

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-220-245

О решениях обратных задач дифракции звуковых волн<sup>1</sup>

Н. Н. Добровольский, Н. В. Ларин, С. А. Скобельцын, Л. А. Толоконников

**Добровольский Николай Николаевич** — кандидат физико-математических наук, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: Nikolai.Dobrovolsky@gmail.com*

**Ларин Николай Владимирович** — кандидат физико-математических наук, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: Larin220577@gmail.com*

**Скобельцын Сергей Алексеевич** — кандидат физико-математических наук, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: skbl@rambler.ru*

**Толоконников Лев Алексеевич** — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru*

## Аннотация

Представлен обзор работ по решению обратных задач рассеяния звуковых волн упругими телами. Теоретические основы решения обратных задач дифракции звука базируются на фундаментальных исследованиях проблемы обратных задач для уравнений в частных производных, выполненных отечественными учеными.

В самой общей классификации обратные задачи акустики делятся на обратные задачи излучения (ОЗИ) и обратные задачи рассеяния (ОЗР). При решении задач первого класса по характеристикам звукового поля определяют некоторые параметры излучателя. При решении задач второго класса измерения параметров рассеянного звукового поля используют для идентификации свойств рассеивающего объекта.

Большая часть приложений акустических методов основана на решении обратных задач дифракции, когда по параметрам излучаемого или отраженного звукового поля судят о параметрах объекта или среды.

Анализ звуковых полей составляет основу методов в гидро- и аэроакустике; исследований в биологии и медицине; неразрушающего контроля и диагностики объектов; ультразвуковой дефектоскопии; обследовании и испытании материалов, конструкций и сооружений.

Решения всех обратных задач основаны на решении прямых задач дифракции. В работе представлены наиболее значимые результаты в решении прямых задач рассеяния звуковых волн упругими объектами.

Выделены работы, посвященные проблемам обратных задач рассеяния звука неоднородными упругими телами. Это направление составляет предмет интересов в исследованиях авторов.

**Ключевые слова:** дифракция звуковых волн, прямая задача дифракции, обратная задача рассеяния, рассеяние звука упругими телами.

**Библиография:** 130 названий.

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-41-710005).

**Для цитирования:**

Н. Н. Добровольский, Н. В. Ларин, С. А. Скобелъцын, Л. А. Толоконников. О решениях обратных задач дифракции звуковых волн // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 3, с. 220–245.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-220-245

**About solutions of inverse problems sound waves diffraction**

N. N. Dobrovol'skii', N. V. Larin, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov

**Dobrovol'skii' Nikolai' Nikolaevich** — candidate of physical and mathematical sciences, department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate professor of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

*e-mail: Nikolai.Dobrovolsky@gmail.com*

**Larin Nikolai' Vladimirovich** — candidate of physical and mathematical sciences, department of applied mathematics and computer science, Tula State University (Tula).

*e-mail: Larin220577@gmail.com*

**Skobel'tsyn Sergey Alekseevich** — candidate of physical and mathematical sciences, department of applied mathematics and computer science, Tula State University (Tula).

*e-mail: skbl@rambler.ru*

**Tolokonnikov Lev Alekseevich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, department of applied mathematics and computer science, Tula State University (Tula).

*e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru*

**Abstract**

A review of works on solving the inverse problems of scattering of sound waves by elastic bodies is presented. The theoretical foundations for solving inverse problems of sound diffraction are based on fundamental studies of the problem of inverse problems for partial differential equations performed by Russian scientists.

In the most general classification, inverse acoustic problems are divided into inverse radiation problems (IRP) and inverse scattering problems (ISP). When solving problems of the first class, the parameters of the sound field determine some parameters of the source. When solving the problems of the second class, the parameters of the scattered sound field are used to identify the properties of the scattering object.

Most applications of acoustic methods are based on solving inverse diffraction problems when the parameters of an object or medium are judged by the parameters of the emitted or reflected sound field.

Analysis of sound fields forms the basis of methods in hydro- and aeroacoustics; researches in biology and medicine; non-destructive testing and diagnostics of objects; ultrasonic flaw detection; inspection and testing of materials, structures and structures.

The solutions of all inverse problems are based on the solution of direct diffraction problems. The paper presents the most significant results in solving direct problems of scattering of sound waves by elastic objects.

The works devoted to the problems of inverse problems of sound scattering by inhomogeneous elastic bodies are singled out. This direction is the subject of interest in the research of the authors.

*Keywords:* sound waves diffraction, direct diffraction problem, inverse scattering problem, sound scattering by elastic bodies.

*Bibliography:* 130 titles.

### **For citation:**

N. N. Dobrovolskii, N. V. Larin, S. A. Skobel'tsyn, L. A. Tolokonnikov, 2019, "About solutions of inverse problems sound waves diffraction", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 220–245.

## **1. Введение**

Акустические методы давно заняли прочные позиции в исследовательской и производственной практике. Прикладной аспект таких методов в основном построен на решении обратных задач рассеяния звука. Однако решение обратных задач невозможно без эффективных методов решения прямых задач.

Далее представлен краткий обзор работ, в которых представлены теоретические основы решения обратных задач рассеяния звука упругими телами и решения некоторых из таких задач.

## **2. О решениях обратных задач рассеяния звуковых волн упругими телами**

Решение задач о рассеянии звуковых волн имеет как теоретическое так и практическое значение. В теоретическом плане подобные решения позволяют глубже понять особенности распространения звуковых волн в неоднородных средах, их взаимодействия с телами сложной формы выполненными из различных материалов.

В практическом плане решения задач дифракции звука на различных телах и в различных средах могут быть использованы для разработки технологий прикладных областей, в которых существенное значение имеют акустические эффекты. В одних случаях эти эффекты надо минимизировать (борьба с производственным и бытовым шумом), в других надо максимизировать (ультразвуковые методы обработки материалов), в третьих надо добиться баланса в сохранении/усилении и подавлении определенных частот звуковых колебаний (акустика помещений), в четвертых – извлекать информационную составляющую из них. Анализ звуковых полей составляет основу инструментария в акустических методах гидро и аэроакустики; исследований в биологии и медицине; неразрушающего контроля и диагностики объектов; ультразвуковой дефектоскопии; обследовании и испытании материалов, конструкций и сооружений; архитектурной и строительной акустики; проектирования электронных устройств на основе пьезоэлектрических эффектов.

Большая часть приложений акустических методов основана на решении так называемых обратных задач, когда по параметрам излучаемого или отраженного звукового поля судят о параметрах объекта или среды.

Теория обратных задач математической физики активно начала развиваться в середине прошлого века. Основы теории и практики исследования обратных задач математической физики заложены и развиты в фундаментальных работах выдающихся ученых современности – А.Н. Тихонова, В.Я. Арсенина, А.А. Самарского, А.С. Алексеева, М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, В.А. Амбарцумяна, Г. Борга, И.М. Гельфанда, Б.М. Левитана, М.Г. Крейна и др. В фундаментальных работах академика А.Н. Тихонова были разработаны основы современной теории решения обратных задач, выявлены их особенности как некорректных задач, введено понятие и подходы к регуляризации процесса решения [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Фундаментальные результаты в исследованиях обратных задач для системы уравнений Максвелла, гиперболических систем первого порядка, многомерных обратных задач для гиперболических уравнений и уравнений теории упругости, а также численным методам их решения были получены В.Г. Романовым [7, 8, 9, 10, 11, 12], С.И. Кабанихиным [8, 13, 14, 15], В.Г. Яхно [16, 17, 18], Ю.Е. Аниконовым [19, 20, 21] и др.

Теория обратных задач математической физики существенно развивается представителями ряда отечественных математических школ, в том числе Московской, основанной А.Н. Тихоновым и Сибирской, основанной М.М. Лаврентьевым и В.Г. Романовым: С.А. Аникиным, Ю.Е. Аниконовым, Г.В. Алексеев, А.В. Баевым, А.С. Барашковым, М.И. Белишевым, А.С. Благовещенским, А.Л. Бухгеймом, П.Н. Вабишевичем, А.О. Ватульяном, В.М. Волковым, Д.И. Глушковой, А.М. Денисовым, В.И. Дмитриевым, Н.Б. Ильинским, С.И. Кабанихиным, А.Л. Карчевским, В.С. Корниловым, М.М. Лаврентьевым, А.И. Прилепко, А.Г. Раммом, В.Г. Синько, Б.Ф. Тазюковым, А.М. Федотовым, В.А. Чевердой, В.Г. Чередниченко, Е.И. Шифриным, М.А. Шишлениным, В.Г. Яхно и др.

В качестве характерной для акустики обратной задачи выступает задача восстановления причинных показателей по информации о физических полях. Нарушение естественной причинно-следственной связи, имеющее место в постановке обратной задачи, может привести к ее математической некорректности, чаще всего неустойчивости решения. Поэтому обратные задачи представляют собой типичный пример некорректно поставленных задач.

В привязке к искомым функциям выделяют следующие типы обратных задач идентификации физических процессов для уравнений в частных производных [22, 23]: ретроспективные – установление предыстории некоторого состояния процесса; граничные – восстановление граничных условий или содержащихся в них параметров; коэффициентные – определение коэффициентов уравнений; геометрические – нахождение геометрических характеристик контура области или координат точек внутри нее. Многие из таких задач могут рассматриваться как коэффициентные, поскольку в математической постановке большая часть искоемых параметров представляются неизвестными функциями (коэффициентами в них), входящими либо в решаемые уравнения, либо в граничные или начальные условия.

Графическая интерпретация постановки обратной задачи рассеяния звука в некотором обобщенном виде показана на рис. 1. На нем  $\Psi_p$  – потенциал скорости движения частиц акустической среды  $\Omega_0$  в падающей волне. Плотность и скорость звука содержащей среды задается величинами  $\rho_0, c_0$ . Волна рассеивается упругим в общем случае неоднородным анизотропным телом  $\Omega$  ( $\rho(\mathbf{r})$  – плотность упругой среды;  $\lambda_{ij}(\mathbf{r})$  – модули упругости;  $\Gamma$  – поверхность тела). Потенциал скорости в рассеянной волне обозначен  $\Psi_s$ . Предполагается, что есть возможность измерить величину  $\Psi_s$  в некотором достаточно представительном подмножестве точек  $V \in \Omega_0$  – апертуре наблюдения. Требуется на основе измеренных значений  $\Psi_s(V)$  и совокупности известных характеристик  $\theta$  падающей волны и препятствия найти неизвестные параметры тела  $\Omega$  (материальные, геометрические, ...) –  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_I$ .

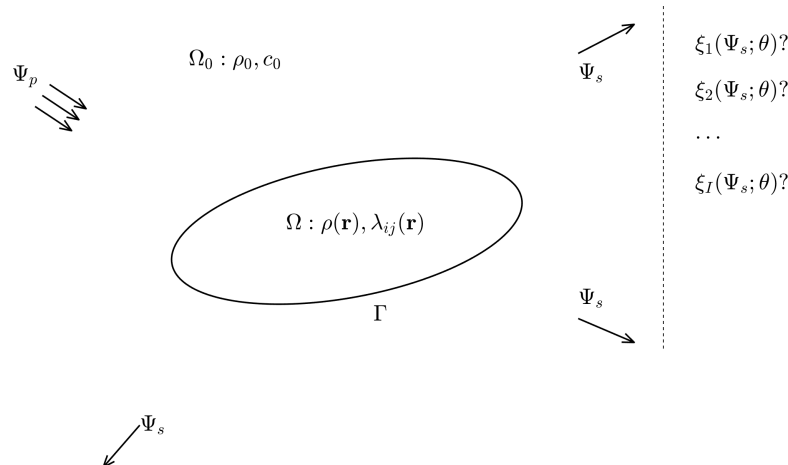


Рис. 1: Геометрическая интерпретация ОЗР

Основные подходы к решению обратных задач при дифракции звуковых волн и их особенности сформулированы в работах Д. Колтона (D. Colton) и Р. Кресса (R. Kress) [24, 25, 26, 27, 28]. В них рассмотрено применение классических методов теории потенциала и интегральных уравнений к задачам теории дифракции акустических и электромагнитных волн на ограниченных телах, расположенных в однородном пространстве.

В монографии Горюнова А.А., Сасковца А.В. [29] представлены обзор решений и оригинальные решения обратных задач рассеяния и излучения в акустике. Освещены известные подходы, постановки и методы решений акустических обратных задач, приведены основные результаты, полученные к моменту выхода работы. Проведен анализ методов определения количественных характеристик рассеивающих неоднородностей, основанных на наблюдениях рассеяния падающего на них акустического поля. Представлены результаты численного моделирования решений некоторых обратных задач.

Известен ряд работ по решению обратных задач дифракции звука для упругих тел авторов Буров В.А., Ворович И.И., Горюнов А.А., Ринкевич А.Б., Сасковец А.В., Смородинский Я.Г., Beilina L., Hanneman R., Klibanov M.V., Langenberg K.J., Liu G.R., Marklein R., Zhang D. и др.

В частности, в работе [30] Бурова В.А. и соавторов исследовались обратные задачи рассеяния звука поверхностной неоднородностью. В работе [31] исследуется решение двумерной задачи рассеяния на основе функционально-аналитических методов. В работе [32] рассматривается задача акустической томографии океана при использовании нестандартного представления рефракционных неоднородностей. Работы [33, 34] посвящены решению трехмерной обратной задачи акустического рассеяния на основе алгоритма Новикова-Хенкина и модифицированного алгоритма Новикова. В статье [35] предлагается построение оценок максимального правдоподобия в корреляционной акустической термотомографии. Работа [36] посвящена проблемам численного и физического моделирования процесса томографии на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка. В [37] обсуждается моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния функциональными методами. Анализ единственности и устойчивости решения обратной задачи акустического рассеяния проводится в [38]. В книге [39, 40] рассматриваются обратные волновые задачи и их прикладные аспекты, связанные с современным состоянием исследований в области линейной и нелинейной акустической томографии, а также акустической термотомографии.

В работах Воровича И.И. исследовались как методы решения обратных задач теории упругости, так и обратные задачи акустики. В частности в работах [41, 42] исследовались задачи восстановления образа дефекта по рассеянному полю в акустическом приближении. В них в рамках решения геометрической обратной задачи предлагается идентификация полостей по диаграмме направленности.

В работе Горюнова А.А. [43] рассматривается решение задачи восстановления отражающей неоднородности методом среднего. Статья [44] посвящена вопросу использования матричной функции Грина при решении задач акустической интроскопии.

Физические основы и методы акустического контроля, приложения на основе решения обратных задач рассеяния звука рассматриваются в работах Ринкевича А.Б., Смородинского Я.Г. и соавторов. В работе [45] представлены результаты определения групповой скорости ультразвуковых волн в трансверсально-изотропной упругой среде. В статье [46] представлен анализ ультразвуковых полей и дефектоскопии в монокристаллах алюминия на основе лазерной методики. Работа [47] посвящена использованию вейвлетов для анализа ультразвуковых полей, обнаруженных лазерным интерферометром. Рассматривается порядок применения такой обработки при дефектоскопии и локализации в монокристалле алюминия. В статье [48] обсуждаются вопросы настройки и калибровки оборудования с использованием образцов с цилиндрическим сверлением при ультразвуковой дефектоскопии.

Решение обратных задач акустического рассеяния строится на основе известных решений

прямых задач дифракции звука. В настоящее время известно большое количество работ, посвященных исследованию рассеяния звуковых волн упругими телами. Однако большинство работ выполнено в предположении, что упругие тела имеют каноническую форму поверхности (плоскости и полуплоскости, круговые и эллиптические цилиндры, сферы и сфероиды), а рассеиватели в виде упругих толстостенных оболочек рассматривались как однородные и изотропные. Большая часть исследований в области математической теории распространения звуковых и упругих волн посвящена изучению и анализу процессов, происходящих в физически однородных и изотропных средах.

Отражение звука плоскими упругими телами, сплошными упругими цилиндрами и шарами, а также оболочками (прямые задачи дифракции) исследовалась во многих работах. В [49, 50, 51, 52] рассмотрено рассеяние плоских звуковых волн круговыми цилиндрами и сферами. Рассмотрению дифракции звука на бесконечной тонкой цилиндрической оболочке посвящена работа [53]. В [54] рассматривается задача о рассеянии плоской звуковой волны упругим безграничным цилиндром кругового сечения. Экспериментально исследовано рассеяние звука латунными, алюминиевыми и стальными цилиндрами в воде. Установлено, что при некоторых углах падения звуковой волны на ограниченный упругий цилиндр возникает сильное рассеяние в направлении, противоположном направлению падающей волны (так называемое незеркальное отражение). Прохождение звуковой волны через упругую цилиндрическую оболочку рассматривалось в работе [55]. Рассеянию цилиндрической звуковой волны сплошным упругим цилиндром посвящена работа [56]. Отражение плоской звуковой волны от полый сферы, находящейся в воздухе, рассмотрено в [57]. Рассчитана зависимость интенсивности отраженной волны вдали от облучаемой сферы от частоты для тонкой алюминиевой сферической оболочки и полиэтиленовых оболочек различной толщины.

Результаты расчетов показывают, что интенсивность отраженной волны в широком диапазоне частот существенно зависит от отношения толщины оболочки и ее внешнему радиусу и от упругих свойств материала оболочки.

В [58] изучено рассеяние плоской звуковой волны, падающей на тонкую упругую сферическую оболочку, находящуюся в бесконечном пространстве, заполненном жидкостью. Центр оболочки фиксирован неподвижно. В [59] с помощью метода Ватсона исследуется рассеянное акустическое поле давления при дифракции плоской волны на упругой сферической оболочке. Определены вклады отдельных мод в полный эхо-сигнал в дальней зоне поля. Исследованию рассеяния плоской акустической волны упругой сферической оболочкой с учетом инерции вращения и сдвиговых деформаций посвящена работа [49]. В [60] рассмотрены резонансные явления в акустическом поле вокруг бесконечно длинного цилиндрического тела при падении на него акустической волны и показано, что по характеристикам отраженного от цилиндра акустического поля можно судить как о размерах цилиндра, так и о материале, образующем его.

Исследование акустической волны, рассеянной от упругой сферической оболочки при падении на оболочку сферической синусоидальной акустической волны представлено в [61]. Вычисляется эхо от сферической оболочки по различным теориям оболочек и проводится сравнение результатов с соответствующими, подсчитанными по трехмерной теории упругости согласно. Показывается, что в задачах о рассеянии акустической волны тонкими оболочками при невысоких частотах применение теории оболочек оправдано.

В [62] рассмотрена задача дифракции нестационарной плоской звуковой волны на полый упругой сфере. При решении задачи используется интегральное преобразование Лапласа по времени.

Теоретический анализ распределения звукового давления вблизи поверхности упругой сферической оболочки на расстояниях, сравнимых с ее радиусом, проведен в работе [63].

Исследованию обратного рассеяния плоской волны на металлической сфере с малыми по-

терями, помещенной в жидкость, посвящена работа [64]. В [50] описываются результаты теоретических исследований отражения и рассеяния звука в воде цилиндрами и сферами из силиконовой резины.

В [65] проведены исследования резонансных явлений, возникающих при падении акустических волн на шар. Исследованию резонансного возбуждения сферической упругой оболочки, наполненной жидкостью или газом и помещенной в другую жидкость посвящена работа [66]. Рассмотрено рассеяние оболочкой плоской падающей звуковой волны с использованием теории резонансного рассеяния. Анализируется случай наполненной воздухом алюминиевой оболочки в воде.

В [67] рассмотрено рассеяние плоской наклонно падающей волны на круговую цилиндрическую оболочку. Рассмотрению задачи осесимметричного рассеяния звуковых импульсов давления упругим сферическим резонатором с круговым отверстием посвящена работа [68]. Движение оболочки описывается по теории типа Кирхгофа-Лява.

В [69] с помощью потенциалов Дебая дается решение трехмерной задачи рассеяния гармонической звуковой волны упругой цилиндрической оболочкой. Все потенциалы представляются в виде интегралов, зависящих от осевой составляющей волнового вектора. В [70] разработан асимптотический подход для решения задач рассеяния акустических волн упругими оболочками. Осуществлен синтез приближенного решения задачи на основе сращивания разложений для различных асимптотических моделей. Сравнение с точным решением для цилиндрической и сферической оболочек подтверждает высокую эффективность предложенного подхода при различных значениях параметров оболочки.

В [52] использован подход классической резонансной теории ядерных реакций для исследования задач рассеяния звука упругими круговыми цилиндрами и сферами, погруженными в жидкость. Показано, что существенные изменения в сигнале обратного рассеяния могут быть представлены суперпозицией резонансов в отдельных нормальных модах (парциальных волнах) и базовых составляющих, соответствующих отражению от твердого тела.

Во всех перечисленных выше работах с решением прямых задач дифракции рассматривалось рассеяние звуковых волн на упругих цилиндрических и сферических сплошных телах либо на оболочках (тонкостенных и толстостенных). Дифракция звука на телах с произвольно расположенными полостями исследована в значительно меньшей степени. Например, в [71] решены задачи о дифракции сферической и плоской звуковых волн на шаре с неконцентрическим шаровым включением. Однако материал шара полагался не упругим, а жидким. При этом поверхность полости рассматривалась акустически мягкой или акустически жесткой.

Значительно меньше работ посвящено исследованию рассеяния звука неоднородными анизотропными телами. Получение аналитических решений дифракционных задач для неоднородных тел и тел сложной формы крайне затруднено. Следует отметить, что эффективные численные методы конечных и граничных элементов, широко используемые в механике сплошной среды, и соответствующие пакеты программ для ЭВМ трудно применять непосредственно для решения задач о рассеянии звука в случае, когда тело находится в неограниченной среде. Требуется модификация этих методов с учетом особенностей такого рода задач.

Рассеяние звуковых волн неоднородными упругими круговыми цилиндрическими телами рассматривалось в работах [72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87]. При этом решались прямые задачи.

Отражение и прохождение звуковых волн через плоский неоднородный изотропный упругий слой рассмотрено в работе [88] посвящена изучению прохождения звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный упругий слой. В [89] решена задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны неоднородным упругим слоем, материал которого обладает анизотропией общего вида. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями, изучено в [90]. В [91] рассмотрено



прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой.

Широкие возможности для исследования задач дифракции дает использование метода конечных элементов (МКЭ) [92, 93, 94]. Метод конечных элементов является широко используемым инструментом решения практических задач гидродинамики и теории упругости [95, 96]. При решении задач, связанных с изучением звуковых колебаний в основном рассматриваются случаи ограниченных областей: акустические свойства помещений, собственные частоты сложных ограниченных объемов. Однако значительно меньшее число исследований такого рода посвящено изучению рассеяния звуковых волн сложными объектами в неограниченной среде. Применение МКЭ для решения таких задач позволит оценить влияние, как сложной формы рассеивателя, так и особенностей реальных сред: неоднородности, вязкости, теплопроводности.

В монографии [94] подробно изложены различные аспекты применения МКЭ при решении задач о рассеянии звука объектами различного типа: жесткими, мягкими, упругими. В случае содержащей среды неограниченной извне предлагается использовать искусственную внешнюю границу (*artificial boundary*), на которой формируются так называемые условия поглощения или “бесконечные” элементы, обеспечивающие выполнение условий излучения на бесконечности для потенциала скоростей в рассеянной волне. В работах автора [97, 98] предложен подход, в котором во внешней области решение представляется в виде разложения по ортогональной системе волновых функций. Поэтому искусственная внешняя граница рассматривается как поверхность, на которой устанавливаются обычные граничные условия согласования звуковых колебаний в двух областях жидкости: внешней (с аналитическим представлением решения) и внутренней, в которой для решения используется МКЭ.

Идентификации упругих характеристик непрерывно-неоднородных тел по известным физическим полям внутри исследуемых объектов посвящены работы [99, 100]. Задачи об определении свойств одномерных неоднородных объектов решены в [101, 102, 103]. Восстановление характеристик упругого слоя, произвольно меняющихся по глубине, рассматривалось в [104]. Задачи о восстановлении свойств изотропного и ортотропного неоднородных по толщине слоев по известному полю смещений на границе слоя при анализе установившихся колебаний решены в [105, 106, 107].

Значительный интерес представляет обратная задача по определению законов неоднородности для непрерывно-неоднородного упругого тела, которые обеспечивали бы требуемое звукоотражение. Изменение звукоотражающих характеристик тела в определенных направлениях можно осуществить с помощью покрытия в виде непрерывно-неоднородного упругого слоя. Такое покрытие можно реализовать с помощью системы однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров (плотности и упругих постоянных). Рассеяние звуковых волн плоскими, цилиндрическими и сферическими телами с неоднородными по толщине покрытиями было исследовано в работах [108, 85, 86, 109].

В работах авторов [110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118] на основе решения ряда задач о рассеянии звука неоднородными и/или анизотропными телами предлагается решение некоторых обратных задач по определению характеристик упругих тел. Получены некоторые результаты в решении задач идентификации параметров упругих неоднородных и анизотропных тел по рассеянному полю, предложена модель приближенного решения задачи определения параметров препятствия по рассеянному акустическому полю.

Решены задачи определения по отражению звука: законов неоднородности плоского анизотропного упругого слоя, положения границы разделения двухслойной упругой пластины, параметров неоднородности анизотропного покрытия упругого полупространства, плотности материала упругого цилиндра, параметров анизотропного материала упругого цилиндра, положения эллиптической полости в упругом цилиндре, положения полости в упругом препятствии с использованием МКЭ в 3-х-мерной постановке, геометрических параметров конечного

цилиндра, расположенного у границы полупространства, параметров анизотропного покрытия упругого шара, направления оси упругой симметрии анизотропного шара.

Как обратная может формулироваться задача обеспечения требуемых звукоотражающих свойств упругого рассеивателя. В работах [119, 120, 121, 122, 123, 124, 125] предлагается подход к определению параметров неоднородного анизотропного покрытия тела для обеспечения требуемых характеристик рассеянного поля. Получены решения задач определения законов неоднородности плоского упругого слоя, неоднородного покрытия упругой пластины, покрытия конечной упругой пластины с полостью, законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, механических параметров неоднородного покрытия некругового упругого полого цилиндра, свойств неоднородного покрытия упругого шара, параметров неоднородности внешнего слоя упругого эллипсоида, находящегося у границы полупространства.

Заметим, использование непрерывно-неоднородных покрытий упругих тел позволяет изменять характеристики рассеяния звука на 5-15%. Специально сконструированные структурно неоднородные покрытия позволяют изменять акустические свойства объекта в разы. Ряд работ по исследованию эффективных неотражающих покрытий выполнен коллективом исследователей под руководством Бобровниченко Ю.И. В статье [126] предложена общая схема формирования поглощающих и нерассеивающих покрытий нового типа с повышенной эффективностью – т.н. покрытий с протяженной реакцией. Приводятся теория таких покрытий и метод определения наилучших значений его параметров. Подробно анализируется плоское покрытие с протяженной реакцией, показано, что его эффективность существенно выше эффективности существующих покрытий.

В работе [127] рассматривается задача формирования покрытий с протяженной реакцией для цилиндрических тел. Работы [128, 129, 130] посвящены анализу решения теоретических и прикладных задач конструирования эффективных поглощающих покрытий.

### 3. Заключение

Следует подчеркнуть существенный вклад отечественных исследователей в разработку теоретических основ решения широкого класса обратных задач для уравнений математической физики в целом и для процессов рассеяния звуковых и упругих волн в частности.

Проблема обратных задач рассеяния является столь разносторонней и глубокой, что по оценкам специалистов [40] к настоящему времени решена только небольшая часть актуальных задач. Предстоит еще множество исследований в этом направлении, результаты которых должны позволить целенаправленно и обоснованно конструировать технологии на основе анализа звуковых полей.

### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н. Теорема единственности для уравнения теплопроводности // Мат. сборник. 1935. Т. 42. № 2. С. 199–216.
2. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39. № 5. С. 195–198.
3. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. № 1. С. 49–52.
4. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Доклады АН СССР. 1963. № 3. С. 501–504.

5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 256 с.
6. Тихонов А., Леонов А., Ягола А. Нелинейные некорректные задачи. Москва: Наука, 1995. 398 с.
7. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.
8. Романов В.Г., Кабанихин С.И., Пухначева Т.П. К теории обратных задач электродинамики // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 5. С. 1070–1073.
9. Романов В.Г. Теоремы единственности в обратных задачах для некоторых уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 2. С. 254–257.
10. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах. М.: Научн. мир. 2005. 296 с.
11. Романов В.Г. О задаче определения структуры слоистой среды и формы импульсного источника // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48. № 4. С. 867–881.
12. Романов В.Г. Обратная задача для уравнений упругости при неизвестной форме импульсного источника // Доклады Академии наук. 2007. Т. 417. № 6. С. 746–752.
13. Кабанихин С.И. Методы решения обратных динамических задач для гиперболических уравнений / Условно-корректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука (Сиб.отд.). 1992. С. 109–123.
14. Кабанихин С.И., Карчевский А.Л. Оптимизационный алгоритм решения задачи Коши для эллиптического уравнения // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 4. С. 445–447.
15. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
16. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука (Сиб. отд.), 1982. 88 с.
17. Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука (Сиб. отд.), 1990. 303 с.
18. Karchevsky A.L., Yakhno V.G. One-dimensional inverse problems for systems of elasticity with a source of explosive type // J. of Inverse and Ill-Posed Problems, VSP. Netherlands. 1999. V. 7. № 4. P. 347–364.
19. Аниконов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука (Сиб.отд.), 1978. 118 с.
20. Anikonov Yu.E., Bubnov B. A., Erokhin G. N. Inverse and Ill-Posed Sources Problems, VSP, Utrecht. Netherland, 1997. 239 p..
21. Anikonov Yu.E. Inverse problems for kinetic and other evolution equations. VSP, Utrecht. Netherland, 2001. 270 p..
22. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. - М.: Физматлит, 2007. 224 с.

23. Самарский А. А., Вабишевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Издательство ЛКИ, 2009. 480 с.
24. Colton D., Kress R. Integral Equation Methods in Scattering Theory. New York: Wiley-Interscience, 1983. 320 p..
25. Colton D. The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves. SIAM Review. 1984. V.26. P. 323-350.
26. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. Мир. 1987. 311 с.
27. Colton D., Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, 2nd edition. New York: Springer 1998. 336 p..
28. Colton D., Kress R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Berlin: Springer, 2013. 430 p..
29. Горюнов А. Л., Сасковец А. В. Обратные задачи рассеяния в акустике. М.: Изд-во МГУ, 1989. 152 с.
30. Burov V. A., Prudnikova I. P., Sirotkina N. S. Inverse problem of ultrasonic scattering by boundary inhomogeneity in isotropic solids // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 6. С. 1013–1018.
31. Burov V. A., Rumiantseva O. D. Solution of two-dimensional acoustical inverse scattering problem based on functional-analytical methods // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 3. С. 413–420.
32. Буров В. А., Попов А. Ю., Сергеев С. Н., Шуруп А. С. Акустическая томография океана при использовании нестандартного представления рефракционных неоднородностей // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 5. С. 602–613.
33. Алексеенко Н. В., Буров В. А., Румянцева О. Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния на основе алгоритма Новикова-Хенкина // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 4. С. 437–446.
34. Алексеенко Н. В., Буров В. А., Румянцева О. Д. Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния. Модифицированный алгоритм Новикова // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 3. С. 469–482.
35. Буров В. А., Касаткина Е. Е., Марьин А. О., Румянцева О. Д. Оценки максимального правдоподобия в корреляционной акустической термотомографии // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 4. С. 580–596.
36. Буров В. А., Шмелев А. А. Численное и физическое моделирование процесса томографии на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 4-5. С. 466–480.
37. Буров В. А., Вечерин С. Н., Морозов С. А., Румянцева О. Д. Моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния функциональными методами // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 4. С. 516–536.
38. Буров В. А., Румянцева О. Д. Единственность и устойчивость решения обратной задачи акустического рассеяния // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 5. С. 590–603.
39. Буров В. А., Румянцева О. Д. Обратные волновые задачи акустической томографии: Обратные задачи излучения в акустике Ч. 1. М.: УРСС, 2018. 384 с.

40. Буров В. А., Румянцева О. Д. Обратные волновые задачи акустической томографии: Обратные задачи акустического рассеяния Ч. 2. М.: УРСС, 2019. 760 с.
41. Ворович И. И., Сумбатьян М. А. Восстановление образа дефекта по рассеянному полю в акустическом приближении // Изв. АН СССР: МТТ. 1990. № 6. С. 79–84. 1.
42. Vorovich I. I., Boyev N. V., Sumbatyan M. A. Reconstruction of the obstacle shape in acoustic medium under ultrasonic scanning // Inverse Problems in Engineering. 2001. V. 9. № 4. P. 315–337.
43. Goryunov A. A., Rychagov M. N. Reconstruction of a refraction inhomogeneity by the method of averages // Soviet Journal of Nondestructive Testing. 1989. T. 24. № 12. С. 805–809.
44. Goryunov A. A. Matrix Green's function formalism in acoustic intrascopy problems // Russian Journal of Nondestructive Testing. 1992. T. 27. № 6. С. 381–386.
45. Rinkevich A. V., Smorodinskij Y. G., Volkova N. N., Zagrebin B. N. Group velocity of ultrasonics in transverse-isotrope media // Defectscopy (rus). 1994. № 2. С. 58–63.
46. Rinkevich A. B., Smorodinskii Ya. G., Burkhanov A. M., Krivonosova A. S., Keller B. Analysis of ultrasonic fields and flaw detection in aluminum single crystals based on laser detection technique // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2000. T. 36. № 11. С. 831–838.
47. Perov D. V., Rinkevich A. B., Smorodinskii Ya. G., Keler B. Using wavelets for analyzing ultrasonic fields detected by a laser interferometer. Flaw detection and localization in an aluminum single-crystal // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2001. T. 37. № 12. С. 889–899.
48. Mogilner L. Y., Smorodinskii Y. G. Ultrasonic Flaw Detection: Adjustment and Calibration of Equipment Using Samples with Cylindrical Drilling // Russian Journal of Nondestructive Testing. 2018. T. 54. № 9 С. 630–637.
49. David H. Y. Yen Interaction of a Plane Acoustic Wave with an Elastic Spherical Shell // J. Acoust. Soc. Amer. 1970. V. 47. № 5. P. 1325–1333.
50. Davis C. M., Dragonette L. R., Flax L. Acoustic scattering from silicone rubber cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1978. V. 63. № 6. P. 268–275.
51. Faran J. J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. V. 23. № 4. P. 405–418.
52. Flax L., Dragonette L. R., Überall H. Применение теории упругих резонансов при изучении рассеяния звука // Акуст. журн. 2004. Т. 49. № 1. С. 87–92.
53. Лямшев Л. М. Дифракция звука на бесконечной тонкой цилиндрической оболочке // Акуст. журн. 1958. Т. 4. Вып. 2. С. 161–167.
54. Лямшев Л. М. Рассеяние звука упругими цилиндрами // Акуст. журн. 1959. Т. 5. Вып. 1. С. 58–63.
55. Шендеров Е. Л. Прохождение звуковой волны через упругую цилиндрическую оболочку // Акуст. журн. 1963. Т. 9. Вып. 2. С. 222–230.
56. Lee F. A. Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder // Acustica. 1963. V. 13. № 3. P. 26–31.

- 
57. Hickling R. Echoes from Spherical Shells in Air. // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. V. 42. № 2. P. 388–390.
58. Гнатовский И. И. Рассеяние плоской звуковой волны на тонкой упругой сферической оболочке // Прикладная акустика и вибрационная техника. Киев, 1968. С. 23–28.
59. Метсавээр Я. А. О рассеянии волн упругими сферическими оболочками в акустической среде // Известия Академии наук Эстонской ССР. 1970. Т. 19., № 4. С. 415–422.
60. Бабкин В. П., Фадеева Л. М. Модельные эксперименты по аттестации шаровых мишеней // Труды Акуст. Института. 1971. Вып. 17. С. 80–98.
61. Метсавээр Я. А., О применении теории оболочек в задачах рассеяния акустических волн от сферических оболочек в жидкой среде // Известия Академии наук Эстонской ССР. 1971. Т. 15. № 3. С. 321–328.
62. Векслер Н. Д. Дифракция плоской звуковой волны на полый упругой сфере // Акуст. журн. 1975. Т. 21. Вып. 5. С. 321–335.
63. Плахов Д. Д., Саволайнен Г. Я. Дифракция сферической звуковой волны на упругой сферической оболочке // Акуст. журн. 1975. Т. 21. Вып. 5. С. 789–796.
64. Vogt R. H., Neubauer W. G. Relationship between acoustic reflection and vibrational modes of elastic spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1976. V. 60. № 1. P. 15–22.
65. Кулько В. Ф., Михнова М. С. Резонансные явления, возникающие при падении акустических волн на шар // Отбор и передача информации (Киев). 1979. № 58. С. 128–132.
66. George J., Nagl A., Überall H. Isolation of the resonant component in acoustic scattering from fluid-loaded elastic spherical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1979. V. 65. № 2. P. 368–373.
67. Векслер Н. Д., Корсунский В. М., Рыбак С. А. Рассеяния плоской наклонно падающей волны круговой цилиндрической оболочкой // Акуст. журн. 1990. Т. 36. Вып. 1. С. 12–16.
68. Дыхта В. В., Кунец Я. И., Поддубняк А. П. Осесимметричное рассеяние звуковых импульсов упругой сферической оболочкой с отверстием // Механика твердого тела. 1990. № 4. С. 141–148.
69. Клещев А. А. Дифракция звука от точечного источника на упругой цилиндрической оболочке // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 1. С. 86–89.
70. Ковалев В. А. Асимптотический подход в задачах рассеяния акустических волн упругими оболочками // Вестник Самарского гос. ун-та. 2006. № 9. С. 42–54.
71. Марневская Л. А. К дифракции звуковой волны на шаре с неконцентрическим шаровым включением // Акуст. журн. 1972. Т. 18. Вып. 1. С. 571–578.
72. Безруков А. В., Приходько В. Ю., Тютюкин В. В. Рассеяние звуковых волн упругими радиально-слоистыми цилиндрическими телами // Акуст. журн. 1986. Т. 32. Вып. 6. С. 762–766.
73. Коваленко Г. П. К задаче о дифракции акустической волны на неоднородном твердом теле // Акуст. журн. 1987. Т. 33. Вып. 6. С. 1060–1063.

74. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем // Акуст. журн. 1995. Т. 41. № 1. С. 134–138.
75. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на неоднородном анизотропном полем цилиндра // Оборонная техника. 1998. № 4–5. С. 11–14.
76. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических волн на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке // Оборонная техника. 1998. № 4–5. С. 9–11.
77. Толоконников Л. А. Резонансное рассеяние звука трансверсально-изотропной цилиндрической оболочкой // Изв. ТулГУ. Сер. Геодинамика, физика, математика, термодинамика, геоэкология. 2006. Вып. 3. С. 106–114.
78. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны неоднородным упругим полым цилиндром в вязкой жидкости // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 1. С. 62–70.
79. Толоконников Л. А., Романов А. Г. Дифракция цилиндрических звуковых волн на неоднородном полем цилиндре в вязкой жидкости // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 151–160.
80. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном упругом цилиндрическом слое, граничащем с невязкими теплопроводными жидкостями // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 3. С. 474–483.
81. Толоконников Л. А., Садовом А. А. О дифракции звука на неоднородной трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке в слое жидкости // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12. Вып. 5. С. 208–216.
82. Толоконников Л. А., Романов А. Г. Дифракция звуковых волн на неоднородном упругом полем цилиндре в слое жидкости с жесткими границами // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2009. Вып. 1–2. С. 3–10.
83. Толоконников Л. А., Романов А. Г. Распространение звука в волноводе в присутствии неоднородной цилиндрической оболочки произвольной толщины // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 161–176.
84. Толоконников Л. А. Дифракция звука на трансверсально-изотропной цилиндрической оболочке произвольной толщины в волноводе с акустически мягкими границами // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 154–163.
85. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850–857.
86. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265–274.
87. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 202–208.
88. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 4. С. 740–744.

89. Толоконников Л. А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 5. С. 179–184.
90. Толоконников Л. А. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями // ПММ. 1998. Т. 62. № 6. С. 1029–1035.
91. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой // ПММ. 2006. Т. 70. № 4. С. 650–659.
92. Harari I., Hughes T. J. R. Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems // Comp. Methods Appl. Mech. Eng. 1991. V. 87. P. 59–96.
93. Gan H., Levin P. L., Ludwig R. Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain // J. Acoust. Soc. Am. 1993. V. 94. № 3. Pt. 1. P. 1651–1662.
94. Ihlenburg F. Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer Publishing Company, Inc., 2013. 226 p.
95. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
96. Полежаев В. И., Простомолотов А. И., Федосеев А. И. Метод конечных элементов в механике вязкой жидкости // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Механика жидкости и газа. 1987. Т. 21. С. 3–92.
97. Скобельцын С. А. Подход к решению задач о рассеянии упругих волн с использованием МКЭ // Тез. докл. междунар. научн. конф. “Современные проблемы математики, механики, информатики” Тула: ТулГУ, 2004. С. 135–136.
98. Иванов В. И., Скобельцын С. А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // Изв. ТулГУ. Естественные науки. Вып. 2. Тула: ТулГУ, 2008. С. 132–145.
99. McLaughlin J., Yoon J.-R. Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement // Inverse Problems. 2004. V 20. P. 25–45.
100. Jadamba B., Khan A. A., Raciti F. On the inverse problem of identifying Lamé coefficients in linear elasticity // J. Computers and Mathematics with Applications. 2008. V. 56. P. 431–443.
101. Бочарова О. В., Ватульян А. О. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 3. С. 275–282.
102. Ватульян А. О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. 2010. Т. 74. № 6. С. 911–918.
103. Nedin R., Nesterov S., Vatuljan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // Int. J. Solids. Struct. 2014. V. 51. № 3–4. P. 767–773.
104. Ватульян А. О., Сатуновский П. С. Об определении упругих модулей при анализе колебаний неоднородного слоя // Доклады РАН. 2007. Т. 414. № 1. С. 36–38.
105. Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В. Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 6. С. 723–730.
106. Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В. Идентификация неоднородных свойств ортотропного упругого слоя // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 6. С. 752–758.



107. Vatuljan A. O., Bogachev I. V., Yavruyan O. V. Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer // *Int. J. Solids. Struct.* 2014. V. 51. № 11–12. P. 2238–2243.
108. Толоконников Л. А., Юдачев В. В., О прохождении плоской звуковой волны через плоский упругий слой с неоднородным покрытием / Матер. междунар. научн. конф. “Совр. пробл. математики, механики, информатики”. Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. С. 477–480.
109. Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием // *ПММ*, 2014. Т. 78. Вып. 4. С. 519–526.
110. Скобельцын С. А. Определение параметров неоднородности анизотропного упругого слоя по прохождению звука // *Изв. ТулГУ. Технические науки*. 2016. Вып. 7. Ч. 2. С. 246–257.
111. Скобельцын С. А. Определение положения границы разделения двухслойной упругой пластины по отражению звука // *Изв. ТулГУ. Естественные науки*. 2014. Вып. 3. С. 122–130.
112. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Определение параметров неоднородности анизотропного покрытия упругого полупространства по отражению звука // Тез. докл. 8-й Всероссийской научной конф. с международным участием “Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред”. М.: ИПРИМ РАН, 2018. С. 58.
113. Скобельцын С. А. Идентификация плотности материала упругого цилиндра по рассеянному акустическому полю // *Изв. ТулГУ. Естественные науки*. 2015. Вып. 4. С. 158–169.
114. Скобельцын С. А., Пешков Н. Ю. Определение положения эллиптической полости в упругом цилиндре по отражению звука // *Изв. ТулГУ. Технические науки*. 2018. Вып. 1. С. 109–121.
115. Скобельцын С. А. Идентификация размера и положения полости в упругом шаре по отражению звуковой волны // Сб. трудов Междунар. научно-технической конф. “Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики” Воронеж: “Научно-исследовательские публикации”. 2017. С. 1255–1262.
116. Skobelt’syn S. A., Peshkov N. Y. Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019. V. 1203. 012023. pp. 1–10.
117. Скобельцын С. А. Идентификация параметров анизотропного покрытия упругого шара по отраженному звуку // *Изв. ТулГУ. Технические науки*. 2016. Вып. 11. Ч. 2. С. 144–156.
118. Скобельцын С. А. Определение направления оси упругой симметрии анизотропного шара по рассеянному звуковому полю // Сб. трудов II Всероссийской акустической конференции, совмещенной с XXX сессией Российского акустического общества. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2017. С. 1699–1705.
119. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 5. С. 552–558.
120. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // *ПММ*. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 480–488.

121. Скобельцын С. А. Оценка свойств покрытия конечной упругой пластины с полостью, обеспечивающих заданные параметры отражения звука // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2017. № 7. С. 83–92.
122. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Об определении линейных законов неоднородности цилиндрического упругого слоя, имеющего наименьшее отражение в заданном направлении при рассеянии звука // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 4. С. 54–62.
123. Скобельцын С. А. Определение параметров неоднородности покрытия эллиптического цилиндра по рассеянию звука в присутствии упругого полупространства // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 290–302.
124. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 11. С. 89–98.
125. Скобельцын С. А. Минимизация рассеяния звука сфероидом вблизи идеальной поверхности выбором параметров внешнего слоя // Изв. ТулГУ. Технические науки, 2018. Вып. 9. С. 421–437.
126. Бобровницкий Ю. И. Теория новых поглощающих и нерассеивающих покрытий повышенной эффективности // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 5. С. 613–624.
127. Бобровницкий Ю. И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 6. С. 879–889.
128. Бобровницкий Ю. И., Морозов К. Д., Томилина Т. М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акуст. журн. 2010. Т. 56. № 2. С. 147–151.
129. Бобровницкий Ю. И. Научные основы акустического стелса // Доклады Академии наук. 2012. Т. 442. № 1. С. 41–44.
130. Бобровницкий Ю. И., Томилина Т. М. Поглощение звука и метаматериалы (обзор) // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 5. С. 517–525.

## REFERENCES

1. Tikhonov A. N. 1935, “Teorema edinstvennosti dlia uravneniia teploprovodnosti”, *Math. sbornik*, vol. 42. no. 2. pp. 199–216, [in Russian].
2. Tikhonov A. N. 1943, “Ob ustoichivosti obratnykh zadach”, *Reports USSR Acad. Sci.*, vol. 39. no. 5. pp. 195–198, [in Russian].
3. Tikhonov A. N. 1963, “O regularizatsii nekorrektno postavlennykh zadach”, *Reports USSR Acad. Sci.*, no. 1. pp. 49–52, [in Russian].
4. Tikhonov A. N. 1963, “O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regularizatsii”, *Reports USSR Acad. Sci.*, no. 3. pp. 501–504, [in Russian].
5. Tikhonov A. N. & Arsenin V. Ya. 1986, “Metody resheniia nekorrektnykh zadach”, Nauka, Moscow, 256 p., [in Russian].

6. Tikhonov A., Leonov A. & YAgola A. 1995, "Nelineinye nekorrektnye zadachi", Nauka, Moscow, 398 p., [in Russian].
7. Lavrentev M.M., Romanov V.G. & Shishatskii S.P. 1980, "Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza", Nauka, Moscow, 288 p., [in Russian].
8. Romanov V.G., Kabanikhin S.I. & Pukhnacheva T.P. 1982, "K teorii obratnykh zadach elektrodinamiki", *Reports USSR Acad. Sci.*, vol. 266. no. 5. pp. 1070–1073, [in Russian].
9. Romanov V.G. 1991, "Teoremy edinstvennosti v obratnykh zadachakh dlia nekotorykh uravnenii vtorogo poriadka", *Reports USSR Acad. Sci.*, vol. 321. no. 2. pp. 254–257, [in Russian].
10. Romanov V.G. 2005, "Ustoichivost v obratnykh zadachakh", Nauchnyi Mir, Moscow, 296 p., [in Russian].
11. Romanov V.G. 2007, "O zadache opredeleniia struktury sloistoi sredy i formy impulsnogo istochnika", *Siberian Mathematical J.*, vol. 48. no. 4. pp. 867–881, [in Russian].
12. Romanov V.G. 2007, "Obratnaia zadacha dlia uravnenii uprugosti pri neizvestnoi forme impulsnogo istochnika", *RAS reports*, T. 417. № 6. pp. 746–752, [in Russian].
13. Kabanikhin S.I. 1992, "Metody resheniia obratnykh dinamicheskikh zadach dlia giperbolicheskikh uravnenii", *Uslovno-korektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza*. Nauka, Novosibirsk, 1992. С. 109–123, [in Russian].
14. Kabanikhin S.I. & Karchevskii A.L. 1998, "Optimizatsionnyi algoritm resheniia zadachi Koshi dlia ellipticheskogo uravneniia", *RAS reports*, vol. 359. no. 4. pp. 445–447, [in Russian].
15. Kabanikhin S.I. 2009, "Obratnye i nekorrektnye zadachi", *Sibir. nauch. izd.*, Novosibirsk, 457 p., [in Russian].
16. Lavrentev M.M., Reznitckaia K.G. & YAkhnо. V.G. 1982, *Odnomernye obratnye zadachi matematicheskoi fiziki*. Nauka, Novosibirsk, 88 p., [in Russian].
17. YAkhnо. V.G. 1990, "Obratnye zadachi dlia differentsialnykh uravnenii uprugosti", Nauka, Novosibirsk, 303 p., [in Russian].
18. Karchevsky A.L. & YAkhnо. V.G. 1999, "One-dimensional inverse problems for systems of elasticity with a source of explosive type", *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*, VSP. Netherlands. 1999, vol. 7. no. 4. pp. 347–364, [in Russian].
19. Anikonov Yu.E. 1978, "Nekotorye metody issledovaniia mnogomernykh obratnykh zadach dlia differentsialnykh uravnenii", Nauka, Novosibirsk, 118 p., [in Russian].
20. Anikonov Yu.E., Bubnov B. A. & Erokhin G. N. 2001, "Inverse and Ill-Posed Sources Problems", VSP, Utrecht. Netherland, 239 p.
21. Anikonov Yu.E. 2001, "Inverse problems for kinetic and other evolution equations", VSP, Utrecht. Netherland, 270 p.
22. Vatuljan A. O. 2007, "Obratnye zadachi v mehanike deformiruemogo tverdogo tela", Fizmatlit, Moscow, 224 p., [in Russian].
23. Samarskii A. A, Vabishevich P.N. 2009, "Chislennye metody resheniia obratnykh zadach matematicheskoi fiziki", *Izd. LKI*, Moscow, 480 p., [in Russian].

24. Colton D. & Kress R. 1983, "Integral Equation Methods in Scattering Theory", New York: Wiley-Interscience, 320 p.
25. Colton D. 1984, "The inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves", *SIAM Review*, vol.26. pp. 323-350.
26. Colton D. & Kress R. 1987, "Metody integralnykh uravnenii v teorii rasseianiia", Mir, Moscow, 311 p., [in Russian].
27. Colton D. & Kress R. 1998, "Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, 2nd edition", New York: Springer 1998. 336 p.
28. Colton D. & Kress R. 2013, "Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory", Berlin: Springer, 430 p.
29. Goriunov A. L. & Saskovets A. V. 1989, "Obratnye zadachi rasseianiia v akustike", MSU, Moscow, 152 p., [in Russian].
30. Burov V. A., Prudnikova I. P. & Sirotkina N. S. 1992, "Inverse problem of ultrasonic scattering by boundary inhomogeneity in isotropic solids", *Acoust. Physics*, vol. 38. no. 6. pp. 1013–1018.
31. Burov V. A. & Rumiantseva O. D. 1992, "Solution of two-dimensional acoustical inverse scattering problem based on functional-analytical methods", *Akust. Zhurnal*, vol. 38. no. 3. pp. 413–420, [in Russian].
32. Burov V. A., Popov A. Iu., Sergeev S. N. & Shurup A. S. 2005, "Akusticheskaia tomografiia okeana pri ispolzovanii nestandartnogo predstavleniia refrakcionnykh neodnorodnostei", *Akust. Zhurnal*, vol. 51. no. 5. pp. 602–613, [in Russian].
33. Alekseenko N. V., Burov V. A. & Rumiantseva O. D. 2005, "Reshenie trekhmernoi obratnoi zadachi akusticheskogo rasseianiia na osnove algoritma Novikova-KHenkina", *Akust. Zhurnal*, vol. 51. no. 4. pp. 437–446, [in Russian].
34. Alekseenko N. V., Burov V. A. & Rumiantseva O. D. 2008, "Reshenie trekhmernoi obratnoi zadachi akusticheskogo rasseianiia. Modifitsirovannyi algoritm Novikova", *Akust. Zhurnal*, vol. 54. no. 3. pp. 469–482, [in Russian].
35. Burov V. A., Kasatkina E. E., Marin A. O. & Rumiantseva O. D. 2007, "Ocenki maksimalnogo pravdopodobiia v korreliatsionnoi akusticheskoi termotomografii", *Akust. Zhurnal*, vol. 53. no. 4. pp. 580–596, [in Russian].
36. Burov V. A. & Shmelev A. A. 2009, "Chislennoe i fizicheskoe modelirovanie protsessa tomografii na osnove akusticheskikh nelineinykh effektov tretogo poriadka", *Akust. Zhurnal*, vol. 55. № 4-5. pp. 466–480, [in Russian].
37. Burov V. A., Vecherin S. N., Morozov S. A. & Rumiantseva O. D. 2010, "Modelirovanie tochnogo resheniia obratnoi zadachi akusticheskogo rasseianiia funktsionalnymi metodami", *Akust. Zhurnal*, vol. 56. no. 4. pp. 516–536, [in Russian].
38. Burov V. A. & Rumiantseva O. D. 2003, "Edinstvennost i ustoiчивost resheniia obratnoi zadachi akusticheskogo rasseianiia", *Akust. Zhurnal*, vol. 49. no. 5. pp. 590–603, [in Russian].
39. Burov V. A. & Rumiantseva O. D. 2018, "Obratnye volnovye zadachi akusticheskoi tomografii: Obratnye zadachi izlucheniia v akustike P. 1", URSS, Moscow, 384 p., [in Russian].

40. Burov V. A. & Rumiantceva O. D. 2020, "Obratnye volnovye zadachi akusticheskoi tomografii: Obratnye zadachi akusticheskogo rasseianiia P. 2", URSS, Moscow, 760 p., [in Russian].
41. Vorovich I. I. & Sumbatian M. A. 1990, "Vosstanovlenie obraza defekta po rasseiannomu poliu v akusticheskom priblizhenii", *Izv. USSR Academy of Sciences: MSB*, no. 6. pp. 79–84. 1, [in Russian].
42. Vorovich I. I., Boyev N. V. & Sumbatyan M. A. 2001, "Reconstruction of the obstacle shape in acoustic medium under ultrasonic scanning", *Inverse Problems in Engineering*. 2001, vol. 9. no. 4. pp. 315–337, [in Russian].
43. Goryunov A. A. & Rychagov M. N. 1989, "Reconstruction of a refraction inhomogeneity by the method of averages", *Soviet Journal of Nondestructive Testing*. 1989, vol. 24. no. 12. pp. 805–809, [in Russian].
44. Goryunov A. A. 1992, "Matrix Green's function formalism in acoustic intrascopy problems", *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 1992, vol. 27. no. 6. pp. 381–386, [in Russian].
45. Rinkevich A. V., Smorodinskij Y. G., Volkova N. N. & Zagrebin B. N. 1994, "Group velocity of ultrasonics in transverse-isotrope media", *Defectscopy (rus)*. 1994, no. 2. pp. 58–63, [in Russian].
46. Rinkevich A. B., Smorodinskii Ya. G., Burkhanov A. M., Krivonosova A. S. & Keller B. 2000, "Analysis of ultrasonic fields and flaw detection in aluminum single crystals based on laser detection technique", *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2000, vol. 36. no. 11. pp. 831–838, [in Russian].
47. Perov D. V., Rinkevich A. B., Smorodinskii Ya. G. & Keler B. 2001, "Using wavelets for analyzing ultrasonic fields detected by a laser interferometer. Flaw detection and localization in an aluminum single-crystal", *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2001, vol. 37. no. 12. pp. 889–899, [in Russian].
48. Mogilner L. Y. & Smorodinskii Y. G. 2018, "Ultrasonic Flaw Detection: Adjustment and Calibration of Equipment Using Samples with Cylindrical Drilling", *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2018, T. 54. no. 9 pp. 630–637, [in Russian].
49. David H. Y. 1970, "Yen Interaction of a Plane Acoustic Wave with an Elastic Spherical Shell", *J. Acoust. Soc. Amer.* 1970, vol. 47. no. 5. pp. 1325–1333.
50. Davis C. M., Dragonette L. R. & Flax L. 1978, "Acoustic scattering from silicone rubber cylinders and spheres", *J. Acoust. Soc. Amer.* 1978, vol. 63. no. 6. pp. 268–275.
51. Faran J. J. 1951, "Sound scattering by solid cylinders and spheres", *J. Acoust. Soc. Amer.* 1951, vol. 23. no. 4. pp. 405–418.
52. Flax L., Dragonette L. R. & Überall H. 2004, "Primenenie teorii uprugikh rezonansov pri izuchenii rasseianiia zvuka", *Akust. Zhurnal*, vol. 49. no. 1. pp. 87–92, [in Russian].
53. Liamshev L. M. 1958, "Difraktsiia zvuka na beskonechnoi tonkoi tsilindricheskoi obolochke", *Akust. Zhurnal*, vol. 4. no. 2. pp. 161–167, [in Russian].
54. Liamshev L. M. 1959, "Rasseianie zvuka uprugimi tsilindrami", *Akust. Zhurnal*, vol. 5. no. 1. pp. 58–63, [in Russian].

- 
55. SHenderov E.L. 1963, "Prohozhdenie zvukovoi volny cherez upruguiu tsilindricheskuiu obolochku", *Akust. Zhurnal*, vol. 9. no. 2. pp. 222–230, [in Russian].
56. Lee F.A. 1963, "Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder", *Acustica*. 1963, vol. 13. no. 3. pp. 26–31.
57. Hickling R. 1967, "Echoes from Spherical Shells in Air.", *J. Acoust. Soc. Amer.* 1967, vol. 42. no. 2. pp. 388–390.
58. Gnatovskii I.I. 1968, "Rasseianie ploskoi zvukovoi volny na tonkoi uprugoi sfericheskoi obolochke", *Applied acoustics and vibration technology*, Kiev, pp. 23–28, [in Russian].
59. Metsaveer Ya. A. 1970, "O rasseianii voln uprugimi sfericheskimi obolochkami v akusticheskoi srede", *Izv. Acad. Nauk Estonian SSR*, vol. 19, no. 4. pp. 415–422, [in Russian].
60. Babkin V.P. & Fadeeva L.M. 1971, "Modelnye eksperimenty po attestatsii sharovykh mishenei", *Proceedings of Acoust. Institute*, no. 17. pp. 80–98, [in Russian].
61. Metsaveer Ya. A. 1971, "O primenении teorii obolochek v zadachakh rasseianiia akusticheskikh voln ot sfericheskikh obolochek v zhidkoi srede", *Izv. Acad. Nauk Estonian SSR*, vol. 15. no. 3. pp. 321–328, [in Russian].
62. Veksler N.D. 1975, "Difraktsiia ploskoi zvukovoi volny na poloi uprugoi sfere", *Akust. Zhurnal*, vol. 21. no. 5. pp. 321–335, [in Russian].
63. Plahov D.D. & Savolainen G.Ia. 1975, "Difraktsiia sfericheskoi zvukovoi volny na uprugoi sfericheskoi obolochke", *Akust. Zhurnal*, vol. 21. no. 5. pp. 789–796, [in Russian].
64. Vogt R.H. & Neubauer W.G. 1976, "Relationship between acoustic reflection and vibrational modes of elastic spheres", *J. Acoust. Soc. Amer.* 1976, vol. 60. no. 1. P. 15–22.
65. Kulko V.F. & Mikhnova M.S. 1979, "Rezonansnye iavleniia, vznikaiushchie pri padenii akusticheskikh voln na shar", *Otbor i peredacha informatsii (Kiev)*. 1979, no. 58. pp. 128–132, [in Russian].
66. George J., Nagl A. & Überall H. 1979, "Isolation of the resonant component in acoustic scattering from fluid-loaded elastic spherical shells", *J. Acoust. Soc. Amer.* 1979, vol. 65. no. 2. P. 368–373.
67. Veksler N.D., Korsunskii V.M. & Rybak S.A. 1990, "Rasseianiia ploskoi nachlonno pada-iushchei volny krugovoi tsilindricheskoi obolochkoi", *Akust. Zhurnal*, vol. 36. no. 1. pp. 12–16, [in Russian].
68. Dykhta V.V., Kunets Ia.I. & Poddubniak A.P. 1990, "Osesimmetrichnoe rasseianie zvukovykh impulsov uprugoi sfericheskoi obolochkoi s otverstiem", *Solid mechanics*, no. 4. pp. 141–148, [in Russian].
69. Cleshchev A.A. 2004, "Difraktsiia zvuka ot tochechnogo istochnika na uprugoi tsilindricheskoi obolochke", *Akust. Zhurnal*, vol. 50. no. 1. pp. 86–89, [in Russian].
70. Kovalev V.A. 2006, "Asimptoticheskii podhod v zadachakh rasseianiia akusticheskikh voln uprugimi obolochkami", *Bulletin Samara state. Univ.*, no. 9. pp. 42–54, [in Russian].
71. Marnevskaia L.A. 1972, "K difraktsii zvukovoi volny na share s nekoncentricheskimi sharovymi vliucheniemi", *Akust. Zhurnal*, vol. 18. no. 1. pp. 571–578, [in Russian].

72. Bezrukov A. V., Prihodko V. Iu. & Tiutekin V. V. 1986, "Rasseianie zvukovykh voln uprugimi radialno-sloistymi tcilindricheskimi telami", *Akust. Zhurnal*, vol. 32. no. 6. pp. 762–766, [in Russian].
73. Kovalenko G. P. 1987, "K zadache o difraktcii akusticheskoi volny na neodnorodnom tverdom tele", *Akust. Zhurnal*, vol. 33. no. 6. pp. 1060–1063, [in Russian].
74. Skobel'tsyn S. A. & Tolokonnikov L. A. 1995, "Rasseianie zvukovykh voln transversalno-izotropnym neodnorodnym tcilindricheskim sloem", *Akust. Zhurnal*, vol. 41. no. 1. pp. 134–138, [in Russian].
75. Tolokonnikov L. A. 1998, "Difraktsiia zvukovykh voln na neodnorodnom anizotropnom polom tcilindre", *Oboronnaia tekhnika*, no. 4–5. pp. 11–14, [in Russian].
76. Tolokonnikov L. A. 1998, "Difraktsiia tcilindricheskikh voln na neodnorodnoi transversalno-izotropnoi tcilindricheskoi obolochke", *Oboronnaia tekhnika*, no. 4–5. pp. 9–11, [in Russian].
77. Tolokonnikov L. A. 2006, "Rezonansnoe rasseianie zvuka transversalno-izotropnoi tcilindricheskoi obolochkoi", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Geodyn. Physics. Maths. Thermodyn. Geoecology*, no. 3. pp. 106–114, [in Russian].
78. Romanov A. G. & Tolokonnikov L. A. 2009, "Rasseianie ploskoi zvukovoi volny neodnorodnym uprugim polym tcilindrom v viazkoi zhidkosti", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 1. pp. 62–70, [in Russian].
79. Tolokonnikov L. A. & Romanov A. G. 2008, "Difraktsiia tcilindricheskikh zvukovykh voln na neodnorodnom polom tcilindre v viazkoi zhidkosti", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2. pp. 151–160, [in Russian].
80. Larin N. V. & Tolokonnikov L. A. 2009, "Difraktsiia ploskoi zvukovoi volny na neodnorodnom uprugom tcilindricheskom sloe, granichashchem s neviazkimi teploprovodnymi zhidkostiami", *J. Appl Math. Mech.*, vol. 73. no. 3. pp. 474–483, [in Russian].
81. Tolokonnikov L. A. & Sodomov A. A. 2006, "O difraktcii zvuka na neodnorodnoi transversalno-izotropnoi tcilindricheskoi obolochke v sloe zhidkosti", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Maths. Mech. Computer science*, vol. 12. no. 5. pp. 208–216, [in Russian].
82. Tolokonnikov L. A. & Romanov A. G. 2009, "Difraktsiia zvukovykh voln na neodnorodnom uprugom polom tcilindre v sloe zhidkosti s zhestkimi granitcami", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 1-2. pp. 3-10, [in Russian].
83. Tolokonnikov L. A. & Romanov A. G. 2008, "Rasprostranenie zvuka v volnovode v prisutstvii neodnorodnoi tcilindricheskoi obolochki proizvolnoi tolshchiny", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2. pp. 161–176, [in Russian].
84. Tolokonnikov L. A. 2009, "Difraktsiia zvuka na transversalno-izotropnoi tcilindricheskoi obolochke proizvolnoi tolshchiny v volnovode s akusticheski miagkimi granitcami", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3. pp. 154–163, [in Russian].
85. Romanov A. G. & Tolokonnikov L. A. 2011, "Rasseianie zvukovykh voln tcilindrom s neodnorodnym uprugim pokrytiem", *J. Appl Math. Mech.*, vol. 75. no. 5. pp. 850–857, [in Russian].
86. Tolokonnikov L. A. 2013, "Rasseianie naclonno padaiushchei ploskoi zvukovoi volny uprugim tcilindrom s neodnorodnym pokrytiem", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2. Part 2. pp. 265–274, [in Russian].

87. Tolokonnikov L. A. 2013, “Difraktsiia tsilindricheskikh zvukovykh voln na tsilindre s neodnorodnym uprugim pokrytiem”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3. pp. 202–208, [in Russian].
88. Skobel'tsyn S. A. & Tolokonnikov L. A. 1990, “Prohozhdenie zvukovykh voln cherez transversalno-izotropnyi neodnorodnyi ploskii sloi”, *Akust. Zhurnal*, vol. 36. no. 4. pp. 740–744, [in Russian].
89. Tolokonnikov L. A. 1999, “Otrazhenie i prelomlenie ploskoi zvukovoi volny anizotropnym neodnorodnym sloem”, *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 40. no. 5. pp. 179–184, [in Russian].
90. Tolokonnikov L. A. 1998, “Prohozhdenie zvuka cherez neodnorodnyi anizotropnyi sloi, granichashchii s viazkimi zhidkostiami”, *J. Appl Math. Mech.*, vol. 62. no. 6. pp. 1029–1035, [in Russian].
91. Larin N. V. & Tolokonnikov L. A. 2006, “Prohozhdenie ploskoi zvukovoi volny cherez neodnorodnyi termouprugii sloi”, *J. Appl Math. Mech.*, vol. 70. no. 4. pp. 650–659, [in Russian].
92. Harari I. & Hughes T. J. R. 1991, “Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems”, *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* 1991, vol. 87. pp. 59–96.
93. Gan H., Levin P. L. & Ludwig R. 1993, “Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain”, *J. Acoust. Soc. Am.* 1993, vol. 94. no. 3. Pt. 1. pp. 1651–1662.
94. Ihlenburg F. 2013, *Finite element analysis of acoustic scattering*. New York: Springer Publishing Company, Inc., 226 p.
95. Gallager R. 1984, “Metod konechnykh elementov. Osnovy”, Mir, Moscow, 428 p., [in Russian].
96. Polezhaev V. I., Prostomolotov A. I. & Fedoseev A. I. 1987, “Metod konechnykh elementov v mehanike viazkoi zhidkosti”, *Results of science and technology. VINITI. Ser. Mechanics of fluid and gas*, vol. 21. pp. 3–92, [in Russian].
97. Skobel'tsyn S. A. 2004, “Podhod k resheniiu zadach o rasseianii uprugikh voln s ispolzovaniem MKE”, *Thes. doc. Int. sci. conf. Modern problems of mathematics, mechanics, computer science*, Tula: TulSU, 2004. pp. 135–136, [in Russian].
98. Ivanov V. I. & Skobel'tsyn S. A. 2008, “Modelirovanie reshenii zadach akustiki s ispolzovaniem MKE”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2. Tula: TulSU, pp. 132–145, [in Russian].
99. McLaughlin J. & Yoon J.-R. 2004, “Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement”, *Inverse Problems*. 2004, V 20. pp. 25–45, [in Russian].
100. Jadamba B., Khan A. A. & Raciti F. 2008, “On the inverse problem of identifying Lamé coefficients in linear elasticity”, *J. Computers and Mathematics with Applications*. 2008, vol. 56. pp. 431–443.
101. Bocharova O. V. & Vatuljan A. O. 2009, “O rekonstruktsii plotnosti i modulua Younga dlia neodnorodnogo sterzhnia”, *Akust. Zhurnal*, 2009. T. 55. no. 3. pp. 275–282, [in Russian].
102. Vatuljan A. O. 2010, “K teorii obratnykh koeffitsientnykh zadach v lineinoi mehanike deformiruемого tela”, *J. Appl Math. Mech.*, vol. 74. no. 6. pp. 911–918, [in Russian].



103. Nedin R., Nesterov S. & Vatuljan A. 2014, "On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod", *Int. J. Solids. Struct.* 2014, vol. 51. no. 3–4. pp. 767–773.
104. Vatuljan A. O. & Satunovskii P. S. 2007, "Ob opredelenii uprugikh modulei pri analize kolebanii neodnorodnogo sloia", *RAS reports*, vol. 414. no. 1. pp. 36–38, [in Russian].
105. Vatuljan A. O., Iavruian O. V. & Bogachev I. V. 2011, "Identifikatsiia uprugikh harakteristik neodnorodnogo po tolshchine sloia", *Akust. Zhurnal*, vol. 57. no. 6. pp. 723–730, [in Russian].
106. Vatuljan A. O., Iavruian O. V. & Bogachev I. V. 2013, "Identifikatsiia neodnorodnykh svoystv ortotropnogo uprugogo sloia", *Akust. Zhurnal*, vol. 59. no. 6. pp. 752–758, [in Russian].
107. Vatuljan A. O., Bogachev I. V. & Yavruyan O. V. 2014, "Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer", *Int. J. Solids. Struct.* 2014, vol. 51. no. 11–12. pp. 2238–2243.
108. Tolokonnikov L. A. & Yudachev V. V. 2013, "O prohozhdenii ploskoi zvukovoi volny cherez ploskii uprugii sloi s neodnorodnym pokrytiem", *Math. Int. sci. conf. "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"*, Tula: Izd. TulSU, pp. 477–480, [in Russian].
109. Tolokonnikov L. A. 2014, "Rasseianie ploskoi zvukovoi volny uprugim sharom s neodnorodnym pokrytiem", *J. Appl Math. Mech.*, vol. 78. no. 4. pp. 519–526, [in Russian].
110. Skobel'tsyn S. A. 2016, "Opredelenie parametrov neodnorodnosti anizotropnogo uprugogo sloia po prohozhdeniiu zvuka", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 7. P. 2. pp. 246–257, [in Russian].
111. Skobel'tsyn S. A. 2014, "Opredelenie polozheniia granitsy razdeleniia dvukhsloinoi uprugoi plastiny po otrazheniiu zvuka", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3. pp. 122–130, [in Russian].
112. Skobel'tsyn S. A. & Tolokonnikov L. A. 2018, "Opredelenie parametrov neodnorodnosti anizotropnogo pokrytiia uprugogo poluprostranstva po otrazheniiu zvuka", *Thes. doc. 8-th All-Russian sci. conf. "Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, slozhnykh i geterogennykh sred"*, IPRIM RAS, Moscow, pp. 58, [in Russian].
113. Skobel'tsyn S. A. 2015, "Identifikatsiia plotnosti materiala uprugogo tsilindra po rasseianomu akusticheskomu poliui", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 4. pp. 158–169, [in Russian].
114. Skobel'tsyn S. A. & Peshkov N. Yu. 2018, "Opredelenie polozheniia ellipticheskoi polosti v uprugom tsilindre po otrazheniiu zvuka", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 1. pp. 109–121, [in Russian].
115. Skobel'tsyn S. A. 2017, "Identifikatsiia razmera i polozheniia polosti v uprugom share po otrazheniiu zvukovoi volny", *Proceedings Int. sci.-tech. conf. Actual problems of applied mathematics, computer science and mechanics*, "Nauchno-issledovatel'skie publikatsii", Voronezh, pp. 1255–1262, [in Russian].
116. Skobel'tsyn S. A. & Peshkov N. Y. 2019, "Finding, by means of a scattered sound, the geometric parameters of a finite elastic cylinder located near the half-space border", *J. Phys.: Conf. Ser.*, vol. 1203. 012023. pp. 1–10.

117. Skobel'tsyn S. A. 2016, "Identifikatsiia parametrov anizotropnogo pokrytiia uprugogo shara po otrazhennomu zvuku", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 11. P. 2. pp. 144–156, [in Russian].
118. Skobel'tsyn S. A. 2017, "Opredelenie napravleniia osi uprugoi simmetrii anizotropnogo shara po rasseiannomu zvukovomu poli", *Proceedings of the II All-Russian Acoustic Conference*, IPF RAS, N. Novgorod, pp. 1699–1705, [in Russian].
119. Larin N. V., Skobel'tsyn S. A. & Tolokonnikov L. A. 2015, "Opredelenie zakonov neodnorodnosti ploskogo uprugogo sloia s zadannymi zvukootrazhaiushchimi svoistvami", *Akust. Zhurnal*, vol. 61. no. 5. pp. 552–558, [in Russian].
120. Larin N. V., Skobel'tsyn S. A. & Tolokonnikov L. A. 2016, "Modelirovanie neodnorodnogo pokrytiia uprugoi plastiny s optimalnymi zvukootrazhaiushchimi svoistvami", *J. Appl Math. Mech.*, vol. 80. no. 4. pp. 480–488, [in Russian].
121. Skobel'tsyn S. A. 2017, "Ocenka svoistv pokrytiia konechnoi uprugoi plastiny s polostiu, obespechivaiushchikh zadannye parametry otrazheniia zvuka", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 7. pp. 83–92, [in Russian].
122. Larin N. V., Skobel'tsyn S. A. & Tolokonnikov L. A. 2014, "Ob opredelenii lineinykh zakonov neodnorodnosti tsilindricheskogo uprugogo sloia, imeiushchego naimenshee otrazhenie v zadannom napravlenii pri rasseianii zvuka", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 4. pp. 54–62, [in Russian].
123. Skobel'tsyn S. A. 2018, "Opredelenie parametrov neodnorodnosti pokrytiia ellipticheskogo tsilindra po rasseianiiu zvuka v prisutstvii uprugogo poluprostranstva", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no. 9. pp. 290–302.
124. Tolokonnikov L. A., Larin N. V. & Skobel'tsyn S. A. 2017, "Modelirovanie neodnorodnogo pokrytiia uprugogo shara s trebuemymi zvukootrazhaiushchimi svoistvami", *Math modeling*, vol. 29. no. 11. pp. 89–98, [in Russian].
125. Skobel'tsyn S. A. 2018, "Minimizatsiia rasseianiia zvuka sferoidom vblizi idealnoi poverkhnosti vyborom parametrov vneshnego sloia", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, 2018. no. 9. pp. 421–437, [in Russian].
126. Bobrovnickii Yu. I. 2007, "Teoriia novykh pogloshchaiushchikh i nerasseivaiushchikh pokrytii povyshennoi effektivnosti", *Akust. Zhurnal*, vol. 53. no. 5. pp. 613–624, [in Russian].
127. Bobrovnickii Yu. I. 2008, "Nerasseivaiushchee pokrytie dlia tsilindra", *Akust. Zhurnal*, vol. 54. no. 6. pp. 879–889, [in Russian].
128. Bobrovnickii Yu. I., Morozov K. D. & Tomilina T. M. 2010, "Periodicheskaiia poverkhnostnaia struktura s ekstremalnymi akusticheskimi svoistvami", *Akust. Zhurnal*, vol. 56. no. 2. pp. 147–151, [in Russian].
129. Bobrovnickii Yu. I. 2012, "Nauchnye osnovy akusticheskogo stelsa", *RAS reports*, vol. 442. no. 1. pp. 41–44, [in Russian].
130. Bobrovnickii Yu. I. & Tomilina T. M. 2018, "Pogloshchenie zvuka i metamaterialy (obzor)", *Akust. Zhurnal*, vol. 64. no. 5. pp. 517–525, [in Russian].

Получено 16.10.2019 г.

Принято в печать 12.11.2019 г.