ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 511.361

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-272-281

О линейной независимости значений некоторых гипергеометрических функций над мнимым квадратичным полем

П. Л. Иванков

Иванков Павел Леонидович — доктор физико-математических наук, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (г. Москва).

e-mail: ivankovpl@mail.ru

Аннотация

Основная трудность, с которой приходится иметь дело при исследовании арифметической природы значений обобщенных гипергеометрических функций с иррациональными параметрами, состоит в том, что общий наименьший знаменатель нескольких первых коэффициентов соответствующих степенных рядов растет слишком быстро с увеличением числа этих коэффициентов. Последнее обстоятельство делает невозможным использование известного в теории трансцендентных чисел метода Зигеля для проведения упомянутого исследования. Применение названного метода предполагает использование принципа Дирихле для построения функциональной линейной приближающей формы. Это построение является первым этапом длинного и сложного рассуждения, приводящего в конечном итоге к получению требуемого арифметического результата. Попытка применить принцип Дирихле в случае функций с иррациональными параметрами наталкивается на непреодолимые трудности из-за упомянутого выше слишком быстрого роста общего наименьшего знаменателя коэффициентов соответствующих рядов Тейлора. Вследствие этого в случае функций с иррациональными параметрами обычно применяют эффективное построение линейной приближающей формы (или совокупности таких форм при использовании совместных приближений). Коэффициенты построенной формы являются многочленами с алгебраическими коэффициентами. Для общего наименьшего знаменателя этих коэффициентов требуется затем получить приемлемую оценку сверху его абсолютной величины. Известные оценки такого рода нуждаются в некоторых случаях в уточнении. Это уточнение осуществляется с применением теории делимости в квадратичных полях; дополнительно используются сведения о распределении простых чисел в арифметической прогрессии.

В настоящей работе рассматривается один из вариантов эффективного построения совместных приближений для гипергеометрической функции общего вида и ее производных. Общий наименьший знаменатель коэффициентов многочленов, входящих в эти приближения, оценивается затем с помощью уточненного варианта соответствующей леммы. Все это позволяет получить новый результат об арифметической природе значений указанной функции в малой по абсолютной величине ненулевой точке мнимого квадратичного поля.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, эффективная конструкция, линейная независимость, мнимое квадратичное поле.

Библиография: 15 названий

Для цитирования:

П. Л. Иванков. О линейной независимости значений некоторых гипергеометрических функций над мнимым квадратичным полем // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 272–281.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 511.361

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-272-281

On linear independence of the values of some hypergeometric functions over the imaginary quadratic field

P. L. Ivankov

Ivankov Pavel Leonidovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Bauman Moscow state technical University (Moscow).

e-mail: ivankovpl@mail.ru

Abstract

The main difficulty one has to deal with while investigating arithmetic nature of the values of the generalized hypergeometric functions with irrational parameters consists in the fact that the least common denominator of several first coefficients of the corresponding power series increases too fast with the growth of their number. The last circumstance makes it impossible to apply known in the theory of transcendental numbers Siegel's method for carrying out the above mentioned investigation. The application of this method implies usage of pigeon-hole principle for the construction of a functional linear approximating form. This construction is the first step in a long and complicated reasoning that leads ultimately to the required arithmetic result. The attempts to apply pigeon-hole principle in case of functions with irrational parameters encounters insurmountable obstacles because of the aforementioned fast growth of the least common denominator of the coefficients of the corresponding Taylor series. Owing to this difficulty one usually applies effective construction of the linear approximating form (or a system of such forms in case of simultaneous approximations) for the functions with irrational parameters. The effectively constructed form contains polynomials with algebraic coefficients and it is necessary for further reasoning to obtain a satisfactory upper estimate of the modulus of the least common denominator of these coefficients. The known estimates of this type should be in some cases improved. This improvement is carried out by means of the theory of divisibility in quadratic fields. Some facts concerning the distribution of the prime numbers in arithmetic progression are also made use of.

In the present paper we consider one of the versions of effective construction of the simultaneous approximations for the hypergeometric function of the general type and its derivatives. The least common denominator of the coefficients of the polynomials included in these approximations is estimated subsequently by means of the improved variant of the corresponding lemma. All this makes it possible to obtain a new result concerning the arithmetic values of the aforesaid function at a nonzero point of small modulus from some imaginary quadratic field.

Keywords: hypergeometric function, effective construction, linear independence, imaginary quadratic field.

Bibliography: 15 titles

For citation:

P. L. Ivankov, 2019, "On linear independence of the values of some hypergeometric functions over the imaginary quadratic field", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 272–281.

1. Введение

Пусть

$$\psi_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где $a(x) = (x + \alpha_1) \dots (x + \alpha_r)$, $b(x) = (x + \beta_1) \dots (x + \beta_m)$, $1 \leq r < m$, числа α_i, β_j отличны от $-1, -2, \dots$; $\beta_1 = 0$. Известно, что для линейной независимости функций (1) над полем рациональных дробей $\mathbb{C}(z)$ достаточно потребовать, чтобы выполнялись условия

$$\alpha_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Доказательство этого утверждения, а также необходимые и достаточные условия упомянутой линейной независимости см. в [1] и [2]. Мы будем изучать вопрос о линейной независимости значений функций (1) в отличной от нуля точке некоторого мнимого квадратичного поля.

2. Результаты

В нижеследующей теореме предполагается, что для функции (1) выполнены условия, о которых речь в предыдущем пункте; в частности, выполняется условие (2). Через $\mathbb{I}$ обозначим некоторое мнимое квадратичное поле.

ТЕОРЕМА 1. Пусть m и r таковы, что $m_1 = m - 2r + 1 > 0$, и пусть $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, r - 1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2, \dots, \beta_{m-m_1} \in \mathbb{Q}$, а числа α_r и $\beta_{m-m_1+1}, \dots, \beta_m$ принадлежат множеству $\mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}$. Пусть, далее, ω и q — ненулевые числа из кольца $\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$. Тогда, если $|q| > q_0$, то числа

$$\psi_1\left(\frac{\omega}{q}\right), \dots, \psi_m\left(\frac{\omega}{q}\right) \quad (3)$$

линейно независимы над $\mathbb{I}$; при этом q_0 зависит от $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_m, \omega$ и от поля $\mathbb{I}$.

Если при сохранении прочих условий этой теоремы увеличить количество рациональных корней многочлена $b(x)$, т.е. считать, например, что $m_1 = m - 2r$, то мы получим утверждение, являющееся следствием [3, с. 192, теорема 2], причем в этом случае значения функций (1) будут линейно независимыми над полем $\mathbb{I}$ в любой отличной от нуля точке этого поля. В упомянутой теореме из [3] не требуется, чтобы корни многочлена $b(x)$ лежали в поле $\mathbb{I}$; там предполагается лишь, что $b(x) \in \mathbb{I}[x]$. Для того, чтобы таким же образом усилить сформулированную выше теорему 1, пришлось бы предварительно уточнить оценку общего наименьшего знаменателя дробей специального вида, которая используется в работах [4]–[7], подобно тому, как это сделано в частном случае в [8, с. 68, лемма 4]. Конкретно, в правой части [4, неравенство (37), с. 1227] следует доказать возможность замены $n^{\epsilon n}$ на величину порядка $e^{O(n)}$. Метод доказательства теоремы 1 позволяет получить также и оценку снизу модуля соответствующей линейной формы; эта оценка здесь не приводится, т.к. она весьма далека от ожидаемого в рассматриваемой ситуации окончательного результата.

3. Эффективная конструкция

ЛЕММА 1. Пусть s — натуральное число, и пусть $S(\tau)$ — многочлен, степень которого меньше s . Тогда

$$\sum_{\tau=0}^s \frac{(-1)^{\tau}}{\tau!(s-\tau)!} S(\tau) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\delta = z \frac{d}{dz}$. Тогда

$$\delta^k(z-1)^s|_{z=1} = \sum_{\tau=0}^s \binom{s}{\tau} (-1)^{s-\tau} \tau^k. \quad (4)$$

Левая часть здесь равна нулю при $k < s$, откуда и следует требуемое. Лемма доказана.

Пусть n — натуральное число, $N = [mn/(m-1)]$, и пусть $b_1(x) = b(x)/x$. Рассмотрим многочлены

$$P_j(z) = \sum_{s=0}^n p_{js} z^s, \quad j = 1, \dots, m,$$

где

$$p_{js} = \sum_{\tau=0}^s \frac{(-1)^\tau}{\tau!(s-\tau)!} (s-\tau)^{j-1} \frac{\prod_{x=s+1}^{N-1} b_1(x-\tau)}{\prod_{x=s+1}^n a(x-\tau)}. \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что ни один из этих многочленов не равен нулю тождественно.

ЛЕММА 2. Пусть функция $R_{ij}(z)$, $1 \leq i, j \leq m$, определяется равенством

$$R_{ij}(z) = P_j(z)\psi_i(z) - P_i(z)\psi_j(z). \quad (6)$$

Тогда если $i \neq j$, то $R_{ij}(z)$ имеет при $z = 0$ порядок нуля не меньше, чем N .

Доказательство. Пусть

$$P(z) = \sum_{s=0}^{N-1} p_s z^s.$$

— многочлен с неопределенными коэффициентами, и пусть

$$P(z)\psi_j(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{p}_{js} z^s, \quad \tilde{P}_j(z) = \sum_{s=0}^{N-1} \tilde{p}_{js} z^s, \quad j = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Очевидно, при таких многочленах $\tilde{P}_j(z)$ функции

$$\tilde{R}_{ij}(z) = \tilde{P}_j(z)\psi_i(z) - \tilde{P}_i(z)\psi_j(z)$$

будут иметь при $z = 0$ требуемый порядок нуля. Подберем коэффициенты многочлена $P(z)$ так, чтобы степени многочленов (7) не превосходили n . Это условие эквивалентно выполнению равенств

$$\sum_{\tau=0}^s p_\tau (s-\tau)^{j-1} \prod_{x=1}^{s-\tau} \frac{a(x)}{b(x)} = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad s = n+1, \dots, N-1. \quad (8)$$

Положим

$$p_\tau = \frac{(-1)^\tau}{\tau!} \prod_{x=1}^{N-\tau-1} b_1(x) \frac{\prod_{x=0}^{\tau-1} a(-x)}{\prod_{x=1}^n a(x-\tau)}.$$

Заметим, что фигурирующие в правой части последнего равенства числа $a(-x)$ и $a(x-\tau)$ отличны от нуля, т.к. условие (2) выполняется, в частности, и при $j = 1$, а по условию теоремы $\beta_1 = 0$. При таком выборе коэффициентов левая часть (8) переписется в виде

$$\sum_{\tau=0}^s \frac{(-1)^\tau}{\tau!(s-\tau)!} S(\tau), \quad (9)$$

где

$$S(\tau) = (s - \tau)^{j-1} \prod_{x=s+1}^{N-1} b_1(x - \tau) \prod_{x=n+1}^s a(x - \tau).$$

Поскольку степень многочлена $S(\tau)$ меньше s , то из леммы 1 следует, что сумма (9) равна нулю. Мы видим, что степени многочленов $\tilde{P}_j(z)$, $j = 1, \dots, m$, не превосходят n . Непосредственно проверяется, что при $s = 0, 1, \dots, n$, и $j = 1, \dots, m$, выполняется равенство $p_{js} = \tilde{p}_{js}$. Отсюда ясно, что порядок нуля функций (6) не меньше N , и лемма доказана.

В дальнейшем через $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, которые не зависят от n , но могут зависеть от корней многочленов $a(x)$ и $b(x)$, от упоминаемого в условии теоремы числа ω и от поля $\mathbb{I}$ (а также, возможно, и от других параметров, возникающих по ходу дела).

ЛЕММА 3. *Имеют место оценки*

$$|p_{js}| \leq \left(\frac{n!}{s!}\right)^{m-r} e^{\gamma_1 n}, |P_j(\omega/q)| \leq (n!)^{m-r} e^{\gamma_1 n}, |R_{ij}(\omega/q)| \leq (n!)^{-\frac{m-r}{m-1}} |q|^{-N} e^{\gamma_1 n}. \quad (10)$$

Доказательство леммы носит чисто технический характер. Все оценки без труда выводятся из (5) и (6); при выводе последней оценки учитывается порядок нуля функций (6). Отметим также, что при выводе оценок (10) может оказаться полезной формула Стирлинга для Γ -функции Эйлера (см., например, [9, с. 323, формула (4.3 : 8'')]).

4. Совокупность приближений

Без труда проверяется, что функция $\psi_1(z)$ удовлетворяет уравнению

$$b(\delta)y = a(\delta)zy, \quad \delta = z \frac{d}{dz}. \quad (11)$$

Из (11) следует, что совокупность функций (1) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений $Y' = AY$, где $Y = (y_1, \dots, y_m)^\top$, а квадратная матрица m -го порядка A составлена из рациональных функций, общий наименьший знаменатель которых обозначим через $Q = Q(z)$. Пусть

$$P_j^{(1)} = P_j^{(1)}(z) = P_j(z), \quad j = 1, \dots, m, \quad R_1 = R_1(z) = \left(R_{ij}^{(1)}\right)_{i,j=1,\dots,m},$$

где

$$R_{ij}^{(1)} = R_{ij}^{(1)}(z) = R_{ij}(z).$$

Тогда

$$R_1 = \Psi P_1 - (\Psi P_1)^\top,$$

$$\Psi = \Psi(z) = (\psi_1(z), \dots, \psi_m(z))^\top = (\psi_1, \dots, \psi_m)^\top, \quad P_1 = (P_1^{(1)}, \dots, P_m^{(1)}).$$

Определим матрицы

$$R_k = \left(R_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=1,\dots,m}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

по индукции равенством

$$R_k = Q(R'_{k-1} - AR_{k-1} + (AR_{k-1})^\top). \quad (12)$$

Непосредственно проверяется, что при этом выполняются равенства

$$R_k = \Psi P_k - (\Psi P_k)^\top, \quad P_k = (P_1^{(k)}, \dots, P_m^{(k)}) = Q(P'_{k-1} - P_{k-1}A^\top), \quad k = 2, 3, \dots \quad (13)$$

ЛЕММА 4. При всех достаточно больших n определитель

$$\Delta(z) = \left| P_j^{(k)}(z) \right|_{k,j=1,\dots,m} \quad (14)$$

отличен от тождественного нуля.

Доказательство см. [10, с. 395, лемма 4]. При доказательстве важную роль играет линейная независимость функций (1) над $\mathbb{C}(z)$.

Дальнейшие рассуждения хорошо известны, см. [11]; они направлены на то, чтобы получить отличный от нуля числовой определитель типа (14), в котором z заменено на ω/q . С помощью этих рассуждений мы получим определитель

$$\left| P_j^{(k_i)}(\omega/q) \right|_{i,j=1,\dots,m}, \quad (15)$$

который отличен от нуля, и при этом индексы $k_1, \dots, k_m$ ограничены сверху константой γ_2 .

5. Оценки знаменателей

ЛЕММА 5. Пусть $\lambda \in \mathbb{I}$, а натуральное число Λ таково, что $\Lambda\lambda \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$, и пусть k_1 и k_2 , $k_1 \leq k_2$, — произвольные целые рациональные числа. Тогда

1) если $\lambda \in \mathbb{Q}$, то

$$\Lambda^{k_2-k_1+1} \prod_{x=k_1}^{k_2} (\lambda + x) \quad (16)$$

делится на $\Omega_1 = \prod_{p \nmid \Lambda} p^{\left\lfloor \frac{k_2-k_1+1}{p} \right\rfloor}$,

2) а если $\lambda \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}$, то число (16) делится на $\Omega_2 = \prod_{p \nmid \Lambda D}^* p^{\left\lfloor \frac{k_2-k_1+1}{p} \right\rfloor}$, где D — дискриминант поля $\mathbb{I}$, а $\prod^*$ означает, что произведение распространено лишь на те простые числа (удовлетворяющие указанным условиям), которые в поле $\mathbb{I}$ разлагаются в произведение двух (различных) простых идеалов;

3) имеют место оценки

$$\Omega_i \geq ((k_2 - k_1 + 1)!)^{1/i} e^{\gamma_3(k_1-k_2)}, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

Доказательство первого утверждения и оценки (17) при $i = 1$ содержится в доказательстве [12, с. 186, лемма 2]. Доказательство второго утверждения и оценки (17) при $i = 2$ содержится в [8, с. 68, лемма 4].

ЛЕММА 6. Пусть числа λ_1 и λ_2 рациональны, и пусть $\lambda_2 \notin \{-1, \dots, -n\}$. Тогда общий наименьший знаменатель множества чисел

$$\prod_{x=k_1}^{k_2} \frac{\lambda_1 + x}{\lambda_2 + x}, \quad 1 \leq k_1 \leq k_2 \leq n. \quad (18)$$

оценивается сверху величиной $e^{\gamma_4 n}$.

Доказательство. В качестве общего знаменателя чисел (18) можно взять число

$$\Omega = \Lambda^n \prod_{x=1}^n (\lambda_2 + x) \prod_{p \nmid \Lambda, p \leq n} p^{3 - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor},$$

где натуральное число Λ таково, что числа $\Lambda\lambda_1$ и $\Lambda\lambda_2$ лежат в $\mathbb{Z}$. В самом деле, после умножения (18) на Ω мы получим

$$\frac{\Lambda^{n+k_1-k_2-1} \prod_{x=1}^{k_1-1} (\lambda_2 + x) \prod_{x=k_2+1}^n (\lambda_2 + x)}{\prod_{p \nmid \Lambda} p^{\left[\frac{k_1-1}{p}\right]} \prod_{p \nmid \Lambda} p^{\left[\frac{n-k_2}{p}\right]}} \cdot \frac{\Lambda^{k_2-k_1+1} \prod_{x=k_1}^{k_2} (\lambda_1 + x)}{\prod_{p \nmid \Lambda} p^{\left[\frac{k_2-k_1+1}{p}\right]}} \cdot \prod_{p \nmid \Lambda, p \leq n} p^3 \times \\ \times \prod_{p \nmid \Lambda} p^{\left[\frac{k_1-1}{p}\right] + \left[\frac{n-k_2}{p}\right] + \left[\frac{k_2-k_1+1}{p}\right] - \left[\frac{n}{p}\right]},$$

т.е., как легко видеть, целое число. Используя (17) при $i = 1$, легко получить и оценку сверху для Ω . Лемма доказана.

Заметим, что эту лемму можно доказать, следуя рассуждениям из [12, с. 186, доказательство леммы 2].

6. Доказательство теоремы

Рассмотрим теорему 1. В условиях этой теоремы количество рациональных корней многочлена $b_1(x)$ равно $m - m_1 - 1 = 2r - 2 \geq r - 1$. Выделим в каждом слагаемом в правой части равенства (5) дробь

$$\frac{\prod_{x=s+1}^n b_1(x - \tau)}{\prod_{x=s+1}^n \prod_{i=1}^{r-1} (\alpha_i + x - \tau)}, \quad 0 \leq \tau \leq s, \quad 0 \leq s \leq n. \quad (19)$$

Из леммы 6 следует, что общий наименьший знаменатель всех таких дробей оценивается сверху величиной $e^{\gamma_5 n}$. Далее, в правой части равенства (5) можно выделить множитель

$$\frac{1}{\tau!(s - \tau)! \prod_{x=s+1}^n (\alpha_r + x - \tau)}, \quad 0 \leq \tau \leq s \leq n. \quad (20)$$

Через Λ обозначим такое натуральное число, что все корни многочленов $a(x)$ и $b(x)$ становятся целыми после умножения на это число; такое соглашение вполне соответствует использованию символа Λ в леммах 5 и 6.

Заметим, что если умножить любое из чисел (20) на

$$\Lambda^n n! \prod_{x=1}^n (\alpha_r + x) \prod_{p \nmid \Lambda D, p \leq n}^* p^{3 - \left[\frac{n}{p}\right]},$$

то мы получим после очевидных преобразований такую дробь

$$\frac{n!}{\tau!(s - \tau)! \prod_{p \nmid \Lambda D}^* p^{\left[\frac{n-s}{p}\right]}} \cdot \frac{\Lambda^{n-\tau} \prod_{x=1}^{s-\tau} (\alpha_1 + x)}{\prod_{p \nmid \Lambda D}^* p^{\left[\frac{s-\tau}{p}\right]}} \times \\ \times \frac{\Lambda^\tau \prod_{x=n-\tau+1}^n (\alpha_1 + x)}{\prod_{p \nmid \Lambda D}^* p^{\left[\frac{\tau}{p}\right]}} \cdot \frac{\prod_{p \nmid \Lambda D, p \leq n}^* p^{\left[\frac{n-s}{p}\right] + \left[\frac{s-\tau}{p}\right] + \left[\frac{\tau}{p}\right] + 3}}{\prod_{p \nmid \Lambda D}^* p^{\left[\frac{n}{p}\right]}}. \quad (21)$$

В силу леммы 5 последнее выражение является целым числом в поле $\mathbb{I}$. Общим наименьшим знаменателем некоторого множества чисел из мнимого квадратичного поля $\mathbb{I}$ называется наименьшее по модулю ненулевое целое число из этого поля, после умножения на которое все числа данного множества становятся целыми в этом поле. Суммируя вышесказанное, получаем с помощью (17) при $i = 2$, формулы Стирлинга, а также известного соотношения $\prod_{p \leq n} p = e^{O(n)}$, см., например [13, с. 24, теорема 3.1], что общий наименьший знаменатель

дробей (20) оценивается сверху величиной $(n!)^{3/2}e^{\gamma_6 n}$. В состав дроби (5) входит также множитель

$$\prod_{x=n+1}^{N-1} b_1(x - \tau). \quad (22)$$

Используя лемму 5, получим, что множитель (22) после домножения на Λ^n делится на натуральное число, которое оценивается снизу величиной

$$(n!)^{\frac{2m-m_1-2}{2(m-1)}} e^{-\gamma_7 n}.$$

Теперь мы можем доказать теорему 1. Заметим сначала, что не все числа $\psi_1(\xi), \dots, \psi_m(\xi)$, где через ξ обозначено фигурирующее в формулировке теоремы 1 число ω/q , равны нулю — это следует из того, что функция $\psi(z)$ удовлетворяет уравнению (11). Будем считать для определенности, что $\psi_1(\xi) \neq 0$. Поскольку определитель (15) отличен от нуля, то при любом нетривиальном наборе целых в поле $\mathbb{I}$ чисел $h_1, \dots, h_m$ найдется строка этого определителя, для которой

$$\sum_{j=1}^m h_j P_j^{(k)}(\xi) \neq 0, \quad (23)$$

где $1 \leq k \leq \gamma_2$. Оценим модуль выражения (23) снизу, считая, что $k = 1$. Суммируя изложенные выше соображения, касающиеся знаменателей дробей (19) и (20) и делителя произведения (23), получим такую оценку (с учетом того, что $\xi = \omega/q$)

$$\left| \sum_{j=1}^m h_j P_j^{(1)}(\xi) \right| \geq |q|^{-n} e^{-\gamma_8 n} (n!)^{-\frac{m+m_1-1}{2(m-1)}}.$$

Если $1 < k \leq \gamma_3$, то, используя рекуррентные соотношения (13), мы можем написать такую оценку

$$\left| \sum_{j=1}^m h_j P_j^{(k)}(\xi) \right| \geq |q|^{-n-\gamma_9} e^{-\gamma_9 n} (n!)^{-\frac{m+m_1-1}{2(m-1)}}, \quad (24)$$

причем последние две оценки справедливы, если сумма в левой части отлична от нуля. Для получения оценки сверху перепишем выражение из левой части (23) следующим образом

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m h_j P_j^{(k)}(\xi) &= \\ &= \frac{1}{\psi_1(\xi)} \left(P_1^{(k)}(\xi) \sum_{j=1}^m h_j \psi_j(\xi) + \sum_{j=2}^m h_j (P_j^{(k)}(\xi) \psi_1(\xi) - P_1^{(k)}(\xi) \psi_j(\xi)) \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Если здесь предположить, что

$$\sum_{j=1}^m h_j \psi_j(\xi) = 0,$$

то, с учетом (10) и (12) получим такое неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^m h_j \psi_j(\xi) \right| \leq H(n!)^{-\frac{m-r}{m-1}} |q|^{-n-\frac{n}{m-1}+\gamma_9} e^{\gamma_{10} n}, \quad (26)$$

где $H = \max(|h_1|, \dots, |h_m|)$. Вспоминая, что $m_1 = m - 2r + 1$, мы видим, что оценки (24) и (26) противоречивы при достаточно большом $|q|$, что и доказывает теорему 1.

7. Заключение

Обычно арифметическую природу значений гипергеометрических функций рассматривают в малых точках, когда в правой части (1) степени многочленов $a(x)$ и $b(x)$ равны. Однако, в ряде случаев можно получить новые результаты, ограничиваясь лишь малыми точками, и для целых гипергеометрических функций. При этом в случае иррациональных параметров приходится иметь дело с техническими трудностями, вызванными недостаточной точностью оценок общего наименьшего знаменателя некоторых дробей специального вида, см. [4, лемма 6]. Примеры таких результатов см. в работах [14] и [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Galochkin A. I. On effective bounds for certain linear forms // New Advances in Transcendence theory. Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney. 1988. P. 207–215.
2. Galochkin A. I. Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions // Moscow journal of combinatorics and number theory. 2011. Vol. 1, iss. 2. P. 27–32.
3. Иванков П. Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 1, № 1. 1995. С. 191–206.
4. Галочкин А. И. Об арифметических свойствах некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. Т. XVII, № 6. 1976. С. 1220–1235.
5. Галочкин А. И. О диофантовых приближениях значений некоторых целых функций с алгебраическими коэффициентами. I // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1978. № 6. С. 25–32.
6. Галочкин А. И. О диофантовых приближениях значений некоторых целых функций с алгебраическими коэффициентами. II // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1979. № 1. С. 26–30.
7. Галочкин А. И. О некотором аналоге метода Зигеля // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1986. № 2. С. 30–34.
8. Иванков П. Л. О значениях гипергеометрических функций с различными иррациональными параметрами // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 11, № 6. 2005. С. 65–72.
9. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, том 2. М.: Наука, 1968.
10. Иванков П. Л. О совместных приближениях, учитывающих специфику однородного случая // Математические заметки. Т. 71, вып. 3. 2002. С. 390–397.
11. Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V. Applications of Pade approximations to diophantine inequalities in values of G -functions // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1135. P. 9–51.
12. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа М.: Наука, 1987.
13. Прахар К. Распределение простых чисел М.: Мир, 1967.
14. Иванков П. Л. О значениях функций с различными иррациональными параметрами в малых точках // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электронный журнал. 2014, № 9. С. 65–74.
15. Иванков П. Л. О значениях продифференцированных по параметру гипергеометрических функций // Чебышевский сборник. Т. 13, вып. 2. 2012. С. 64–70.

REFERENCES

1. Galochkin, A. I. 1988, "On effective bounds for certain linear forms", *New Advances in Transcendence theory*. Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney, pp. 207–215.
2. Galochkin, A. I. 2011, "Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions", *Moscow journal of combinatorics and number theory*, v. 1, iss. 2, pp. 27–32.
3. Ivankov, P. L. 1995, "On linear independence of the values of some functions", *Fundamentalnaja i Prikladnaja Matematika*, v. 1, no. 1, pp. 191–206. (Russian).
4. Galochkin, A. I. 1976, "On arithmetic properties of the values of some entire hypergeometric functions", *Sibirsk. Mat. Zh.*, vol. 17, no. 6, pp. 1220–1235. (Russian)
5. Galochkin, A. I. 1978, "On diophantine approximations of the values of some entire functions with algebraic coefficients. I", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, no. 6, pp. 25–32. (Russian).
6. Galochkin, A. I. 1979, "On diophantine approximations of the values of some entire functions with algebraic coefficients. II", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, no. 1, pp. 26–30. (Russian).
7. Galochkin, A. I. 1986, "On some analog of Siegel's method", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Meh.*, no. 2, pp. 30–34. (Russian).
8. Ivankov, P. L. 2005 "On the values of hypergeometric functions with different irrational parameters", *Fundamentalnaja i Prikladnaja Matematika*, v. 11, no. 6, pp. 65–72. (Russian).
9. Markushevich, A. I. 1967, "Teoriya analiticheskikh funktsii, v. II" [Theory of analytic functions], Nauka, Moscow, 486 pp. (Russian)
10. Ivankov, P. L. 2002, "On simultaneous approximations taking into account a specific character of a homogeneous case", *Mat. Zametki*, v. 71, no. 3, pp. 390–397. (Russian).
11. Chudnovsky, D. V., Chudnovsky, G. V. 1985, "Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G -functions", *Lecture Notes in Math.*, v. 1135. pp. 9–51.
12. Shidlovskii, A. B. 1987, "Transtsendentnye chisla [Transcendental numbers], Nauka, Moscow, 448 pp. (Russian)
13. Prachar, K. 1967, "Raspredelenije prostych chisel [Distribution of prime numbers], Mir, Moscow, 511 pp. (Russian)
14. Ivankov, P. L. 2014, "On the values of hypergeometric functions with different irrational parameters at small points", *Science and education of the Bauman MSTU*, no. 9, pp. 65–74. (Russian)
15. Ivankov, P. L. 2012, "On the values of differentiated with respect to parameter hypergeometric functions", *Chebyshevsky sbornik*, v. 13, no. 2, pp. 64–70. (Russian)

Получено 23.09.2019 г.

Принято в печать 12.11.2019 г.