ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 511.43

 $DOI\ 10.22405/2226\text{--}8383\text{--}2019\text{--}20\text{--}3\text{--}246\text{--}260$

n-короны в разбиениях тора на множества ограниченного остатка

А. А. Жукова, А. В. Шутов

Жукова Алла Адольфовна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Владимирский филиал (г. Владимир).

e-mail: qeorq967@mail.ru

Шутов Антон Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной техники и систем управления, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых (ВлГУ) (г. Владимир).

e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

Теория геометрических подстановок Арно-Ито позволяет строить последовательности обобщенных перекладывающихся разбиений d-мерного тора. Эти разбиения состоят из параллелепипедов d+1 типа, а действие некоторого сдвига тора на разбиении сводится к перекладыванию d+1 центрального параллелепипеда. Более того, множество вершин всех параллелепипедов разбиения представляет собой фрагмент орбиты нуля относительно этого сдвига тора. Рассматриваемые разбиения активно используются в различных задачах теории чисел, комбинаторики и теории динамических систем.

В настоящей работе изучается локальная структура разбиений тора, получаемых на основе геометрических подстановок. *п*-короной параллелепипеда называется множество всех параллелепипедов, отстоящих от данного на расстояние не более *n* в естественной метрике разбиения. Задача состоит в описании всех возможных типов *n*-корон.

Каждому параллелепипеду разбиения естественным образом присваивается номер – его номер в орбите соответствующего центрального параллелепипеда относительно сдвига тора. Доказано, что множество всех номеров распадается на конечное число полуинтервалов, определяющих возможные типы n-корон. Более того, доказано, что границы соответствующих полуинтервалов определяются номерами параллелепипедов, входящих в n-корону набора из d+1 центрального параллелепипеда.

Показано, что этот результат можно рассматривать как некоторое многомерное обобщение знаменитой теоремы о трех длинах. Ранее аналогичное описание было получено для 1-корон разбиений тора получаемых при помощи одной конкретной геометрической подстановки: подстановки Рози. Кроме того, аналогичные результаты ранее были получены для ряда квазипериодических разбиений плоскости.

В заключении сформулирован ряд направлений для дальнейшего исследования.

Ключевые слова: геометрические подстановки, теория Арно-Ито, обобщенное перекладывающееся разбиение тора, локальная структура, *n*-корона.

Библиография: 33 названий.

Для цитирования:

А. А. Жукова, А. В. Шутов. n-короны в разбиениях тора на множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 246–260.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 511.43

 $DOI\ 10.22405/2226\text{--}8383\text{--}2019\text{--}20\text{--}3\text{--}246\text{--}260$

n-crowns in toric tilings into bounded remander sets

A. A. Zhukova, A. V. Shutov

Zhukova Alla Adolfovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Information Technologies, Russian Academy of National Economy and Public Administration under the President of Russian Federation, Vladimir branch (Vladimir).

e-mail: georg967@mail.ru

Shutov Anton Vladimirovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer Engineering and Control Systems, Vladimir State University named after Alexander and Nicholay Stoletovs (VlSU) (Vladimir).

e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

The Arnoux-Ito theory of geometric substitutions allows to construct sequences of generalized exchanged tilings of the d-dimensional torus. These tilings consist of parallelepipeds of d+1 type, and the action of a certain toric shift on the tiling reduces to exchanging of the d+1 central parallelepipeds. Moreover, the set of vertices of all parallelepipeds of the tiling is a fragment of the orbit of zero point under considered toric shift. The considered tilings are actively used in various problems of number theory, combinatorics, and the theory of dynamical systems.

In this paper, we study the local structure of toric tilings obtained using geometric substitutions. The n-corona of the parallelepiped is a set of all parallelepipeds located at a distance of not greater than n from a given parallelepiped in the natural metric of the tiling. The problem is to describe all possible types of n-coronas.

With each parallelepiped in the tiling we can naturally assigned a number — its number in the orbit of the corresponding central parallelepiped with respect to the toric shift. It is proved that the set of all parallelepipeds numbers splits into a finite number of half-intervals defining possible types of n-coronas. Moreover, it is proved that the boundaries of the corresponding half-open intervals are determined by the numbers of the parallelepipeds in the n-corona of the set of d+1 central parallelepiped.

It is shown that this result can be considered as some multi-dimensional generalization of the famous three lengths theorem. Earlier, a similar description was obtained for 1-coronas of the toric tilings obtained using one specific geometric substitution: the Rauzy substitution. In addition, similar results were previously obtained for some quasiperiodic plane tilings.

In conclusion, some directions for further research are formulated.

Keywords: geometric substitutions, Arnoux-Ito theory, generalized exchanged toric tiling, local structure, n-corona.

Bibliography: 33 titles.

For citation:

A. A. Zhukova, A. V. Shutov, 2019, "n-crowns in toric tilings into bounded remander sets", Chebyshevskii sbornik, vol. 20, no. 3, pp. 246–260.

1. Введение

Пусть L — некоторая решетка, v — иррациональный относительно решетки L вектор, то есть вектор, координаты которого в некотором базисе решетки L линейно независимы над $\mathbb Z$ вместе с единицей (очевидно, что данное определение не зависит от выбора базиса). Отображение сдвига

$$S: x \to x + v \pmod{L}$$

переводит тор $\mathbb{T}^d=\mathbb{R}^d/L$ в себя. Разбиение

$$\mathbb{T}^d = \coprod_{j=1}^{d+1} \coprod_{i=0}^{\sharp E_j - 1} \mathbb{E}_j(i)$$

d-мерного тора на непересекающиеся множества d+1 типа называется обобщенным перекладывающимся разбиением тора, если действие сдвига S на этом разбиении сводится к перекладыванию множеств $E_j(0)$, а объединение всех множеств $E_j(0)$, $1 \le j \le d+1$ изоморфно развертке некоторого d-мерного тора. Данное понятие впервые было введено в [29] и позднее, независимо, в [17], хотя первые примеры таких разбиений были получены существенно ранее.

Интерес к обобщенным перекладывающимся разбиениям тора в первую очередь связан с тем, что они состоят из множеств ограниченного остатка относительно сдвига S [17], [29]. Более того, в этих случаях возможна эффективная оценка остаточного члена соответствующей проблемы распределения дробных долей линейной функции [19], [26], [30]. Также имеются связи обобщенных перекладывающихся разбиений тора с комбинаторикой слов [20] и многомерными диофантовыми приближениями [16], [18].

В одномерном случае фактически существует один вид обобщенных перекладывающихся разбиений — разбиения Фибоначчи. Данные разбиения впервые были введены Журавлевым [21] для сдвига $x \to x - \tau \mod 1$, $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Далее эти разбиения были обобщены Мануйловым на случай сдвигов, связанных с так называемыми серебряными сечениями [27], [28] и Шутовым на случай произвольных сдвигов [25], [31], [32].

В многомерном случае мы крайне далеки от полного описания обобщенных перекладывающихся разбиений тора. Можно выделить три основных подхода к построению таких разбиений:

- 1) Теория геометрических подстановок Арно-Ито [1], [4], [26], [30];
- 2) Теория фракталов Рози [4], [5], [22];
- 3) Дифференцирование разбиений тора [17].

В настоящее время уделяется большое внимание изучению геометрических свойств конкретных обобщенных перекладывающихся разбиений тора. Это связано с очевидной интерпретацией соответствующих результатов в терминах геометрии орбит иррациональных сдвигов тора, а также другими многочисленными приложениями в арифметике, динамике и комбинаторике. Подробное изложение соответствующих результатов может быть найдено в книгах [4], [10]. Особый интерес при этом представляет подход, связанный с разбиениями Арно-Ито, поскольку множество вершин таких разбиений имеет вид $\{S^k(0)\}$, $0 \le k < k_0$.

В работе [15] была рассмотрена локальная структура простейшего бесконечного семейства обобщенных перекладывающихся разбиений тора, получаемого на основе конструкции Арно-Ито и связанного со знаменитой подстановкой Рози. Данное разбиение состояло из ромбов трех различных типов. Было показано, что во всех разбиениях существует ровно 9 типов наборов ромбов, соседних с заданным ромбом. Также был дан способ позволяющий по ромбу разбиения однозначно установить его соседей. Кроме того, было показано, что эти результаты можно рассматривать как первый шаг к многомерному обобщению знаменитых теорем о трех длинах и трех прыжках [2], [6], [11], [12], [13].

Интересно отметить, что ранее результаты, аналогичные результатам из [15] были получены для ряда бесконечных квазипериодических разбиений плоскости, где удавалось получить

описание тайлов соседних с заданным тайлом разбиения в терминах так называемого параметра этого тайла [8], [9], [23], [33]. При этом с точки зрения теории бесконечных квазипериодических разбиений множество тайлов, соседних с данным тайлом X, образует так называемую 1-корону тайла Crn(X,1) [7]. Можно также индуктивно определить n-корону Crn(X,n) как объединение (n-1)-короны Crn(X,n-1) и множества соседних с ней тайлов разбиения. Для ряда бесконечных квазипериодических разбиений плоскости удается получить описание произвольных n-корон [14], [24], [33].

В настоящей работе рассматриваются произвольные обобщенные перекладывающиеся разбиения тора, построенные на основе теории геометрических подстановок Арно-Ито и дается полное описание их n-корон для произвольного n.

2. Вспомогательные результаты

Пусть имеется алфавит $A=\{1,2,\ldots,d+1\}$. Элементы множества $A^*=\bigcup_{k=0}^\infty A^k$ назовем словами над алфавитом A. Определим отображение $\sigma:A\to A^*$ такое, что все слова $\sigma(i)$, где $i\in A$, непусты. Слово $a\in A^*$ запишем в виде $a=a_1a_2\ldots a_n$, где $a_i\in A$. Положим по определению $\sigma(a)=\sigma(a_1)\sigma(a_2)\ldots\sigma(a_n)$, таким образом отображение σ продолжено до отображения $\sigma:A^*\to A^*$. Отображение σ , определенное таким образом называется подстановкой над алфавитом A.

Назовем матрицей подстановки σ матрицу $M_{\sigma} = (m_{ij})_{i,j=1}^d$, элементами которой являются m_{ij} — количество вхождений символа i в слово j.

Подстановка называется примитивной, если существует k такое, что для любых i, j символ i входит в слово $\sigma(j)$. Подстановка называется унимодулярной, если $\det M_{\sigma}=\pm 1$.

Рассмотрим множество Λ , состоящего из базисных множеств

$$(x,j^*) = \left\{ x + \sum_{\substack{l=1,\\l \neq j}}^{d+1} \mu_l e_l : 0 \leqslant \mu_l < 1 \right\},$$

где e_l таковы, что образуют базис $B = \{e_1, e_2, \dots, e_{d+1}\}$ в пространстве \mathbb{R}^{d+1} . Точку x базисного множества (x, i^*) назовем $\mathit{ommevenno}\check{u}$.

Для примитивной унимодулярной подстановки σ определим геометрическую подстановку Θ_{σ} по следующему правилу: каждому слову ω поставим в соответствие d+1-мерный векторстолбец $ab(\omega)$, компонентами которого являются числа, равные количеству вхождения символов алфавита A в слово ω . Затем для образов $\sigma(j)$, где $j \in A$, рассмотрим всевозможные представления вида $\sigma(i) = YiW$, такие что $i \in A$, а Y и W — некоторые слова над алфавитом A.

Будем полагать

$$\Theta_{\sigma}(0, i^*) = \coprod_{j=1}^{d+1} \coprod_{\substack{W, \\ \sigma(j) = YiW}} \left(M_{\sigma}^{-1} ab(W), j^* \right). \tag{1}$$

Продолжим отображение Θ_{σ} на все множество Λ

$$\Theta_{\sigma}(0, i^*) = M_{\sigma}^{-1} x + \Theta_{\sigma}(0, i^*)$$

и на множество комбинаций базисных множеств:

$$\Theta\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda}\lambda\right)=\coprod_{\lambda\in\Lambda}\Theta(\lambda).$$

Положим

$$D_k^{(j)} = \Theta_{\sigma}^k(0, j^*), \qquad D_k = \prod_{j=1}^{d+1} D_k^{(j)}.$$

Обозначим через v_{σ} и v_{σ}^* правый и левый собственные векторы матрицы M_{σ} , соответствующие ее наибольшему собственному значению λ_{σ} . Пусть P_{σ} — это d-мерное подпространство, ортоганальное вектору v_{σ}^* . Заметим, что подпространство P_{σ} инвариантно относительно отображения M_{σ} . Обозначим через π проекцию вдоль вектора v_{σ} на подпространство P_{σ} . Отметим, что отображение M_{σ} коммутирует с отображением π .

 Π ЕММА 1. Ограничение отображения π на множество D_k является взаимно-однозначным отображением при любом k.

Данная лемма доказана в книге [4]

Рассмотрим d-мерные множества $T_k = \pi\left(D_k\right)$ и $T_k^{(j)} = \pi\left(D_k^{(j)}\right)$. На множестве T_k введем отображение S_k^* определяемое следующим образом:

$$S_k^*(x) = x + \pi\left(f_i^{(k)}\right), \qquad$$
если $x \in T_k^{(j)},$

где $f_i^{(k)}-i$ -й вектор-столбец матрицы $M_\sigma^{-k}.$

В книге [4] сформулирована и доказана следующая лемма.

 Π ЕММА 2. Отображение $S_k^*(x)$ является взаимно-однозначным отображением множества T_k в себя.

Введем в расмотрение решетки:

$$L_0 = \left\{ \sum_{k=1}^d k_i (e_i - e_{d+1}) : k_i \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad L_N = M_{\sigma}^{-k}(L_0).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sigma-$ примитивная унимодулярная подстановка. Тогда множество T_k представляет собой фундаментальную область решетки $\pi\left(L_k\right)$. Кроме того, существует сдвиг $S_k: x \to x + v_k \pmod{\pi\left(L_k\right)}$ тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\pi\left(L_k\right)$, действие которого на $\mathbb{R}^d/\pi\left(L_k\right)$ изоморфно действию S_k^* на T_k . При этом в качестве вектора v_k можно взять любой из векторов $\pi\left(f_i^{(k)}\right)$. Если ι_k означает естественную проекцию $T_k \to \mathbb{R}^d/\pi\left(L_k\right)$, то диаграмма

$$T_{k} \xrightarrow{S_{k}^{*}} T_{k}$$

$$\downarrow^{\iota_{k}} \qquad \downarrow^{\iota_{k}}$$

$$\mathbb{R}^{d}/\pi \left(L_{k}\right) \xrightarrow{S_{k}} \mathbb{R}^{d}/\pi \left(L_{k}\right)$$

коммутативна.

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [4].

Наиболее известными примерами примитивных неприводимых унимодулярных подстановок на трехсимвольном алфавите являются подстановка Рози

$$\begin{array}{cccc} & 1 & \rightarrow & 12 \\ \sigma_R: & 2 & \rightarrow & 13 \\ & 3 & \rightarrow & 1 \end{array}$$

и два семейства подстановок Якоби-Перрона

$$\sigma_{(a,0)}: \begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & \overbrace{11\dots 2}^{a & \text{pa3}} \\ 2 & \rightarrow & 3 \\ 3 & \rightarrow & 1, \end{array}$$

$$\sigma_{(a,1)}: \begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & \overbrace{11\dots 3}^{a \text{ pa3}} \\ 2 & \rightarrow & 1 \\ 3 & \rightarrow & 2 \end{array}$$

Соответствующие геометрические подстановки изображены на рисунках 1–3.

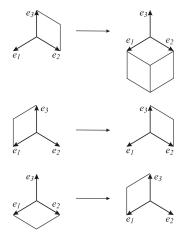


Рис. 1. Геометрическая подстановка, соответствующая подстановке σ_R

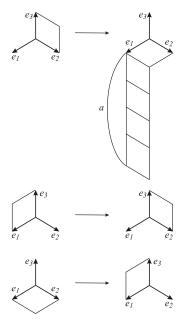


Рис. 2. Геометрическая подстановка, соответствующая подстановке $\sigma(a,0)$

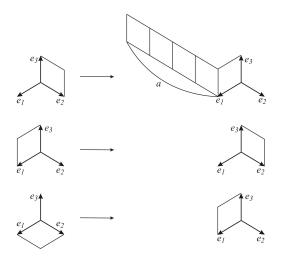


Рис. 3. Геометрическая подстановка, соответствующая подстановке $\sigma(a,1)$

В статье [30] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $E_{j}(0) = \pi(0, j^{*}), E_{j}(i) = S_{k}^{*i}(\pi(0, j^{*})), \mathbb{E}_{j}(i) = \iota_{k}^{-1}(E_{j}(i)), \sharp E_{j} -$ количество множеств типа E_{j} , тогда множества $\mathbb{E}_{j}(i)$ образуют разбиение тора \mathbb{T}^{d} вида

$$\mathbb{T}^d = \coprod_{j=0}^{d+1} \coprod_{i=0}^{\sharp E_j - 1} \mathbb{E}_j(i).$$

Сформулируем и докажем следующую лемму.

 Π ЕММА 3. Пусть v_j — вектор, соединяющий отмеченные точки двух множеств, тогда найдется целое число C_j , т.ч.

$$\pi(v_j) \equiv C_j \pi\left(f_1^{(k)}\right) \pmod{\pi(L_k)}.$$

Доказательство. Рассмотрим два произвольных множества $E_{j'}(i')$ и $E_{j''}(i'')$ разбиения T_k , тогда согласно теореме 2 справедливы равенства

$$E_{j'}(i') = S_k^{*i'}(E_{j'}(0)), \quad E_{j''}(i'') = S_k^{*i''}(E_{j''}(0)).$$

Обозначим через $x\left(E_{j'}(i')\right)$, $x\left(E_{j''}(i'')\right)$ отмеченные точки множеств $E_{j'}(i')$, $E_{j''}(i'')$, и воспользуемся утверждением теоремы 1, согласно которому имеют место сравнения

$$x\left(E_{j'}(i')\right) \equiv i'\pi\left(f_1^{(k)}\right) \pmod{\pi(L_k)}$$

И

$$x\left(E_{j''}(i'')\right) \equiv i''\pi\left(f_1^{(k)}\right) \pmod{\pi(L_k)}.$$

Пусть вектор v_j , соединяет отмеченные точки множеств $E_{j'}(i')$ и $E_{j''}(i'')$, т.е.

$$v_j = x \left(E_{j''}(i'') \right) - x \left(E_{j'}(i') \right),$$

тогда справедливо сравнение

$$\pi(v_j) \equiv (i'' - i')\pi\left(f_1^{(k)}\right) \pmod{\pi(L_k)}.$$

Обозначим через C_j разность чисел i'' и i', и получим утверждение леммы 3.

3. Основной результат

Определим n-корону $Crn(\mathbb{T}_0,n)$ для $\mathbb{T}_0=\coprod_{j=1}^{d+1}\mathbb{E}_j(0)$ индуктивно. Назовем 1-короной

 $Crn(\mathbb{T}_0,1)$ множества \mathbb{T}_0 само множество \mathbb{T}_0 вместе со всеми множествами соседними с множеством \mathbb{T}_0 . Предположим, что имеется n-корона $Crn(\mathbb{T}_0,n)$ множества \mathbb{T}_0 . Назовем (n+1)-короной $Crn(\mathbb{T}_0,n+1)$ множества \mathbb{T}_0 n-корону вместе со всеми множествами, соседними к множествам n-короны. При n=0 корона $Crn(\mathbb{T}_0,0)$ совпадает с \mathbb{T}_0 .

Точно так же определяется n-корона для любого множества $\mathbb{E}_{i}(i)$.

Пусть имеются два множества $\mathbb{E}_{j}(i)$ и $\mathbb{E}_{j}(s)$. Две n-короны, $Crn(\mathbb{E}_{j}(i), n)$ и $Crn(\mathbb{E}_{j}(i'), n)$, будем называть mpanc nu uonno эквивалентными, если существует сдвиг тора, переводящий одну корону в другую.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Teopema 3. $\Pi ycmb$

$$[0;\sharp E_j)=I_0\sqcup I_1\sqcup\ldots\sqcup I_r$$

— разбиение полуинтервала $[0;\sharp E_j)$ на замкнутые слева и открытые справа полуинтервалы, границами которых являются номера всех множеств вида $\mathbb{E}_j(i)$, входящих в $Crn(\mathbb{T}_0,n)$. Тогда $Crn(\mathbb{E}_j(i),n)$ и $Crn(\mathbb{E}_j(i'),n)$ трансляционно эквивалентны тогда и только тогда, когда i и i' принадлежат одному и тому же интервалу I_l при некотором l.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции.

Вначале убедимся, что утверждение теоремы верно при n=1. Рассмотрим 1-корону некоторого множества $\mathbb{E}_j(i)$. Эта корона состоит из множества $\mathbb{E}_j(i)$ и всех соседних с ним множеств. Обозначим через $\mathbb{E}_{j'}(i')$ множество, соседнее с множеством $\mathbb{E}_j(i)$.

Отмеченные точки $x(\mathbb{E}_{j}(i))$ и $x(\mathbb{E}_{j'}(i'))$ множеств $\mathbb{E}_{j}(i)$ и $\mathbb{E}_{j'}(i')$ соединим вектором $v_{j'}$ так, что $v_{j'} = x(\mathbb{E}_{j'}(i')) - x(\mathbb{E}_{j}(i))$. Для вектора $v_{j'}$, согласно лемме (3), найдется число $C_{j'}$ такое, что $j' = i + C_{j'}$.

В разбиении многомерного тора \mathbb{T}^d множеств вида $\mathbb{E}_{j'}(s)$ содержится в точности $\sharp E_{j'}$. Поэтому номер множества $\mathbb{E}_{j'}(i')$ должен удовлетворять неравенству $0 \leqslant i' < \sharp E_{j'}$. Множество $\mathbb{E}_{i}(i)$ имеет конечное число соседних множеств, значит справедлива система неравенств вида

$$0 \leqslant i + C_{i'} < \sharp E_{i'}. \tag{2}$$

Очевидно, что решением системы (2) является полуинтервал с включенной левой границей. Это означает, что имеет место равенство $i+C_j=0$, где $C_j=\max(-C_{j'},0)$.

Перепишем последнее равенство как $i = 0 + (-C_j)$, где число $-C_j$ соответствует вектору $-v_j$, при условии, что вектору v_j соотвествует число C_j . Следовательно, если номер множества $\mathbb{E}_j(i)$ принадлежащего $Crn(\mathbb{T}_0,1)$, совпадает с границей полуинтервала, то его 1-корона включает в себя множество с номером 0, т.е. $\mathbb{E}_{i'}(0)$.

Таким образом доказано, что если множество $\mathbb{E}_{j'}(i')$ имеет 1-корону заданного типа, то номер i' этого множества принадлежит замкнутому слева и открытому справа полуинтервалу I_l при некотором l.

Докажем обратное утверждение: если номера множеств данного вида принадлежат одному и тому же полуинтервалу I_l , то эти множества имеют 1-короны одинакового типа. Выберем такое множество $\mathbb{E}_j(s)$, что его номер s принадлежит тому же промежутку, что и номер i множества $\mathbb{E}_j(i)$. Тогда для номера s будет справедлива система неравенств аналогичная неравенству (2), т.е.

$$0 \leqslant i' + C_{j'} < \sharp E_{j'}.$$

Из каждого такого неравенства заключаем, что соседом множества $\mathbb{E}_j(i')$ обязательно будет являться множество $\mathbb{E}_r(i'+C_{j'})$. В силу того, что множество $\mathbb{E}_j(i')$ может иметь конечное

число соседних множеств, делаем вывод о том, что других соседей у множества $\mathbb{E}_j(i')$ нет, т.е. 1-короны множеств $\mathbb{E}_i(i')$ и $\mathbb{E}_i(i)$ трансляционно эквивалентны.

Таким образом доказано утверждение теоремы 3 при n=1.

Предположим, что утверждение теоремы 3 верно при n=m-1, то есть

$$[0; \sharp E_i) = I_0 \sqcup I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_r$$

— разбиение полуинтервала $[0;\sharp E_j)$ на замкнутые слева и открытые справа полуинтервалы, границами которых являются номера всех множеств вида $\mathbb{E}_q(t)$, входящих в $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$. Причем $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$ и $Crn(\mathbb{E}_j(s), m-1)$ трансляционно эквивалентны тогда и только тогда, когда i и s принадлежат одному и тому же интервалу I_l при некотором l.

Проверим, верно ли утверждение теоремы 3 при n=m учитывая, что теорема справедлива при n=m-1.

Возможны два случая: 1) $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$ совпадает с $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$ для всех $\mathbb{E}_j(i)$; 2) $Crn(\mathbb{E}_i(i), m)$ и $Crn(\mathbb{E}_i(i), m-1)$ различны хотя бы для одного $\mathbb{E}_i(i)$.

В первом случае получаем, что новых корон нет, а значит нет новых полуинтервалов. Следовательно, типы интервалов не изменились, и утверждение теоремы верно.

Во втором случае выберем то множество $\mathbb{E}_{i}(i)$ для которого

$$Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$$
 и $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$

отличаются. Согласно предположению индукции номер множества $\mathbb{E}_{j}(i)$ разбиения многомерного тора \mathbb{T}^{d} принадлежит промежутку I_{l} , являющимся одним из полуинтервалов разбиения промежутка $[0;\sharp E_{j})$. Рассмотрим m-корону множества $\mathbb{E}_{j}(i)$. Отмеченную точку множества $\mathbb{E}_{j}(i)$ соединим векторами $u_{j'}^{(m)}(\mathbb{E}_{j}(i))$ с отмеченными точками всех множеств, входящих в $Crn(\mathbb{E}_{j}(i),m)$ (рис. 4). Очевидно, что если существует еще одно множество $\mathbb{E}_{j}(i')$ с такой же m-короной, то набор векторов $u_{j'}^{(m)}(\mathbb{E}_{j}(i'))$, соединяющих отмеченную точку $\mathbb{E}_{j}(i')$ с отмеченными точками множеств входящих в $Crn(\mathbb{E}_{i}(i),m)$ будет таким же.

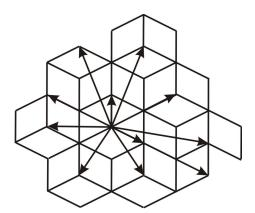


Рис. 4. Вектора $u_{j'}^{(m)}(\mathbb{E}_j(i))$

Каждому вектору $u_{j'}^{(m)}(\mathbb{E}_j(i))$ согласно лемме 3 соответствует определенное целое число $C_{j'}$. Как было доказано ранее, номер любого множества, входящего в $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$, равен сумме номера множества $\mathbb{E}_i(i)$ и числа $C_{j'}$, т. е. $i + C_{j'}$.

Пусть вектор $u_p^{(m)}(\mathbb{E}_j(i))$ соединяет отмеченные точки множеств $\mathbb{E}_j(i)$ и $\mathbb{E}_q(s)$. В силу того, что в разбиении многомерного тора \mathbb{T}^d имеется $\sharp E_q$ множеств вида $\mathbb{E}_q(s)$, получаем, что номер множества $\mathbb{E}_q(s)$ удовлетворяет двойному неравенству $0 \leq s < \sharp E_q$ или

$$0 \leqslant i + C_r < \sharp E_q. \tag{3}$$

Для каждого множества, входящего в $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$ справедливы аналогичные неравенства, поэтому для номера множества $\mathbb{E}_j(i)$ получаем систему неравенств вида (3).

Решением системы неравенств вида (3) всегда является некоторый полуинтервал с включенной левой границей. Это утверждение является следствием того, что в общем случае система, состоящая из неравенств указанного вида либо не имеет решения; либо имеет решение, которое можно записать в виде промежутка замкнутого слева и открытого справа. В нашем случае система неравенств обязательно имеет решение, т.к. для номера i множества $\mathbb{E}_j(i)$ система неравенств справедлива. Кроме того, в силу того, что система неравенств вида (3) содержит, в частности, неравенства верные для номеров множеств, входящих в $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$, получаем, что полуинтервал для номера множества $\mathbb{E}_j(i)$, имеющего $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$, будет являться частью полуинтервала I_l .

Обратное утверждение, о том, что если номера множеств данного вида принадлежат одному и тому же полуинтервалу I_t , то эти множества имеют m-короны одинакового типа, доказывается также как и для n=1.

Теперь перейдем к доказательству того, что границами полуинтервалов, указанных в условии теоремы, являются номера всех множеств вида $\mathbb{E}_q(s)$, входящих в $Crn(\mathbb{E}_i(i), m)$.

По предположению номер множества $\mathbb{E}_j(i)$, имеющего $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$ принадлежит промежутку I_l . Пусть при переходе к $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$ полуинтервал I_l разбился на несколько полуинтервалов, т.е. $I_l = I_{l_1} \sqcup I_{l_2} \sqcup \ldots \sqcup I_{l_q}$.

Каждая из границ указанных промежутков возникает в том случае, когда какое-то из неравенств вида (3) обращается в равенство.

В сиситеме неравенств вида (3) есть неравенства, записанные для множеств, принадлежащих $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$, и неравенства, полученные для множеств из $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$, но не входящих в $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$. Обозначим содержащиеся в этих неравенствах постоянные через $C_r^{(m-1)}$ и $C_r^{(m)}$ соответственно. В таком случае система неравеств, записанная для $Crn(\mathbb{E}_j(i), m)$, включает в себя два вида неравеств:

$$0 \leqslant i + C_r^{(m-1)} < \sharp E_q \tag{4}$$

И

$$0 \leqslant i + C_r^{(m)-} < \sharp E_q. \tag{5}$$

Решением системы неравенств вида (4) является поуинтервал I_l . Значит, границы полуинтервалов I_l , I_{l_2} , ..., I_{l_q} получаются при обращении в равенства неравенств вида (5), и новые границы будут равны $-C_r^{(m)-}$. Зная, что каждому числу $C_p^{(m)-}$ соответствует определенный вектор $u_p^{(m)}(\mathbb{E}_j(i))$, а, следовательно, некоторое множество $\mathbb{E}_{j''}(i'')$, выясним что это за множество. Целое число $-C_r^{(m)-}$ представим как

$$-C_r^{(m)-} = -C_{r'}^{(m-1)} - C_{r''}, (6)$$

где $C_{r'}^{(m-1)}$ соответствует вектору $u_{r'}^{(m-1)}(\mathbb{E}_j(i))$, проведенному из отмеченной точки множества $\mathbb{E}_{j'}(i')$ к отмеченной точке множества $\mathbb{E}_{j'}(i')$, соседнего с множеством $\mathbb{E}_{j''}(i'')$, а число $C_{r''}$ — вектору $v_{r''}$, соединяющему отмеченные точки множеств $\mathbb{E}_{j'}(i')$ и $\mathbb{E}_{j''}(i'')$. Число $C_r^{(m)-}$ отлично от числа $C_{r'}^{(m-1)}$, т.к. все числа $C_{r'}^{(m-1)}$, соответствующие векторам $u_{r'}^{(m-1)}(\mathbb{E}_j(i))$, являются границами полуинтервалов для номеров множеств $Crn(\mathbb{E}_j(i), m-1)$. Следовательно, число $C_r^{(m)-}$ соответствует вектору $u_{r'}^{(m)}(\mathbb{E}_j(i))$, но не вектору $u_{r'}^{(m-1)}(\mathbb{E}_j(i))$.

Заметим, что по предположению индукции числу $-C_{r'}^{(m-1)}$ соответствует вектор, проведенный из начала координат к множеству $\mathbb{E}_{j'}(i')$ из короны $Crn(\mathbb{T}_0, m-1)$. Из равенства (6) следует, что числу $-C_r^{(m)-}$ соответствует вектор, проведенный из начала координат в

множество $\mathbb{E}_{j''}(i'')$, являющееся соседним с множеством $\mathbb{E}_{j'}(i')$ из $Crn(\mathbb{T}_0, m-1)$. Данный вектор не совпадает ни с одним вектором, проведенным из начала координат к множествам из $Crn(\mathbb{T}_0, m-1)$. По предположению индукции множество $\mathbb{E}_{j''}(i'')$ не может принадлежать $Crn(\mathbb{T}_0, m-1)$, следовательно, это множество входит в $Crn(\mathbb{T}_0, m)$.

Таким образом теорема 3 полностью доказана.

4. Заключение

В работе изучена локальная теория обобщенных перекладывающихся разбиений многомерных торов, построенных на основе теории геометрических подстановок Арно-Ито. Дано полное описание корон в таких разбиениях.

Рассматриваемые разбиения состоят из d-мерных параллелепипедов d+1 типа. Все параллелепипеды одного типа получаются из некоторого центрального параллелепипеда итерацией некоторого иррационального сдвига тора. Номер этой итерации определяет номер параллелепипеда в разбиении. При этом оказывается, что каждому возможному типу n-корон соответствует однозначно определенный открытый справа полуинтервал на множестве номеров параллелепипедов. Границы таких полуинтервалов в точности совпадают с номерами параллелепипедов из n-короны $Crn(T_0, n)$ множества T_0 центральных параллелепипедов разбиения (в случае ряда бесконечных разбиений плоскости аналогичное множество назвалось ядром разбиения [24]).

Дальнейшие обобщения исследования могут проводиться в следующих направлениях.

- 1) Обобщение результатов на произвольные обобщенные перекладывающиеся разбиения тора.
- 2) В случае бесконечных квазипериодических разбиений тора иногда удается получить описание *п*-корон для разбиений полученных методом "проекции и среза" и на первый взгляд не связанных со сдвигами тора. Было бы интересно либо все же найти такую связь, либо получить конечный аналог метода "проекции и среза".
- 3) Число p(n) различных n-корон разбиения может рассматриваться как многомерный аналог функции сложности из комбинаторики слов [3]. Было бы интересно изучить поведение функции p(n) для обобщённых перекладывающихся разбиений торов. При этом легко показать, что $p(n) > cn^d$ если n достаточно мало по сравнению с числом параллелепипедов в разбиении. Кроме того, очевидно, p(n) = const при достаточно больших n. Таким образом в поведении функции p(n) имеется фазовый переход. Численное моделирование показывет, что даже в случае d=2 таких фазовых переходов как минимум два. Было бы интересно найти асимптотические формулы для p(n) и получить описание всех фазовых переходов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Arnoux P., Ito S. Pisot substitutions and Rauzy fractals // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2001. V. 8, Issue 2. P. 181–207.
- 2. Floreik K. Une remarque sur la repartition des nombres $m\xi \mod 1$ // Coll. Math. Wrocław. 1951. V. 2. P. 323-324.
- 3. Lagarias J. C., Pleasants P. A. B. Repetitive Delone sets and quasicrystals // Ergod. Th. Dyn. Sys. 2003. V. 23. P. 831–867.
- 4. Pytheas Fogg N. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics // Springer. 2001.
- 5. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France. 1982. V. 110. P. 147–178.

- 6. Ravenstein T. V. The three gap theorem (Steinhaus conjecture) // J. Austral. Math. Soc. Ser. A 1988 V. 45. P. 360–370.
- Schattschneider D., Dolbilin N. One corona is enough for the Euclidean plane // Quasicrystals and discrete geometry (Toronto. ON. 1995), Fields Inst. Monogr. 10, Amer. Math. Soc. Providence. RI. 1998. P. 207–246.
- 8. Shutov A. V., Maleev A. V. Quasiperiodic planetilings based on stepped surfaces // Acta Crystallographica. Section A: Foundations of Crystallography. 2008. V. 64, Issue 3. P. 376–382.
- 9. Shutov A. V., Maleev A. V., Zhuravlev V. G. Complex quasiperiodic self-similar tilings: Their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry // Acta Crystallographica. Section A: Foundations of Crystallography. 2010. V. 66, Issue 3. P. 427–437.
- Siegel A., Thuswaldner J.M. Topological properties of Rauzy fractals // Mem. Soc. Math. Fr. N.S. 2009. V. 118. P. 1–144.
- 11. Slater N., Gaps and steps for the sequence $n\theta \mod 1$ // Proc. Camb. Phil. Soc. 1967. V. 63. P. 1115–1123.
- 12. Sós V. T. S. On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$ // Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. 1958. V. 1. P. 127–134.
- 13. Świerczkowski S. On successive settings of an arc on the circumference of a circle // Fund. Math. 1958. V. 46. P. 187–189.
- 14. Zhuravlev V. G. On additivity property of the complexity function related to rauzy tiling // Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory. 2007. P. 240–254.
- 15. Жукова А. А., Шутов А. В. Подстановка Рози и локальная структура разбиений тора // Чебышевский сборник 2019. Т. 20, вып. 4.
- 16. Журавлев В. Г. Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 440. С. 81–98.
- 17. Журавлев В. Г. Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 440. С. 99–122.
- 18. Журавлев В. Г. Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Т. 445. С. 33–92.
- 19. Журавлев В. Г. Индуцированные множества ограниченного остатка // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 5. С. 171–194.
- 20. Журавлев В. Г. Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 4. С. 97–136.
- 21. Журавлев В. Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, № 2. С. 89–122.
- 22. Журавлев В. Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2005. Т. 322. С. 83–106.
- 23. Журавлев В. Г., Малеев А. В. Послойный рост квазипериодического разбиения Рози // Кристаллография. 2007. Т. 52, № 2. С. 204–210.

- 24. Журавлев В. Г., Малеев А. В. Функция сложности и форсинг в двумерном квазипериодическом разбиении Рози // Кристаллография. 2007. Т. 52, № 4. С. 610–616.
- 25. Красильщиков В.В., Шутов А.В. Одномерные квазипериодические разбиения и их приложения // Владимир. ВФ РУК. 2011.
- 26. Кузнецова Д.В., Шутов А.В. Перекладывающиеся разбиения тора, подстановка Рози и множества ограниченного остатка // Матем. заметки. 2015. Т. 98, № 6. С. 878–897.
- 27. Мануйлов Н. Н. Самоподобие некоторых последовательностей точек на окружности // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2003. Т. 302, № 19. С. 81–95.
- 28. Мануйлов Н. Н. Прямые перенормировки на одномерном торе // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 314. С. 142–154.
- 29. Шутов А.В. Перекладывания на торе и многомерная проблема Гекке-Кестена // Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. Т. 6, № 2. С. 249–253.
- 30. Шутов А. В. Подстановки и множества ограниченного остатка // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, № 2. С. 501–522.
- 31. Шутов А.В. Производные поворотов окружности и подобие орбит // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 314. С. 272–284.
- 32. Шутов А.В. Системы счисления и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7, № 3. С. 110–128.
- 33. Шутов А. В., Малеев А. В. Сильная параметризация и координационные окружения графа вершин разбиения Пенроуза // Кристаллография. 2017. Т. 62, № 4. С. 535–542.

REFERENCES

- 1. Arnoux, P. & Ito, S. 2001, "Pisot substitutions and Rauzy fractals", Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin., vol. 8, issue 2, pp. 181–207.
- 2. Floreik, K. 1951, "Une remarque sur la repartition des nombres $m\xi \mod 1$ ", Coll. Math. Wroclaw., vol. 2, pp. 323–324.
- 3. Lagarias, J. C. & Pleasants, P. A. B. 2003, "Repetitive Delone sets and quasicrystals", *Ergod. Th. Dyn. Sys.*, vol. 23. pp. 831–867. doi: https://doi.org/10.1017/S0143385702001566.
- 4. Pytheas Fogg, N. 2001, "Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics", *Springer*. doi: 10.1007/b13861.
- 5. Rauzy, G. 1982, "Nombres algébriques et substitutions", Bull. Soc. Math. France, vol. 110, pp. 147–178. doi: https://doi.org/10.24033/bsmf.1957.
- 6. Ravenstein, T. V. 1988, "The three gap theorem (Steinhaus conjecture)", J. Austral. Math. Soc. Ser. A, vol. 45, pp. 360–370.
- 7. Schattschneider, D. & Dolbilin, N. 1998, "One corona is enough for the Euclidean plane", Quasicrystals and discrete geometry (Toronto. ON. 1995), Fields Inst. Monogr. 10, Amer. Math. Soc. Providence. RI, pp. 207–246.

- 8. Shutov, A. V. & Maleev, A. V. 2008, "Quasiperiodic planetilings based on stepped surfaces", *Acta Crystallographica. Section A: Foundations of Crystallography*, vol. 64, no. 3, pp. 376–382. doi: 10.1107/S0108767308005059.
- 9. Shutov, A.V., Maleev, A.V. & Zhuravlev, V.G. 2010, "Complex quasiperiodic self-similar tilings: Their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry", *Acta Crystallographica*. Section A: Foundations of Crystallography, vol. 66, no. 3, pp. 427–437. doi: 10.1107/S0108767310006616.
- 10. Siegel, A. & Thuswaldner, J. M. 2009, "Topological properties of Rauzy fractals", Mem. Soc. Math. Fr. N.S., vol. 118, pp. 1–144. doi: 10.24033/msmf.430.
- 11. Slater, N. 1967, "Gaps and steps for the sequence $n\theta \mod 1$ ", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 63, pp. 1115–1123. doi: https://doi.org/10.1017/S0305004100042195.
- 12. Sós, V. T. 1958, "On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$ ", Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math., vol. 1, pp. 127–134.
- 13. Świerczkowski, S. 1958, "On successive settings of an arc on the circumference of a circle", Fund. Math., vol. 46, pp. 187–189.
- 14. Zhuravlev, V. G. 2007, "On additivity property of the complexity function related to rauzy tiling", Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, pp. 240–254.
- 15. Zhukova, A. A. & Shutov, A. V. 2019, "Rauzy substitution and local structure of torus tilings", Chebyshevskii Sbornik, vol. 20, no. 4.
- 16. Zhuravlev, V.G. 2016, "Two-dimensional approximations by the method of dividing toric tilings", Journal of Mathematical Sciences, vol. 217, issue 1, pp. 54–64. doi: 10.1007/s10958-016-2955-2.
- 17. Zhuravlev, V. G. 2015, "Dividing toric tilings and bounded remainder sets", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 217, issue 1, pp. 65–80. doi: 10.1007/s10958-016-2956-1.
- 18. Zhuravlev, V. G. 2016, "Differentiation of induced toric tilings and multi-dimensional approximations of algebraic numbers", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 222, issue 5, pp. 544–584. doi: 10.1007/s10958-017-3321-8.
- 19. Zhuravlev, V. G. 2017, "Induced bounded remainder sets", St. Petersburg Math. J., vol. 28, pp. 671–688. doi: https://doi.org/10.1090/spmj/1466.
- 20. Zhuravlev, V. G. 2013, "Moduli of toric tilings into bounded remainder sets and balanced words", St. Petersburg Math. J., vol. 24, pp. 601–629. doi: https://doi.org/10.1090/S1061-0022-2013-01256-8.
- 21. Zhuravlev, V. G. 2007, "One-dimensional Fibonacci tilings", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 71, no. 2, pp. 281–323. doi: https://doi.org/10.4213/im621.
- 22. Zhuravlev, V.G. 2006, "Rauzy tilings and bounded remainder sets on the torus", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 137, no. 2, pp. 4658–4672. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-006-0262-z.
- 23. Zhuravlev, V. G. & Maleev, A. V. 2007, "Layer-by-layer growth of quasi-periodic Rauzy tiling", Crystallography Reports, vol. 52, no. 2. pp. 180–186. doi: 10.1134/S1063774507020022.

- 24. Zhuravlev, V. G. & Maleev, A. V. 2007, "Complexity function and forcing in the 2D quasi-periodic Rauzy tiling", *Crystallography Reports*, vol. 52, no. 4, pp. 582–588. doi: 10.1134/S1063774507040037.
- 25. Krasilshchikov, V. V. & Shutov, A. V. 2011, "One-dimensional quasiperiodic tilings and their applications", VF RUK, Vladimir.
- 26. Kuznetsova, D. V. & Shutov, A. V. 2015, "Exchanged toric tilings, Rauzy substitution, and bounded remainder sets", *Mathematical Notes*, vol. 98, issue 5–6, pp. 932–948. doi: 10.1134/S0001434615110267.
- 27. Manuylov, N. N. 2005, "Self-similarity of some sequences of points on a circle", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 129, issue 3, pp. 3860–3867. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-005-0322-9.
- 28. Manuylov, N. N. 2006, "Direct renormalizations on the one-dimensional torus", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 133, issue 6, pp. 1686–1692. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-006-0080-3.
- 29. Shutov, A. V. 2012, "Shifting on the torus and the multidimensional Hecke-Kesten problem", Scientific notes of Oryol State University, vol. 6, no. 2, pp. 249–253.
- 30. Shutov, A. V. 2018, "Substitutions and bounded remainder sets", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 501–522. doi: 10.22405/2226-8383-2018-19-2-501-522.
- 31. Shutov, A.V. 2006, "Derivatives of circle rotations and similarity of orbits", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 133, issue 6, pp. 1765–1771. doi: https://doi.org/10.1007/s10958-006-0088-8.
- 32. Shutov, A. V. 2006, "Number systems and bounded remainder sets", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 7, no. 3, pp. 110–128.
- 33. Shutov, A.V. & Maleev, A.V. 2017, "Strong parameterization and coordination encirclements of graph of Penrose tiling vertices", *Crystallography Reports*, vol. 62, no. 4, pp. 535–542. doi: 10.1134/S1063774517040216.

Получено 11.07.2019 г.

Принято в печать 12.11.2019 г.