В коллективе любят, уважают своего руководителя и стараются ответить на доброжелательность и постоянную поддержку отличными результатами работы.

З.Х. Рахмонов является крупным специалистом в области аналитической теории чисел. Полученные им результаты являются выдающимися, и они обобщают многие результаты знаменитых учёных. Кроме того, З.Х.Рахмонов – прекрасный специалист по алгебре, математическому анализу и теории функции комплексного переменного. Он преподает студентам эти дисциплины, читает спецкурсы по аналитической и алгебраической теории чисел. Академик З.Х. Рахмонов является главой таджикской научной школы по аналитической теории чисел. Он продолжает и успешно развивает научные традиции, заложенные известными таджикскими математиками, специалистами по теории чисел Г. Бабаевым, Д. Исмоиловым и Н. Гафуровым. Под его руководством были подготовлены и успешно защищены 17 кандидатских диссертаций. Отметим, что его заслуга при подготовке кадров в Республике Таджикистан очень велика. Его ученики работают в разных ВУЗах республики. В институте математики им. А.Джураева АН РТ функционирует Диссертационный совет по двум специальностям, З.Х. Рахмонов является председателем этого Диссертационного Совета. З.Х. Рахмонов уделяет особое внимание расширению научных связей с ведущими научными центрами за рубежом.

2. Научные достижения академика З.Х. Рахмонова

Работы З.Х. Рахмонова представляют собой систематическое исследование по теории периодических арифметических функций, на основе тонких комбинаторных теоретико-числовых и теоретико-функциональных методов и идей, развитых в последние годы как самим З.Х. Рахмоновым, так и другими известными математиками.

Уже первые работы З.Х. Рахмонова явились существенным вкладом в решение проблемы Ю.В. Линника о наименьшем гольдбаховом числе в арифметической прогрессии. В них он искусно применил известный метод тригонометрических сумм И.М.Виноградова, что позволило обобщить теорему И.М. Виноградова о нетривиальной оценке сумм значений характеров

Дирихле по простому модулю от последовательности сдвинутых простых чисел на случай, когда модуль характера есть произвольное натуральное число, и существенно продвинуться в уточнении результатов известного финского математика М. Ютилы.

Профессор А.А. Карацуба охарактеризовал научные достижения академика З.Х. Рахмонова: *Рахмонов З.Х. является крупным специалистом в области аналитической теории чисел. Ему принадлежат выдающиеся результаты о распределении чисел Гольдбаха и чисел Харди-Литтлвуда в коротких арифметических прогрессиях, в проблеме средних значений функции Чебышева и проблеме нулей дзета-функции Римана, лежащих в коротких прямоугольниках критической полосы, в оценках коротких тригонометрических сумм с простыми числами и проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми. В последние годы Рахмонов З.Х. получил рекордный результат в проблеме Сельберга, касающейся нулей дзета-функции Римана, лежащих на коротких промежутках критической прямой. Рахмонов З.Х. является также первоклассным специалистом в алгебре, анализе, топологии, теории функций комплексного переменного.*

Остановимся боле подробно на научных исследованиях академика З.Х.Рахмонова.

2.1. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел и их приложения

Метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М. Виноградова позволил ему решить ряд арифметических проблем с простыми числами. Одна из них касается распределения значений неглавного характера на последовательностях сдвинутых простых чисел. В 1943 г. он [1, 3, 4] доказал: *если q — простое нечётное, $(l,q)=1$, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, тогда*

$$|T_1(\chi)| \ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{x}}+x^{-\frac{1}{6}}\right). \tag{1}$$

При $x \gg q^{1+\varepsilon}$ эта оценка нетривиальна, и из неё следует *асимптотическая формула для числа квадратичных вычетов (невычетов)* $\bmod q$ *вида* $p-l$, $p \leqslant x$.

Гольдбаховым числом называют число, представимое в виде суммы двух нечетных простых чисел. Задача о распределении таких чисел в “коротких” арифметических прогрессиях возникла при попытке решить бинарную проблему Гольдбаха. Первый результат условного характера здесь принадлежит Ю.В.Линнику [5]. В предположении расширенной гипотезы Римана он показал, что имеет место неравенство

$$G(D,l) \le D\ln^6 D,$$

где $G(D,l)$ – наименьшее Гольдбахово число в арифметической прогрессии

$$Dk+l, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

Этот результат был уточнен К.Прахаром [6, 7] и Ю.Вангом [8]. Они при тех же предложениях доказали, что

$$G(D,l) \le D(\ln D)^{3+\varepsilon}.$$

М.Ютила [9] в 1968 г. доказал безусловную теорему. Воспользовавшись оценкой (1), он показал, что если D – нечетное простое число, то

$$G(D,l) \ll D^{\frac{11}{8}+\varepsilon}.$$

В дальнейшем И.М. Виноградов получил нетривиальную оценку $T_1(\chi)$ при $x \geqslant q^{0,75+\varepsilon}$, где q — простое число [10, 11, 12]. Этот результат был неожиданным. Дело в том, что $T_1(\chi)$

можно записать в виде суммы по нулям соответствующей L — функции Дирихле. Тогда, в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана для $T_1(\chi)$, можно получить нетривиальную оценку, но только при $x \geqslant q^{1+\varepsilon}$.

Казалось, что получилось то, чего не может быть. Ю.В. Линник [13] в 1971 г. писал по этому поводу: *«Весьма важны исследования И.М. Виноградова в области асимптотики характеров Дирихле. Уже в 1952 г. была получена оценка суммы характеров Дирихле от сдвинутых простых чисел $T_1(\chi)$, которая давала степенное понижение по сравнению с x уже при $x > q^{0,75+\varepsilon}$. Эта оценка имеет принципиальное значение, так как по глубине превосходит то, что дает непосредственное применение расширений гипотезы Римана, и, по-видимому, в этом направлении является истиной более глубокой, чем указанная гипотеза (если гипотеза верна). Недавно эту оценку удалось улучшить А.А. Карацубе.»*

А.А. Карацуба в 1968 году разработал метод, который позволил ему получить нетривиальную оценку коротких сумм характеров в конечных полях фиксированной степени [14, 15, 16]. В 1970 году с помощью развития этого метода в соединении с методом И.М. Виноградова он доказал следующее утверждение [14, 17, 18]: *если q — простое, $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q, $x \geqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, тогда*

$$T_1(\chi) \ll xq^{-\frac{1}{1024}\varepsilon^2}. \tag{2}$$

А.А. Карацуба применил эти оценки для нахождения асимптотических формул для количества квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ и количества произведений простых и сдвинутых простых чисел вида $p(p'+k)$ в арифметической прогрессии с растущей разностью [19], (см. также [14, 20, 21, 22, 23, 24]).

З.Х. Рахмонов обобщил оценку (1) на случай составного модуля и доказал следующее утверждение [25, 26, 27].

Теорема 1. *Пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер, порождённый характером χ, q_1 — произведение простых чисел, делящих D, но не делящих число q, тогда*

$$T_1(\chi) \leqslant x \ln^5 x \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}\tau^2(q_1)} + x^{-\frac{1}{6}}\tau(q_1) \right) \tau(q).$$

Применяя эту оценку, он [25, 28] также доказал, что справедлива

Теорема 2. *Для достаточно большого нечетного натурального числа D имеет место оценка*

$$G(D, I) \ll D^{c+\varepsilon},$$

где ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число, c — нижняя грань чисел a таких, что для некоторой постоянной $A > 2$,

$$\sum_{\chi \bmod D} N(\alpha, T, \chi) \ll (DT)^{2a(1-\alpha)} (\ln DT)^A .$$

Из “плотностной” теоремы Хаксли[29] следует, что при $A = 14$ в последней формуле $c \leqslant \frac{6}{5}$.

В 2010 году Дж.Б. Фридландер, К. Гонг, И.Е. Шпарлинский для составного q показали, что нетривиальная оценка суммы $T_1(\chi_q)$ существует, когда x – длина суммы – по порядку меньше q [30]. Они доказали следующее: *для примитивного характера χ_q и всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех $x \geqslant q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ имеет место оценка*

$$T_1(\chi_q) \ll xq^{-\delta}. \tag{3}$$

В 2013 г. З.Х. Рахмонов [31, 32, 33] получил более сильный результат. Он доказал следующее:

Теорема 3. *Если q – достаточно большое натуральное число, χ_q – примитивный характер по модулю q, $(l,q)=1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число, $x \geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, тогда*

$$T_1(\chi_q) \ll x \exp\left(-\sqrt{\ln q}\right).$$

Как уже выше было отмечено, нетривиальные оценки суммы $T_1(\chi)$, χ – неглавный характер по модулю D, D – простое число, были приложены в задачах о наименьшей гольдбаховых числах и о распределении произведений простых и сдвинутых простых чисел в коротких арифметических прогрессиях. При решении этих задач для составного модуля D, наряду с нетривиальными оценками суммы $T_1(\chi)$, для примитивных характеров, нужны такие же оценки и для производных характеров. З.Х. Рахмонов, рассматривая задачу о нетривиальной оценке суммы $T_1(\chi)$, χ – неглавный характер по составному модулю D, доказал в 2017 году следующие теоремы.

Теорема 4. [34, 35]. *Пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, χ_q – примитивный характер по модулю q, порожденный характером χ, q – свободное от кубов, $(l,D)=1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число, тогда при $x \geqslant D^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ имеем*

$$T_1(\chi) \ll x \exp\left(-0,6\sqrt{\ln D}\right).$$

Теорема 5. [36]. *Пусть D – достаточно большое натуральное число, χ — неглавный характер по модулю D, $(l,D)=1$, ε – положительное, сколь угодно малое постоянное число. Тогда при $x \geqslant D^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, имеем*

$$T(\chi) = \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\chi(n-l) \ll x \exp\left(-0,6\sqrt{\ln D}\right),$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от ε.

2.2. Средние значения функций Чебышева и их приложения

Для характера Дирихле χ по модулю q, $q>1$ обычная функция Чебышева и функции Чебышева с линейным экспоненциальным весом определяются следующими равенствами:

$$\psi(y,\chi) = \sum_{n \leqslant y} \Lambda(n)\chi(n), \qquad \psi(y,\chi,\lambda) = \sum_{n \leqslant y} \Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n),$$

где $\Lambda(n)$ — функция Монгольдта. Известно, что в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана, имеют место оценки

$$t(x;q) = \sum_{\substack{n \bmod q \\ \chi}} |\psi(x,\chi)| \ll x + x^{1/2} q \mathscr{L}_q^2, \tag{4}$$

$$T(x;Q) = \sum_{q \leqslant Q} \sum_{\chi}{}^{*} |\psi(x,\chi)| \ll Q x^{1/2} \mathscr{L}^2, \tag{5}$$

где $\sum^{*}_{\chi}$ — означает, что суммирование ведется по всем примитивным характерам Дирихле по модулю q, $\mathscr{L}_q = \ln xq$, $\mathscr{L}_Q = \ln xQ$, $\varphi(q)$ — функция Эйлера. При решении ряда задач теории простых достаточно, чтобы для $t(x;q)$ и $T(x;Q)$ имелись оценки близкие к оценкам (4) и (5).

Г.Монтгомери [37], пользуясь своей плотностей теоремой, показал, что

$$\begin{aligned} t(x;q) &\ll (x + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}}q)\mathscr{L}_q^{16}, \\ T(x;Q) &\ll (xQ^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}Q^2)\mathscr{L}_Q^{11}. \end{aligned} \tag{6}$$

Этот результат уточнил Р.Вон [38]. Он с помощью специального представления логарифмической производной L-функции доказал, что

$$\begin{aligned} t(x;q) &\ll x\mathscr{L}_q^3 + x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{5}{8}}\mathscr{L}_q^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}_q^{\frac{7}{2}}, \\ T(x;Q) &\ll x\mathscr{L}_Q^3 + x^{\frac{3}{4}}Q^{\frac{5}{4}}\mathscr{L}_Q^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}Q^2\mathscr{L}_Q^{\frac{7}{2}}. \end{aligned} \tag{7}$$

В 1989 году З.Х.Рахмонов[39] показал, что

$$t(x;q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}}q^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}q)x^{\delta}. \tag{8}$$

Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [40] доказали, что

$$T(x;Q) \ll (x + x^{\frac{5}{6}}Q + x^{\frac{1}{2}}Q^2)\mathscr{L}_Q^4, \tag{9}$$

Последние две оценки сильнее (6) и слабее (7), но доказательство, в отличие от этих оценок, проводится элементарно и опирается на метод А.А.Карацубы решения мультипликативных тернарных задач [19].

З.Х Рахмонов [16, 42, 43, 44], пользуясь новым аналитическим вариантом метода И.М. Виноградова — оценок тригонометрических сумм с простыми числами, методом работы Н.М. Тимофеева [45], в которой исследуется распределение арифметических функций в коротких интервалах в среднем по прогрессиям, доказал, что справедлива

Теорема 6. *При $x \geqslant 2$, $q \geqslant 1$, $Q \geqslant 1$ имеет место оценка*

$$\begin{aligned} t(x;q) &\ll x\mathscr{L}_q^3 + x^{\frac{4}{5}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_q^{\frac{23}{8}} + x^{\frac{1}{2}}q\mathscr{L}_q^{\frac{7}{2}}, \\ T(x;Q) &\ll x\mathscr{L}_Q^3 + x^{\frac{4}{5}}Q\mathscr{L}_Q^{34} + x^{\frac{1}{2}}Q^2\mathscr{L}_Q^{c}, \end{aligned} \tag{10}$$

где $c = 34$, если $Q \leq \sqrt[3]{x}(\ln x)^{-5/6}$, и $c = 3,5$ в противном случае.

Заметим, что оценки в (10) точнее, чем (7) соответственно при

$$x^{\frac{2}{5}} \ll q \ll x^{\frac{2}{3}}, \qquad x^{\frac{1}{5}} \ll Q \ll x^{\frac{1}{3}},$$

а для остальных q и Q совпадают с точностью до множителя, равного некоторой конечной степени $\mathscr{L}_q$ и $\mathscr{L}_Q$.

В 1937 г. И.М.Виноградов [1] своим элементарным методом оценок сумм с простыми числами доказал, что если

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a,q) = 1,$$

то для линей тригонометрической суммы имеет место оценка

$$S(\alpha,x) = \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)e(\alpha n) \ll \left(xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)x^{\varepsilon}. \tag{11}$$

Впервые сумму $S(\alpha,x)$ аналитическим методом оценил Ю.В.Линник [46]. Г.Монтгомери [37], пользуясь своей оценкой (6), доказал что

$$S\left(\frac{a}{q},x\right) \ll \left(xq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{7}}q^{\frac{3}{14}} + x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}_q^{17}. \tag{12}$$

Р.Вон [38], применяя свои оценки (7) для $t(x;q)$, уточнил результат Г.Монтгомери. Он доказал, что

$$\begin{aligned} S\left(\frac{a}{q},x\right) &\ll \left(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}_q^4, \\ S\left(\alpha,x\right) &\ll \left(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}_q^4. \end{aligned} \tag{13}$$

Он также доказал, что если $1 \leqslant \eta \leqslant x^{\frac{1}{3}}$, $\eta \leqslant q \leqslant x\eta^{-1}$, $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right| \leq \frac{\eta}{xq}$ и $(a,q)=1$, то

$$S\left(\alpha,x\right) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^4. \tag{14}$$

Отметим, что оценки (12) и (13), полученные аналитическим методом, слабее оценки И. М. Виноградова (11). З. Х. Рахмонов из своей оценки (10) для $t(x;q)$, доказательство которой проводится аналитическим методом, для $S(\alpha,x)$ получил оценки И. М. Виноградова, причем множитель x^{ε} в (10), заменяется на некоторую степень логарифма от xq.

Теорема 7. *Пусть* $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$ *и* $(a,q)=1$, *тогда справедливы оценки*

$$\begin{aligned} S\left(\frac{a}{q},x\right) &\ll xq^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^4+x^{\frac{4}{5}}\mathscr{L}_q^{35}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_q^{35}, \\ S\left(\alpha,x\right) &\ll \left(xq^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}_q^{35}. \end{aligned}$$

Следующее следствие этой теоремы является уточнением оценки (14) для больших η.

Следствие 1. *Пусть* $1 \leqslant \eta \leqslant x^{\frac{2}{5}}$, $\eta \leqslant q \leqslant x\eta^{-1}$, $\left|\alpha-\frac{a}{q}\right| \leq \frac{\eta}{xq}$ *и* $(a,q)=1$, *тогда справедлива оценка:*

$$S\left(\alpha,x\right) \ll x\eta^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{35}.$$

Харди и Литтлвуд [47] сформулировали гипотезу о том, что все достаточно большие натуральные числа n разлагаются на сумму простого и степени натурального числа в виде

$$n = p + m^k, \qquad k \geq 2.$$

Такие числа мы назовем числами Харди-Литтлвуда. Г. Бабаев [48] опроверг эту гипотезу, а именно, показал, что существует бесконечное число натуральных чисел, не являющихся числом Харди-Литтлвуда. Отсюда, в частности, следует, что существуют l, $1 \leq l \leq q$, для которых выполняется неравенство

$$H_k(q,l) > q, \qquad k \geq 2,$$

где $H_k(q,l)$ — наименьшее число Харди-Литтлвуда вида $p+m^k$, лежащее в арифметической прогрессии $qt+l$, $t=0,1,2,\ldots$; q – целое. Поэтому, естественно, можно рассматривать следующие две задачи.

1. Оценить сверху величину $H_k(q,l)$ как можно лучше.

2. Получить асимптотический закон распределения чисел Харди - Литтлвуда, лежащих в очень коротких арифметических прогрессиях.

З.Х. Рахмонов [39] в 1987 г., воспользовавшись оценкой (8), исследовал эти две задачи в случае $k=2$; была получена асимптотическая формула для числа решений сравнения

$$p+m^2\equiv l \pmod q, \qquad p\leqslant x, \qquad m\leqslant\sqrt{x}, \qquad q \text{ — простое},$$

при $x\geqslant q^{\frac{3}{2}+\varepsilon}$, откуда, в частности, следует, что

$$H_2(q,l)\ll q^{\frac{3}{2}+\varepsilon}.$$

Далее в 1993 г. он [16, 42], воспользовавшись своей теоремой 6 о средних значениях функции Чебышева уточнил и обобщил его в случае $k\geqslant 2$.

Теорема 8. *Пусть $x\geqslant 2$, q — простое, $1\leqslant l<q$, $(l,q)=1$ и $\mathscr{L}=\ln x$, тогда справедлива асимптотическая формула*

$$H_k(x;q)=\sum_{\substack{n\leq x,\, m^k\leqslant x\\ n+m^k\equiv l \pmod q}}\Lambda(n)=\frac{1}{\varphi(q)}\left(x^{1+\frac{1}{k}}+O\left(x\exp(-c\mathscr{L}^{\frac{1}{2}})+xq^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}^4+x^{\frac{4}{5}}q\mathscr{L}^{35}+x^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}\mathscr{L}^{35}\right)\right).$$

Эта формула становится нетривиальной, если $q\ll x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{-\frac{70}{3}}$ при $k=2$; $q\ll x^{\frac{k+5}{5k}}\mathscr{L}^{-35}$ при $k=3,4,5$ и $q\ll x^{\frac{2}{k}}\mathscr{L}^{-8}$ при $k\geqslant 6$ и для $H_k(q,l)$ — наименьшее число Харди-Литтлвуда вида $p+m^k$, лежащее в арифметической прогрессии с разностью q и начальным членом l, следует следующая оценка сверху:

Следствие 2. *Пусть q — простое и $(l,q)=1$, тогда*

$$H(q,l)\ll\begin{cases} q^{\frac{3}{2}}(\ln q)^{35}, & \text{при } k=2;\\ q^{\frac{5k}{k+5}}(\ln q)^{\frac{175k}{k+5}}, & \text{при } k=3,4,5;\\ q^{k/2}(\ln q)^{4k}, & \text{при } k\geq 6.\end{cases}$$

2.3. Короткие тригонометрические суммы с простыми числами

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-æ,1-æ]$, $æ\tau=1$ представимо в виде

$$\alpha=\frac{a}{q}+\lambda, \quad (a,q)=1, \qquad 1\leqslant q\leqslant\tau, \qquad |\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau}.$$

Через $\mathfrak{M}(P)$ обозначим те числа α, для которых $q\leqslant P$, через $\mathfrak{m}(P)$ обозначим оставшиеся α. $\mathfrak{M}(P)$ и $\mathfrak{m}(P)$ соответственно называются большими и малыми дугами.

Виноградов И.М. [1, 2] первым начал изучать короткие тригонометрические суммы с простыми числами. Для сумм вида

$$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)e(\alpha n^k),$$

при $k=1$, используя свой метод оценок сумм с простыми числами, он доказал нетривиальную оценку в малых дугах $\mathfrak{m}(\exp(c(\ln\ln x)^2))$ при $\tau=x^{\frac{1}{3}}$ и $y>x^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$, основу которой, наряду с «решетом Виноградова», при $k=1$ составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha;x,y,M,N)=\sum_{M<m\leqslant 2M}a_m\sum_{\substack{U<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}}b_n e(\alpha(mn)^k),$$

где a_m и b_n – произвольные вещественные функции, $|a_m| \leqslant \tau^c(m)$, $|b_n| \leqslant \tau^c(n)$, M, N, $U \geqslant N$ – натуральные, $x > x_0$, y – вещественные числа, c – абсолютная постоянная, не всё время одна и та же.

Затем Хейзелгроув С.Б. [49], Статулявычус В. [50], Пан Ч.Д и Пан Ч.Б. [51], Тао Ж. [52] для суммы $S_1(\alpha; x, y)$, $y \geqslant x^\theta$, получив нетривиальную оценку в малых дугах и изучив ее поведение в больших дугах, доказали асимптотическую формулу в тернарной проблеме Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями $|p_i - N/3| \leqslant H$, $H = N^\theta$, соответственно при

$$\theta = \frac{63}{64} + \varepsilon, \qquad \frac{279}{308} + \varepsilon, \qquad \frac{2}{3} + \varepsilon, \qquad \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

Лю Дж. и Тао Ж. [53], изучив сумму $J_2(\alpha; x, y, M, N)$, получили нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha; x, y)$ в малых дугах при $y \geqslant x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$ и доказали теорему, что достаточно большое натуральное число N можно представить в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3^2, \qquad \left|p_j - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad \left|p_3^2 - \frac{N}{3}\right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{\frac{27}{32}+\varepsilon}$$

Воспользовавшись, в частности, этой оценкой, они [54, 55] решили задачу Хуа о представимости достаточно большого натурального числа в виде суммы пяти квадратов почти равных простых чисел и показали, что достаточно большое натуральное число N, $N \equiv 5(mod 24)$ можно представить в виде

$$N = p_1^2 + \ldots + p_5^2, \quad \left|p_j - \sqrt{\frac{N}{5}}\right| \leqslant H, \quad H \geqslant N^{\frac{9}{20}+\varepsilon}.$$

В 1938 г. Хуа [56], рассматривая проблему Варинга – Гольдбаха для кубов, доказал, что все достаточно большие нечетные натуральные числа являются суммой девяти кубов простых чисел. Кумчев А.В. [57] получил нетривиальную оценку суммы $S_k(\alpha; x, y)$ в малых дугах $\mathfrak{m}(P)$ при $y \geqslant x^{\theta+\varepsilon}$, $\theta = 1 - \frac{1}{2k+3}$ и $\tau = x^{1+2\theta}P^{-1}$. Яо Я. [58], воспользовавшись оценкой Кумчева, доказал, что всякое достаточно большое нечетное натуральное число N можно представить в виде

$$p_1^3 + p_2^3 + \ldots + p_9^3 = N, \qquad \left|p_i - \sqrt[3]{\frac{N}{9}}\right| \leqslant N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{51}+\varepsilon}.$$

В 2016 г. З.Х. Рахмонову и Ф.З. Рахмонову [59, 60] удалось получить нетривиальную оценку более коротких сумм $S_3(\alpha; x, y)$ на малых дугах.

Теорема 9. *При $\mathscr{L}^{32(B+20)} \leqslant q \leqslant y^5 x^{-2} \mathscr{L}^{-32(B+20)}$ и $y \geqslant x^{\frac{4}{5}} \mathscr{L}^{8B+151}$, справедлива оценка*

$$S_3(\alpha; x, y) \ll \frac{y}{\mathscr{L}^B},$$

где $\mathscr{L} = \ln xq$, B — абсолютная постоянная.

Примененный в [16, 42, 43, 44] подход в сочетании с работой М. Ютилы [61] о четвёртом моменте L - рядов Дирихле в коротких интервалах критической прямой позволил З.Х. Рахмонову также исследовать средние значения функции Чебышева с линейным экспоненциальным весом:

$$\psi(u, \chi, \lambda) = \sum_{n \leqslant u} \Lambda(n)\chi(n)e(\lambda n),$$

по всем характерам Дирихле данного модуля в коротких интервалах. Он доказал, что справедлива

Теорема 10. *Пусть $x \geqslant x_0$, $x^{\frac{1}{2}} \leqslant y \leqslant x$, $|\lambda| \leq xy^{-2}$, $1 \leqslant q \leqslant xy^{-1}$, $\varepsilon < 10^{-6}$ — любое фиксированное положительное число,*

$$t(x;q,y,\lambda) = \sum_{\chi \bmod q} |\psi(x,\chi,\lambda) - \psi(x-y,\chi,\lambda)|,$$

то справедлива оценка

$$t(x;q,y,\lambda) \ll (y + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}})\mathscr{L}_q^{35} + (qx^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}} |\lambda|^{\frac{1}{3}} q)x^{\varepsilon}.$$

Одним из приложений теоремы 10 является оценка коротких тригонометрических сумм с простыми числами, то есть сумм вида:

$$S_1(\alpha;x,y) = \sum_{x-y<n\leqslant x} \Lambda(n)e(\alpha n), \qquad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \tau.$$

Следствие 3. *Пусть $x \geqslant x_0$, $x^{\frac{1}{2}} \leqslant y \leqslant x$, $|\lambda| \leqslant 1/q\tau \leqslant x/y^2$, $\varepsilon < 10^{-6}$ — любое фиксированное положительное число, тогда справедлива оценка:*

$$S_1(\alpha;x,y) \leqslant \left(yq^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{10}} y^{\frac{1}{2}}\right)\mathscr{L}^{35} + \left(q^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{6}}\right) x^{\varepsilon}.$$

Эта оценка становится нетривиальной при

$$(\ln x)^{70} < q < \tau, \qquad y \geqslant x^{\frac{3}{5}+\varepsilon}.$$

В проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$ И.М. Виноградов [1], воспользовавшись своим методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами, получил намного более точную оценку тригонометрической суммы, чем в общем случае распределения дробных частей $\{\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p\}$. Он доказал, что если K — целое, $K \leqslant N$, α–вещественное,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant N,$$

тогда имеет место оценка

$$V_K(N) = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{p\leqslant N} e(\alpha kp) \right| \ll KN^{1+\varepsilon} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-0,2} \right).$$

З.Х. Рахмонов, Ф.З.Рахмонов и С.Н. Исматов [62, 13] обобщили эту оценку И.М. Виноградова на случай коротких тригонометрических сумм.

Теорема 11. *Пусть K, H, N и q – натуральные числа, $K \leqslant H$, A – абсолютная постоянная, $\mathscr{L} = \ln Nq$, α–вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \leqslant q \leqslant \frac{KH^2}{N}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда при $H \gg N^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ справедлива оценка

$$V_K(N,H) = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{N-H<n\leqslant N} \Lambda(n)e(\alpha kn) \right| \ll \frac{KH}{\mathscr{L}^A}.$$

2.4. Короткие суммы Г.Вейля и аддитивные задачи с почти равными слагаемыми

Р. Вон [64], изучая суммы Г. Вейля вида

$$T(\alpha, x) = \sum_{m \leqslant x} e\left(\alpha m^n\right), \qquad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \qquad q \leqslant \tau, \qquad (a, q) = 1, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau},$$

в больших дугах методом Ван дер Корпута доказал следующее:

$$T(\alpha, x) = \frac{S(a, q)}{q} \int_0^x e\left(\lambda t^n\right) dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \left(1 + x^n |\lambda|\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

При условии, что α очень хорошо приближается рациональным числом со знаменателем q, то есть, при выполнении условия

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

он также доказал, что

$$T(\alpha, x) = \frac{x\ S(a, q)}{q} \int_0^1 e\left(\lambda t^n\right) dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Этими оценками он воспользовался при выводе асимптотической формулы в проблеме Варинга для восьми кубов [65].

При выводе асимптотических формул в аддитивных задачах с почти равными слагаемыми, к которым относится проблема Варинга, проблема Эстермана, основным моментом наряду с круговым методом Харди–Литлвуда в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова, является также поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m\leqslant x} e(\alpha m^n), \qquad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \qquad (a, q) = 1, \qquad q \leq \tau, \qquad |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau},$$

на больших дугах и их оценка на малых дугах. З.Х. Рахмонов вместе с учениками [66, 67, 68, 69, 70] изучил короткие тригонометрические суммы Г.Вейля вида $T(\alpha; x, y)$ на длинных дугах при $n = 2, 3, 4$. Затем этом результат был обобщен на случай произвольного фиксированного n [71, 72, 73].

Теорема 12. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ и $\lambda \geqslant 0$, тогда при $\{n\lambda x^{n-1}\} \leqslant \frac{1}{2q}$ имеет место формула*

$$T(\alpha; x, y) = \frac{S(a, q)}{q} T(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ имеет место оценка

$$|T(\alpha; x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2\leqslant k\leqslant n} (yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}} x^{1-\frac{n}{k}} q^{-\frac{1}{n}}).$$

Следствие 4. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, тогда имеет место соотношение*

$$T(\alpha; x, y) = \frac{y}{q} S(a, q)\gamma(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \qquad \gamma(\lambda; x, y) = \int_{-0,5}^{0,5} e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2} + yt\right)^n\right) dt.$$

Следствие 5. *Пусть* $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}$, *тогда имеет место оценка*

$$T(\alpha; x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2 \leqslant k \leqslant n} \left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{1-\frac{1}{k}} q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{n}} \right).$$

Следствия 4 и 5 являются обобщением результатов Р.Вона [64] для коротких тригонометрических сумм Г.Вейля вида $T(\alpha; x, y)$.

Эти результаты в сочетании с оценками суммы $T(\alpha; x, y)$ на малых дугах были использованы при выводе асимптотических формул в следующих аддитивных задачах с почти равными слагаемыми:

- в проблеме Эстермана [66] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде $p_1 + p_2 + m^2 = N$, p_1 и p_2 – простые числа, $m > 0$ – целое число, с условиями
$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leqslant H; \qquad i = 1, 2, \qquad \left| m^2 - \frac{N}{3} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{1-\frac{1}{4}} \ln^2 N;$$
- в кубической проблеме Эстермана [68, 74] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде $p_1 + p_2 + m^3 = N$, p_1 и p_2 – простые числа, $m > 0$ – целое число, с условиями
$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leqslant H; \qquad i = 1, 2, \qquad \left| m^3 - \frac{N}{3} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{1-\frac{1}{6}} \ln^3 N;$$
- в в проблеме Эстермана четвёртой степени [75, 76] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде $p_1 + p_2 + m^4 = N$, p_1 и p_2 – простые числа, $m > 0$ – целое число, с условиями
$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leqslant H; \qquad i = 1, 2, \qquad \left| m^4 - \frac{N}{3} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{1-\frac{1}{12}} (\ln N)^{\frac{40}{3}};$$
- в проблеме Варинга для кубов [77] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде девяти кубов натуральных чисел x_i, $i = 1, 2, \ldots, 9$ с условиями
$$\left| x_i - \left(\frac{N}{9} \right)^{\frac{1}{3}} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{\frac{1}{3}-\frac{1}{30}+\varepsilon};$$
- в проблеме Варинга для четвёртых степеней [78] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде суммы семнадцати четвёртых степеней натуральных чисел x_i, $i = 1, 2, \ldots, 17$ с условиями
$$\left| x_i - \left(\frac{N}{17} \right)^{\frac{1}{4}} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{\frac{1}{4}-\frac{1}{108}+\varepsilon};$$
- в проблеме Варинга для пятых степеней [71, 79] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде суммы 33 пятых степеней натуральных чисел x_i, $i = 1, 2, \ldots, 33$ с условиями
$$\left| x_i - \left(\frac{N}{33} \right)^{\frac{1}{5}} \right| \leqslant H, \qquad H \geqslant N^{\frac{1}{5}-\frac{1}{340}+\varepsilon}.$$

В теореме 12 и следствии 4 при $n = 2$ множитель $q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ в остаточном члене можно заменить на $q\sqrt{q}$ (см. [67, 73]). Отсюда и из теоремы Гурвица о приближении иррациональных чисел рациональными числами следует [80]:

Следствие 6. *Пусть* α *— иррациональное число, тогда последовательность* $\{\alpha m^2\}$ *таких, что* $x - y < m \leq x$ *при* $y \geqslant \ln^3 x$, $y \to \infty$, *является равномерно распределённой по модулю единицей.*

2.5. Специальные тригонометрические суммы и их приложения к теории нулей рядов Дирихле

В теории нулей рядов Дирихле работы Рахмонова З.Х. посвящены плотностным теоремам дзета-функция Римана в узких прямоугольниках критической полосы, нули дзета-функция Римана, дзета-фунции Харди и её производных, а также функции Дэвенпорта-Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой.

Пусть $N(\alpha, T)$ — число нулей функции Римана $\zeta(s)$ в области $Res \geqslant \alpha \geq 0,5$ и $0 \leq Ims \leq T$, а $N_0(T)$ — число нулей нечетного порядка функции $\zeta(0,5+it)$, лежащих на промежутке $(0, T)$. Оценка вида

$$N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T) \ll H^{a(1-\alpha)} \ln^c T, \tag{15}$$

с положительными абсолютными постоянными a и c называется плотностной теоремой в узких прямоугольниках критической полосы.

Впервые проблему распределения нулей дзета функции Римана в узких прямоугольниках критической полосы и в коротких промежутках критической прямой исследовал А.Сельберг [81]. Он доказал, что если $H \geqslant T^{\theta}$, $\theta > 0,5$ и ;$0,5 < \alpha \leqslant 1$, то справедливы следующие оценки:

$$N(\alpha, T+H) - N(\alpha, T) = O\left(\frac{H}{\alpha - 0,5}\right),$$
$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant c_1 H \ln T. \tag{16}$$

В этой работе А.Сельберг высказал гипотезы, что условие $\theta > 0,5$ в этих оценках может быть заменено условием $\theta > æ$, $æ < 0,5$. А.А. Карацуба [82, 83] доказал эти гипотезы при $æ = 27/82 + \varepsilon$. Хиз-Браун [84], с помощью своей теоремы о четвертом моменте дзета-функции Римана на критической прямой при $H \geq T^{\frac{7}{8}+\varepsilon}$ доказал (15) с $a = 2,4$ и $c = 244$. В 1992 г. Тао Ж. [85] доказал (15) с $a = 8/3$ и $c = 216$ при условии $H > T^{1/3+\varepsilon}$. З.Х. Рахмонов [86, 87], воспользовавшись методом экспоненциальных пар, доказал, что верна

Теорема 13. *Пусть (κ, λ) — произвольная экспоненциальная пара, $\varepsilon < 10^4$ — любое фиксированное положительное число, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$,*

$$\theta = \theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2}, \qquad H > T^{\theta+\varepsilon},$$

тогда (15) выполняется при $a = 2,4$, $c = 290$, если $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{2}{3}$ или $\frac{5}{6} \leqslant \alpha \leqslant 1$; и соответственно, $a = \frac{8}{3}$, $c = 50$, если $\frac{2}{3} < \alpha < \frac{5}{6}$.

Теорема 14. *Пусть (κ, λ) — произвольная экспоненциальная пара, $\varepsilon < 10^4$ — любое фиксированное положительное число, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$,*

$$\theta = \theta(\kappa, \lambda) = \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2}, \qquad H > T^{\theta+\varepsilon},$$

тогда существует положительная постоянная $c_1 = c_1(\varepsilon)$ такая, что выполняется (16).

Показатель $\theta(\kappa; \lambda)$ также появляется в оценке остаточного члена в проблеме Гаусса о числе целых точек в круге. Наилучшая оценка сверху для $\theta(\kappa; \lambda)$ принадлежит М. Хаксли [88]. Он доказал, что

$$\theta_0 = \min_{\kappa,\lambda \in \mathcal{P}} \theta(\kappa, \lambda) = \min_{\kappa,\lambda \in \mathcal{P}} \frac{\kappa + \lambda}{2\kappa + 2} \leqslant \frac{131}{416} = \frac{1}{3} - \frac{23}{3 \cdot 416} \approx 0.31490,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех экспоненциальных пар.

З.Х. Рахмонов и Ш.А. Хайруллоев [89, 90] методом экспоненциальных пар длину промежутка критического прямой, в которой заведомо содержится нуль нечетного порядка дзета-функции Римана, выразили через константу Ранкина.

Теорема 15. *Пусть* (κ, λ) *— произвольная экспоненциальная пара, отличная от* $(1/2,\, 1/2)$,

$$\theta(\kappa;\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2-\theta_1^{-1}(\kappa;\lambda)}\right), \qquad \theta_1(\kappa;\lambda) = \frac{\lambda}{0,5-\kappa},$$

тогда промежуток $(T, T+H)$, *при* $T \geqslant T_0 > 0$, $H \geqslant T^{\theta(\kappa;\lambda)} \ln^2 T$ *содержит нуль нечетного порядка дзета-функции Римана и для нижней грани величины* $\theta_1(\kappa;\lambda)$ *по* $\mathcal{P}$ *— множеству всех экспоненциальных пар* $(\kappa;\lambda)$, *отличных от* $(1/2, 1/2)$, *справедливо соотношение*

$$\inf_{(\kappa;\lambda)\in\mathcal{P}} \theta_1(\kappa;\lambda) = R+1,$$

где $R = 0.829021356859133592409239777283112 0\ldots$ *– постоянная Ранкина.*

В 2018 г. З.Х. Рахмонов и А.С. Аминов [91] доказали теорему А.А. Карацубы для количества нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна $f(s)$ в коротких промежутках критической прямой для промежутков, имеющих более короткую длину.

Теорема 16. *Пусть* $N_0(T)$ *– число нулей функции Дэвенпорта-Хейльбронна* $f(s)$ *на отрезке* $Res = 1/2$, $0 < Ims \leqslant T$, ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$; c_4, c_5, c_g *- абсолютные положительные постоянные, превосходящие* 1,

$$c_7 = \frac{\varepsilon_1^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon^2}{8-4\varepsilon}}}{3ec_5\cdot 5^{\frac{4}{\varepsilon}+3}\, 2^{\frac{2}{\varepsilon}+2+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}\, c_4^{\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{4-2\varepsilon}}\, c_g^{\frac{4}{\varepsilon}+2+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}}}.$$

Тогда при $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant c_7 H (\ln T)^{\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon}} \ln\ln T.$$

Следствие 7. *Пусть* ε *и* ε_1 *– произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие* $0,001$. *Тогда при* $H = T^{\frac{131}{416}+\varepsilon_1}$, $T \geq T_0(\varepsilon,\varepsilon_1) > 0$ *выполняется соотношение*

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geqslant H(\ln T)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

3. Заключение

Отмечая выдающееся результаты З.Х. Рахмонова в аналитический теории чисел, вносящие крупный вклад в теории чисел, следует сказать, что не менее весом его вклад в существенное развитие научной школы в различных направлениях математики. Свое шестидесятилетие З.Х. Рахмонов встретил в расцвете творческих и жизненных сил.

Дорогой Зарулло Хусенович, новых успехов в науке и дальнейшего развития теоретико-числовой школы в Республики Таджикистан.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И.М. Избранные труды — М: изд-во АН СССР. 1952.

2. Виноградов И.М., Карацуба А.А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 77. С. 4 – 30.

3. Виноградов И.М. Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p + k$ по простому модулю // Математический сборник. 1938. Т. 3. № 45. С. 311 – 320.

4. Виноградов И.М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1943.Т. 7, С. 17 – 34.

5. Линник Ю. В. Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха // Известия АН СССР. Серия математическая. 1952. Т. 16. № 6. С. 503 – 520.

6. Prachar K. Uber die Anwendung einer Methode von Linnik // Acta Arithmetica. 1976. V. 29. P. 367 – 376.

7. Prachar K. Bemerkungen uber Primzahlen in kurzen Reihen. [Remarks on primes in short sequences] // Acta Arithmetica. 1984. V. 44. P. 175 – 180.

8. Wang Yuan On Linnik's method concerning the Goldbach number // Scientia Sinica.1977. V. 20. P. 16 – 30.

9. Jutila M. On the least Goldbach's number in an arithmetical progression with a prime difference // Ann. Univ. Turku; Ser. A., I, 118 (1968).

10. Виноградов И.М. Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$ // Известия АН СССР. Серия математическая. 1952. Т. 16. С. 197 – 210.

11. Виноградов И.М. Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$ // Известия АН СССР. Серия математическая. 1953. Т. 17. С. 285 – 290.

12. Виноградов И.М. Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии // Известия АН СССР. Серия математическая. 1966. Т. 30, С. 481 – 496.

13. Линник Ю.В. Новейшие работы И. М. Виноградова // Труды МИАН. 1973. Т. 132. С. 27 – 29.

14. Карацуба А.А. Арифметические проблемы теории характеров Дирихле // УМН. 2008. Т. 63. В. 4(382). С. 43 — 92.

15. Карацуба А.А. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях // Доклады АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1287 – 1289.

16. Карацуба А.А. Об оценках сумм характеров // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. С. 20 – 30.

17. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1970. Т. 34. С. 299 – 321.

18. Карацуба А.А. О суммах характеров с простыми числами // Доклады АН СССР. 1970. Т. 190. № 3. С. 517 – 518.

19. Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Доклады АН СССР. 1970. Т. 192. № 4. С. 724 – 727.

20. Карацуба А.А. Суммы характеров с простыми числами, принадлежащими арифметической прогрессии // Известия АН СССР. Серия математическая. 1971. Т. 35. №3. С. 469 – 484.

21. Карацуба А.А. Суммы характеров по последовательности сдвинутых простых чисел и их применения // Математические заметки. 1975. Т. 17. № 1. С. 155 – 159.

22. Карацуба А.А. О некоторых проблемах современной аналитической теории чисел // Математические заметки. 1975. Т. 17. № 2. С. 341 – 349.

23. Карацуба А.А. О распределении значений неглавных характеров // Труды МИАН. 1976. Т. 142. С. 156 – 164.

24. Карацуба А.А. Суммы символов Лежандра от многочленов второй степени с простыми числами // Известия АН СССР. Серия математическая. 1978. Т. 42. № 2. С. 315 – 324.

25. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле // УМН. 1986. Т. 41.№ 1. С. 201 – 202.

26. Рахмонов З.Х. Об опенке суммы характеров с простыми числами // Доклады Академии наук Таджикский ССР. 1986. Т. 29. № 1. С. 16 – 20.

27. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения // Труды МИАН. 1994. Т. 207. С. 286 – 296.

28. Рахмонов З.Х. О наименьшем гольдбаховом числе в арифметической прогрессии // Известия АН Таджикский ССР. Отделение физико-математических и геолого-химических наук. 1986. № 2. С. 103 – 106.

29. Huxley M.N. On the difference between consecutive primes // Inventiones mathematicae June 1971. V. 15. Is. 2.P. 164 – 170.

30. Фридландера Дж.Б., Гонг К., Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Математические заметки. 2010. Т. 88. В. 4. С. 605 – 619.

31. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 1. С. 5 – 9.

32. Рахмонов З.Х. Распределение значений характеров Дирихле в последовательности сдвинутых простых чисел // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. В. 4(2). С. 113 – 117.

33. Рахмонов З.Х. Суммы характеров с простыми числами // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15. В. 2(50). С. 73 – 100.

34. Рахмонов З.Х. Суммы значений неглавных характеров по последовательности сдвинутых простых чисел // Тр. МИАН. 2017. Т. 299. С. 1 – 27.

35. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы значений неглавных характеров в последовательности сдвинутых простых чисел // Доклады АН Республики Таджикистан. 2017. Т. 60. № 9. С. 378 – 382.

36. Rakhmonov Z.Kh. Sums of Values of Nonprincipal Characters over Shifted Primes. (2018) In: Pintz J., Rassias M. (eds) Irregularities in the Distribution of Prime Numbers. pp 187-217. Springer, Cham. First Online 05 July 2018, https://doi.org/10.1007/978-3-319-92777-0_10.

37. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел — М.: изд-во Мир, 1974.

38. Vaughan R.O. Mean value theorems in prime number theory // J.London Math. Soc. (2), 10(1975), 153 – 162.

39. Рахмонов З.Х. Распределение чисел Харди Литтвлуда в арифметических прогрессиях // Известия АН СССР. Серия математическая. 1989. Т. 52, № 1. С. 211 – 224.

40. Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо Основы аналитической теории чисел — Пекин: 1991 (на китайском языке).

41. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении $\psi(x, \chi)$ и ее приложения // Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 57, №4. С. 55 – 71.

42. Рахмонов З.Х. Средние значения функции Чебышева // Доклады Российской Академии наук. 1993. Т. 331(3). С. 281 – 282.

43. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении функций Чебышева // Известия Российской Академии наук. Серия математическая. 1993. Т. 58, №3. С. 127 – 139.

44. Рахмонов З.Х. Теорема о среднем значении в теории простых чисел // Доклады Российской Академии наук. 1996. Т. 349, № 5. С. 606 – 607.

45. Тимофеев Н.М. Распределение арифметических функций в коротких интервалах в среднем по прогрессиям // Известия АН СССР. Серия математическая. 1987. №2. С. 341 – 362.

46. Линник Ю.В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха-Виноградова // Математический сборник. 1946. Т. 19. Вып. 1. С. 3 – 8..

47. Hardy G.H., Wright E.M. An introduction to theory of numbers — Oxford at the clarendon press. 1954.

48. Бабаев Г.Б. Замечание к работе Дэвенпорта и Хейлброна // УМН. 1958. Т. 13. В. 6(84). С. 63 – 64.

49. Haselgrove C.B. Some theorems in the analitic theory of number // J. London Math.Soc. 1951. V. 26. P. 273 – 277.

50. Статулявичус В О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел // Вильнюс. Ученые труды университета. Серия мат., физ. и хим. н. 1955. №2. С. 5 – 23.

51. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. 1990. V. 2. P. 138 – 147.

52. Zhan T. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica. New ser. 1991. V. 7. No 3. P. 135 – 170.

53. Liu J., Zhan T. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I // Monatshefte fur Mathematik. 1999. V. 127. Is. 1. P. 27 – 41.

54. Liu J, Zhan T. Hua's Theorem on Prime Squares in Short Intervals // Acta Mathematica Sinica. English Series. Oct., 2000. V. 16, No 4. P. 669–690.

55. Liu J., Lu G., Zhan T. Exponential sums over primes in short intervals // Science in China: Series A Mathematics. 2006. V. 49, No 5. P. 611 – 619. DOI:10.1007/s11425-006-0611-x

56. Hua L. K. Some results in the additive prime number theory // Quart. J. Math. 1938. V. 9, No 1. P. 68 — 80.

57. Kumchev A V. On Weyl sums over primes in short intervals // “Arithmetic in Shangrila”—Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications. 2012. V. 9. Singapore: World Scientific. P. 116–131.

58. Yao Y. Sums of nine almost equal prime cubes // Frontiers of Mathematics in China. October 2014. V. 9, Is. 5. P. 1131 – 1140. DOI:10.1007/s11464-014-0384-4.

59. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Оценка коротких кубических тригонометрических сумм в малых дугах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. Т. 59. № 7-8. С. 273 – 277.

60. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Короткие кубические суммы простыми числами // Труды МИАН. 2016. Т. 296. С. 220 – 242.

61. Jutila M. Mean value etstimates for exponential sums with applications to L-functions // Acta Arithmetica. 1991. V. 57. Is. 2. P. 93 – 114.

62. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З., Исматов С.Н. // Оценка сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами //Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 12. С. 937 – 945.

63. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Сумма коротких тригонометрических сумм с простыми числами // Доклады Российской Академии наук. 2014. Т. 459, №2. С. 156 – 157.

64. Vaughan R.C. Some remarks in Weyl sums // Coll. Math. Soc. Janos. Bolyani, Budapest 1981.

65. Vaughan R.C. On Waring’s problem for cubes // J. Reine Angew. Math. 1986. V 365. P. 122 – 170.

66. Рахмонов З.Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. вып. 4. С. 564 – 572.

67. Рахмонов З.Х.,Шокамолова Дж.А. Короткие квадратичные тригонометрические суммы Вейля // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2009. № 2(135). С. 7 – 18.

68. Рахмонов З.Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95. вып. 3. С. 445 – 456.

69. Рахмонов З.Х.,Мирзоабдугафуров К.И. Об оценках коротких кубических сумм Г.Вейля // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2008. – Т. 51.№ 1. С. 5 – 15.

70. Рахмонов З.Х., Азамов А.З., Мирзоабдугафуров К.И. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля четвертой степени // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2010. Т. 53. № 10. С. 737 – 744.

71. Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н., РахимовА.О. Короткие суммы Г.Вейля и их приложения // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. В. 1(53). С. 232 – 247.

72. Рахмонов З.Х. Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля // Ученые записки Орловского университета. Серия естественные, технические и медицинские науки. 2013. № 6. часть 2. С. 194 – 203.

73. Рахмонов З.Х., Озодбекова Н.Б. Оценка коротких тригонометрических сумм Г.Вейля // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. № 4. С. 257 – 264.

74. Рахмонов З.Х., Фозилова Д.М. Об одной тернарной задаче с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2012. Т. 55. № 6. С. 433 – 440.

75. Рахмонов Ф.З., Рахимов А.О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. ISSN: 1810-4134. 2016. №8. С. 87 – 89.

76. Рахимов А.О. Асимптотическая формула в проблеме Эстермана четвёртой степени с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. Т. 58. №9. С. 769 – 771.

77. Рахмонов З.Х., Мирзоабдугафуров К.И. Проблема Варинга для кубов с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2008. Т. 51. № 2. С. 83 – 86.

78. Рахмонов З.Х., Азамов А.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга для четвертых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2011. Т. 54. № 3. С. 34 – 42.

79. Рахмонов З.Х., Назрублоев Н.Н. Проблема Варинга для пятых степеней с почти равными слагаемыми // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т. 57. №11 – 12. С. 823 – 830.

80. Рахмонов З.Х., Озодбекова Н.Б., Шокамолова Дж.А. // О равномерном распределении по модулю единица значений квадратичного многочлена, аргумент которого принимает значения из короткого интервала // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2013. Т. 56. № 4. С. 261 – 264.

81. Selberg A. On the zeros Riemann zeta function // Shr. Norske Vid. Akad. Oslo, 1942. V. 10. P. 1 – 59

82. Карацуба А.А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Известия АН СССР, серия математическая. 1984.Т. 48. № 3. С 569 – 584.

83. Карацуба А.А. Дзета-функция Римана и ее нули // УМН. 1985. Т. 40. В. 5(245). С. 19 –70.

84. Heath Brown D.R. The fourth power moment of the Riemann zeta function // Proceedings of the London Mathematical Society. 1979. V. s3-38. Is. 3. P. 385 – 422, https://doi.org/10.1112/plms/s3-38.3.385

85. Zhan Tao. On the mean square of Dirichlet L-functions // Acta Mathematica Sinica June. 1992. V. 8. Is. 2.P. 204 – 224

86. Рахмонов З.Х. Оценка плотности нулей дзета функции Римана // УМН. 1994. Т. 49. Вып. 1. С. 161 – 162.

87. Рахмонов З.Х. Нули дзета-функции Римана в коротких промежутках критической прямой // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7. В. 1. С. 263 – 279.

88. Huxley M.N. Sums and Lattice Points III // Proceedings of the London Mathematical Society. 2003. V. 87. Is. 3. P. 591 – 609.

89. Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А. Расстояние между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2006. Т. 49. № 5. С. 393 – 400.

90. Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А. Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2009. Т. 52. № 5. С. 331 – 337.

91. Рахмонов З.Х., Аминов А.С. О нулях нечётного порядка функции Дэвенпорта–Хейлбронна в коротких промежутках критической прямой // Доклады АН Республики Таджикистан. 2019. Т. 62.№ 3-4. С. 133 – 138.

REFERENCES

1. Vinogradov, I. M., 1952, *Izbrannye trudy. (Russian) [Selected works.]*, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 436 pp.

2. Vinogradov, I. M., & Karatsuba, A. A., 1986, "The method of trigonometric sums in number theory", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 168, pp. 3-30.

3. Vinogradov, I. M., 1938, "On the distribution of quadratic rests and non-rests of the form $p+k$ to a prime modulus", *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, vol. 3(45), no 2, pp. 311–319.

4. Vinogradov, I. M., 1943, "An improvement of the estimation of sums with primes", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 7, no 1, pp. 17–34.

5. Linnik, Ju. V. 1952, "Some conditional theorems concerning binary problems with prime numbers", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 16, Is. 6, pp. 503–520.

6. Prachar, K. 1976, "Uber die Anwendung einer Methode von Linnik", *Acta Arithmetica*, vol. 29, pp. 367-376.

7. Prachar, K., 1984, "Bemerkungen uber Primzahlen in kurzen Reihen. [Remarks on primes in short sequences]", *Acta Arithmetica*, vol. 44, pp. 175-180.

8. Wang Yuan, 1977, "On Linnik's method concerning the Goldbach number", *Scientia Sinica*, vol. 20, pp. 16-30.

9. Jutila, M., 1968, "On the least Goldbach's number in an arithmetical progression with a prime difference", *Ann. Univ. Turku; Ser. A,* I 118(5).

10. Vinogradov, I. M., 1952, "New approach to the estimation of a sum of values of $\chi(p+k)$", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 16, Is. 3, pp. 197–210.

11. Vinogradov, I. M., 1953, "Improvement of an estimate for the sum of the values $\chi(p+k)$", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 17, Is. 4, pp. 285–290.

12. Vinogradov, I. M., 1966, "An estimate for a certain sum extended over the primes of an arithmetic progression", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 30, Is. 3, pp. 481–496.

13. Linnik, Yu. V., 1975, "Recent works of I.M. Vinogradov", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 132, pp. 25–28.

14. Karatsuba, A. A., 2008, "Arithmetic problems in the theory of Dirichlet characters", *Russian Mathematical Surveys*, vol 63, Is. 4, pp. 641-690.

15. Karatsuba, A. A., 1968, "Sums of characters, and primitive roots, in finite fields", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 180, Is. 6. № 6, pp. 1287-1289.

16. Karatsuba, A. A., 1970, "Estimates of character sums", *Math. USSR-Izv.*, vol. 4, Is. 1, pp. 19–29.

17. Karatsuba, A. A., 1970, “Sums of characters over prime number”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 4, Is. 2, pp. 303–326.

18. Karatsuba, A. A., 1970, “Sums of characters with prime numbers”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 190, Is. 3, pp. 517–518.

19. Karatsuba, A. A., 1970, “The distribution of products of shifted prime numbers in arithmetic progressions”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 192, Is. 4, pp. 724–727.

20. Karatsuba, A. A., 1971, “Sums of characters with prime numbers in an arithmetic progression”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 5, Is. 3, pp. 485–501.

21. Karatsuba, A. A., 1975, “Sums of characters in sequences of shifted prime numbers, with applications”, *Math. Notes*, vol. 17, Is. 1, pp. 91–93.

22. Karatsuba, A. A., 1975, “Some problems of contemporary analytic number theorem”, *Math. Notes*, vol. 17, Is. 2, pp. 195–199.

23. Karatsuba, A. A., 1979, “Distribution of values of nonprincipal characters”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 142, pp. 165–174.

24. Karatsuba, A. A., 1978, “Sums of Legendre symbols of polynomials of second degree over prime numbers”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 12, Is. 2, pp. 299–308.

25. Rakhmonov, Z. Kh., 1986, “On the distribution of values of Dirichlet characters”, *Russian Math. Surveys*, vol. 41, Is. 1, pp/ 237–238. doi:10.1070/RM1986v041n01ABEH0032

26. Rakhmonov, Z. Kh., 1986, “Estimation of the sum of characters with primes”, *Dokl. Akad. Nauk Tadzhik. SSR*, vol. 29, Is. 1, pp. 16–20,, (in Russian).

27. Rakhmonov, Z. Kh., 1995, “On the distribution of the values of Dirichlet characters and their applications”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 207, pp. 263–272.

28. Rakhmonov, Z. Kh., 1986 “The least Goldbach number in an arithmetic progression”, *Izv. Akad. Nauk Tadzhik. SSR. Otdel. Fiz.-Mat., Khim. i Geol. Nauk*, № 2(100), pp. 103-106, (in Russian).

29. Huxley, M. N., 1971, “On the difference between consecutive primes”, *Inventiones mathematicae*, vol. 15, Is. 2, pp. 164–170.

30. Fridlander, Dzh. B., & Gong, K., & Shparlinskii, I. E., 2010, “Character sums over shifted primes”, *Math. Notes*, vol. 88, Is. 3-4, pp. 585-598. doi:10.1134 S0001434610090312.

31. Rakhmonov, Z. Kh., 2013, “Distribution of values of Dirichlet characters in the sequence of shifted primes”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, № 1, pp. 5-9, (in Russian).

32. Rakhmonov, Z. Kh., 2013, “Distribution of values of Dirichlet characters in the sequence of shifted primes”, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, vol. 13, Is. 4(2), pp. 113-117, (in Russian).

33. Rakhmonov, Z. Kh., 2014, “Sums of characters over prime numbers”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 15, Is. 2, pp. 73-100, (in Russian).

34. Rakhmonov, Z. Kh., 2017, “Sums of values of nonprincipal characters over a sequence of shifted primes”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 299, pp. 219–245.

35. Rakhmonov, Z. Kh., 2017, “On the estimation of the sum the values of Dirichlet character in a sequence of shifted primes”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 60, no 9, pp. 378-382, (in Russian).

36. Rakhmonov Z.Kh. Sums of Values of Nonprincipal Characters over Shifted Primes. (2018) In: Pintz J., Rassias M. (eds) Irregularities in the Distribution of Prime Numbers. pp 187-217. Springer, Cham. First Online 05 July 2018, https://doi.org/10.1007/978-3-319-92777-0_10.

37. Montgomery, Hugh L., 1971, “Topics in Multiplicative Number Theory”, Vol. 227. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. ix+178 pp.

38. Vaughan, R.O., 1975, “Mean value theorems in prime number theory”, *J.London Math. Soc.*, vol. s2-10, Is. 2, pp. 153-162, https://doi.org/10.1112/jlms/s2-10.2.153

39. Rakhmonov, Z. Kh., 1990, “The distribution of Hardy-Littlewood numbers in arithmetic progressions”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 34, Is. 1, pp. 213-228, http://dx.doi.org/10.1070/IM1990v034n01ABEH000621.

40. Pan Chengdong, & Pan Chengbiao, 1991,“Foundation to Analytic Number Theory”, *Science Press, Beijing, 1991*, (in Chinese).

41. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, “Theorem on the mean value of $\psi(x,\chi)$ and its applications”, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 43, Is. 1, pp. 49–64. doi.org/10.1070/IM1994v043n01ABEH001558

42. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, “Mean values of the Chebyshev function”, *Russ. Acad. Sci., Dokl., Math.*, vol. 48, Is. 1, pp. 85-87. http://www.zentralblatt-math.org/zmath/search/?an=Zbl 0818.11030

43. Rakhmonov, Z. Kh., 1995, “A mean-value theorem for Chebyshev functions”, *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, vol. 44, Is. 3, pp. 555–569. doi.org/10.1070/IM1995v044n03ABEH001613.

44. Rakhmonov, Z. Kh., 1996, “The mean-value theorem in prime number theory”, *Doklady Mathematics*, vol. 54, Is. 1, pp. 597-598. https://zbmath.org/?q=an

45. Timofeev, N. M., 1988, “Distribution in the mean of arithmetic functions in short intervals in progressions”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 30, Is. 2, pp. 315–335. doi.org/10.1070/IM1988v030n02ABEH001013.

46. Linnik, U. V., !946, “A new proof of the Goldbach–Vinogradow theorem”, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, vol. 19(61), Is. 1, pp. 3–8.

47. Hardy, G. H., & Wright, E. M., 1954, *An introduction to theory of numbers*, 3rd ed. Oxford, at the Clarendon Press, 1954. xvi+419 pp.

48. Babaev, G., 1958, “Remark on a paper of Davenport and Heilbronn”, *Uspehi Mat. Nauk*, vol. 13, Is. 6(84), pp. 63–64.

49. Haselgrove C. B., 1951, “Some theorems in the analitic theory of number”, *J. London Math. Soc.*, vol. 26, pp. 273-277.

50. Statulevicius, V., 1955, "On the representation of odd numbers as the sum of three almost equal prime numbers *Univ. Mokslo Darbai. Mat. Fiz. Chem. Mokslu Ser*, vol. 3, pp. 5-23.

51. Pan Chengdong, Pan Chengbiao, 1990, “On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III)”, *Chinese Ann. of Math.*, vol. 2. pp. 138-147.

52. Zhan, T., 1991, “On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes”, *Acta Math Sinica. New ser.*, vol. 7, Is. 3. pp. 135 – 170.

53. Liu, J., & Zhan, T., 1999, “Estimation of exponential sums over primes in short intervals I”, *Monatshefte fur Mathematik*, vol. 127, Is. 1, pp. 27-41.

54. Liu, J., & Zhan, T., 2000, “Hua’s Theorem on Prime Squares in Short Intervals”, *Acta Mathematica Sinica. English Series*, vol. 16, Is. 4. pp. 669-690.

55. Liu J., & Lu, G., Zhan, T., 2006, “Exponential sums over primes in short intervals”, *Science in China: Series A Mathematics*, vol. 49, Is. 5, pp. 611-619. doi:10.1007/s11425-006-0611-x

56. Hua, L. K., 1938, “Some results in the additive prime number theory”, *Quart. J. Math.*, vol. 9, Is. 1, pp. 68-80.

57. Kumchev, A. V., 2012, “On Weyl sums over primes in short intervals”, *“Arithmetic in Shangrila”—Proceedings of the 6th China-Japan Seminar on Number Theory. Series on Number Theory and Its Applications*, vol. 9, Singapore: World Scientific, pp. 116–131.

58. Yao, Y., 2014, “Sums of nine almost equal prime cubes”, *Frontiers of Mathematics in China*, vol. 9, Is. 5. pp. 1131-1140. doi:10.1007/s11464-014-0384-4.

59. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., 2016, “Estimation of short cubic exponential sums with prime numbers in minor arcs”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 59, no 7-8, pp. 273-277, (in Russian).

60. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2017, “Short Cubic Exponential Sums over Primes”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, pp. 211–233. doi.org/10.1134/S0081543817010175

61. Jutila, M., 1991, “Mean value etstimates for exponential sums with applications to L-functions”, *Acta Arithmetica*, vol. 57, Is. 2. pp. 93-114.

62. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z., Ismatov S. N., 2013, “Estimate of sums of short exponential sums over prime numbers”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, no 12, pp. 937-945, (in Russian).

63. Rakhmonov, Z. Kh.,& Rakhmonov, F. Z., 2014, “Sum of short exponential sums over prime numbers”, *Doklady Mathematics*, vol. 90, No 3, pp. 699–700. doi.org/10.1134/S1064562414070138.

64. Vaughan, R. C., 1981, “Some remarks in Weyl sums”, *Colloquia Math. Soc. J´anos Bolyai, 34 Topics in classical number theory*, Budapest, North Holland (1984), pp. 1585-1602.

65. Vaughan, R.C., 1986, “On Waring’s problem for cubes”, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 365, pp. 122-170.

66. Rakhmonov, Z. Kh., 2003, “Estermann’s ternary problem with almost equal summands”, *Mathematical Notes*, vol. 74, Is. 4, pp. 534-542. doi.org/10.1023/A:1026199928464.

67. Rakhmonov, Z. Kh., & Shokamolova, J. A., 2009, “Short quadratic Weil’s exponential sums”, *Izvestiya Akademii nauk Respubliki Tajikistan. Otdeleniye fiziko-matematicheskikh, khimicheskikh, geologicheskikh i tekhnicheskikh nauk*, № 2(135), pp. 7-18, (in Russian).

68. Rakhmonov, Z. Kh., 2014, “The Estermann cubic problem with almost equal summands“, *Mathematical Notes*, vol. 95, Is. 3-4, pp. 407–417. doi.org/10.1134/S0001434614030122.

69. Rakhmonov, Z. Kh., & Mirzoabdugafurov, K. I., 2008, “On estimates of G. Weil’s short cubic sums”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 51, no 1, pp. 5-15, (in Russian).

70. Rakhmonov, Z. Kh., & Azamov A.Z., Mirzoabdugafurov, K. I., 2010, “An estimate short exponential Weyl’s sums fourth degree”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 53, no 10, pp. 737-744, (in Russian).

71. Rakhmonov, Z. Kh., & Nazrubloev, N. N., Rakhimov, A.O., 2015, “Short Weyl sums and their applications”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, Is. 1, pp. 232–247.

72. Rakhmonov, Z. Kh., 2013, “Short Weyl sums”, *Uchenyye zapiski Orlovskogo universiteta. Seriya yestestvennyye, tekhnicheskiye i meditsinskiye nauki*, no. 6, part 2, pp. 194–203.

73. Rakhmonov, Z. Kh., & Ozodbekova, N. B., 2011, “An estimate short exponential Weyl’s sums”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 54, no 4, pp. 257-264, (in Russian).

74. Rakhmonov, Z. Kh., & Fozilova, D. M., 2012, “About the ternary problem with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 55, no 6, pp. 433-440, (in Russian).

75. Rakhmonov,F. Z., & Rakhimov, A. O., 2015, “On an additive problem with almost equal summands”, *Issledovaniya po algebre, teorii chisel, funktsional’nomu analizu i smezhnym voprosam. Izdatel’stvo: Saratovskiy natsional’nyy issledovatel’skiy gosudarstvennyy universitet im. N.G. Chernyshevskogo*, ISSN: 1810-4134, no 8, pp. 87–89.

76. Rakhimov, A. O., 2015, “Asymptotic formula in the fourth-degree Esterman problem with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 58, no 9, pp. 769-771, (in Russian).

77. Rakhmonov, Z. Kh., & Mirzoabdugafurov, K. I., 2008, “Waring’s problem for cubes with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 51, no 2, pp. 83-86, (in Russian).

78. Rakhmonov, Z. Kh., & Azamov A.Z., 2011, “An asymptotic formula in Waring’s problem for fourth powers with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 54, no 3, pp. 34-42, (in Russian).

79. Rakhmonov, Z. Kh., & Nazrubloev, N. N., 2014, “Waring’s problem for fifth powers with almost equal summands”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 57, no 11-12, pp. 823-830, (in Russian).

80. Rakhmonov, Z. Kh., & Ozodbekova, N. B., Shokamolova, J. A., 2013, “On the uniform distribution modulo a unit of the values of quadratic polynomial whose argument takes its values from the short interval”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 56, no 4, pp. 261-264, (in Russian).

81. Selberg, A., 1942, “On the zeros Riemann zeta function”, *Shr. Norske Vid. Akad. Oslo*, vol. 10, pp. 1-59.

82. Karatsuba, A. A., 1984, “On the zeros of the function $\zeta(s)$ On short intervals of the critical line”, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 24, Is. 3, pp. 523-537, doi.org/10.1070/IM1985v024n03ABEH001246.

83. Karatsuba, A. A., 1985, A. A. Karatsuba, “The Riemann zeta function and its zeros”, *Russian Math. Surveys*, vol. 40, Is. 5, pp. 23–82, doi.org/10.1070/RM1985v040n05ABEH003682.

84. Heath Brown D.R., 1979, “The fourth power moment of the Riemann zeta function”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. s3-38, Is. 3, pp. 385-422, doi.org/10.1112/plms/s3-38.3.385.

85. Zhan Tao, 1992, “On the mean square of Dirichlet L-functions”, *Acta Mathematica Sinica*, vol. 8, Is. 2, pp. 204–224.

86. Rakhmonov, Z. Kh., 1994, “Estimate of the density of the zeros of the Riemann zeta function”, *Russian Math. Surveys*, vol. 49, Is. 2, pp. 168–169, doi.org/10.1070/RM1994v049n02ABEH002225.

87. Rakhmonov, Z. Kh., 2006, “Zeros of the Riemann zeta function in short intervals of the critical line”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 7, Is. 1(17), pp. 263-269.

88. Huxley, M. N., 2003, “Sums and Lattice Points III”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 87, Is. 3, pp. 591-609, doi.org/10.1112/S0024611503014485.

89. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A., 2006, “Distance between the next zeros of Riemann’s zeta-function in the critical line”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 49, no. 5, pp. 393 – 400.

90. Rakhmonov, Z. Kh. & Khayrulloev, Sh. A. 2009, “The neibour zero of the Riemann’s zeta-function laying on a critical line”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 52, no. 5, pp. 331 – 337.

91. Rakhmonov, Z. Kh. & Aminov, A. S., 2019, “On the zeros of an odd order of the Davenport – Heilbron function in short intervals of the critical line”, *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 62, no. 3-4, pp. 133-138.

Получено 15.10.2019 г.
Принято в печать 20.12.2019 г.