ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-193-219

О трёхмерных сетках Смоляка I[1]

Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

Это первая статья из серии посвящённой сеткам Смоляка. Работа относится к аналитической теории чисел и в ней рассматриваются вопросы приложения теории чисел к задачам приближенного анализа.

Рассмотрено понятие гиперболического параметра сеток с весами и аналог теоремы Бахвалова для гиперболического параметра сеток с весами и гиперболической дзета-функции сеток.

В данной работе получены следующие результаты:

1. доказана усиленная обобщённая теорема Бахвалова–Коробова для гиперболической дзета-функции трёхмерных сеток;
2. подсчитано число узлов сетки Смоляка с учетом их кратности; число узлов с учетом их весов.
3. подсчитано число узлов сетки Смоляка без учета их кратности;
4. подсчитано число узлов сетки Смоляка с учетом их весов;
5. найдена форма квадратурной формулы с сеткой Смоляка без кратных узлов и найдены явные формулы для весов этой квадратурной формулы. Показано, что количество узлов такой квадратурной формулы в 7 раз меньше, чем в случае формулы с кратными узлами.

Ключевые слова: сетки Смоляка, квадратурные формулы с сетками Смоляка, интерполяционные формулы с сетками Смоляка.

Библиография: 38 названий.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710005_р_а.

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский, Д. В. Горбачев, В. И. Иванов. О трёхмерных сетках Смоляка I// Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 193–219.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-193-219

About three-dimensional nets of Smolyak I[2]

N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov

Dobrovol'sky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate professor of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Gorbachev Dmitry Viktorovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).
e-mail: dvgmail@mail.ru
Ivanov Valerii Ivanovich — Doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

The work refers to the analytical theory of numbers and it deals with the application of number theory to problems of approximate analysis.

The concept of the hyperbolic parameter of grids with weights and the analogue of Bakhvalov's theorem for the hyperbolic parameter of grids with weights and the hyperbolic Zeta function of grids are considered.

In this paper the following results are obtained:

1. a strengthened generalized Bakhvalov–Korobov theorem for the hyperbolic Zeta function of three-dimensional grids is proved;
2. the number of nodes of the resin grid is calculated taking into account their multiplicity; the number of nodes taking into account their weights.
3. the number of nodes of the resin grid is calculated without taking into account their multiplicity;
4. the number of nodes of the resin grid is calculated taking into account their weights;
5. the form of a quadrature formula with a resin grid without multiple nodes is found and explicit formulas for the weights of this quadrature formula are found. It is shown that the number of nodes of such a quadrature formula is 7 times less than in the case of a formula with multiple nodes.

Keywords: grid Smolyak, quadrature formulas with grids of Smolyak, interpolation formula with grids of Smolyak.

Bibliography: 38 titles.

For citation:
N. N. Dobrovol'skii, D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, 2019, "About three-dimensional nets of Smolyak I" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 193–219.

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710005_r_a.

1. Введение

Данная работа посвящена изучению трёхмерных сеток Смоляка. Во введении дается изложение истории вопроса и краткое описание полученных результатов. Так как наша цель — всестороннее изучение трёхмерных сеток Смоляка, то все необходимые результаты будут сформулированы для размерности $s = 3$, хотя они справедливы для произвольной размерности s.

Норма линейного функционала погрешности приближенного интегрирования на классе E_s^α выражается через гиперболическую дзету-функцию сеток. В случае параллелепипедальных сеток гиперболическая дзета-функция сеток совпадает с гиперболической дзета-функцией решёток. Общая оценка величины гиперболической дзета-функции решёток по теореме Бахвалова — Коробова дается через величину гиперболического параметра решётки. Поэтому было актуально найти аналог гиперболического параметра решёток для сеток и получить аналог теоремы Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток. Это было сделано одним из авторов в работе [18]. Таким образом качество сеток стало возможно оценить в зависимости от гиперболического параметра сеток.

Сетки Смоляка относятся к числу парадоксальных сеток. С одной стороны, алгоритмы численного интегрирования по этим сеткам являются ненасышаемыми. С другой стороны, хотя они относятся к числу равномерно распределенных сеток, но величина их отклонения очень велика. Поэтому продолжение исследования этого феномена не потеряло своей актуальности.

Впервые гиперболическая дзета-функция сеток появилась в 1957 году в работе Н. М. Коробова [21], с которой ведется отсчет истории создания теоретико-числового метода. Сам термин появился гораздо позже в 2001 году в работе [14], и в более общем виде определение гиперболической дзета-функции сеток дается в работе [7]. Такая ситуация объясняется логикой развития теоретико-числового метода в приближенном анализе.

На первом этапе его развития к задачам интегрирования периодических функций многих переменных применялись известные результаты из теории чисел о тригонометрических суммах. После введения в 1959 году Н. М. Коробовым параллелепипедальных сеток и понятия оптимальных коэффициентов стали выделяться собственно актуальные задачи теории чисел, решение которых требовалось для развития метода оптимальных коэффициентов.

Прежде всего заметим, что применение метода тригонометрических сумм при анализе вопросов численного интегрирования стал возможным благодаря выделению Н. М. Коробовым класса E_s^α периодических функций с быстро убывающими коэффициентами кратного ряда Фурье.

В работе рассматриваются следующие классы периодических функций: $\mathfrak{A}_3$, E_3^2.

$\mathfrak{A}_3$ – класс периодических функций $f(x_1, x_2, x_3)$ с периодом 1 по каждой переменной и абсолютно сходящимся рядом Фурье

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{+\infty} C(m_1,m_2,m_3)e^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3)}, \quad \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{+\infty} |C(m_1,m_2,m_3)|<\infty. \quad (1)$$

На пространстве $\mathfrak{A}_3$ рассмотрим норму

$$||f(x_1,x_2,x_3)||_{\mathfrak{A}_3} = \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{+\infty} |C(m_1,m_2,m_3)|, \quad (2)$$

относительно которой $\mathfrak{A}_3$ сепарабельное банахово пространство, изоморфное пространству $l_{3,1}$ комплекснозначных функций на фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^3$ со сходящимся рядом из модулей значений.

В пространстве периодических функций $\mathfrak{A}_3$ выделяется класс E_3^2 более гладких функций, определяемый следующими условиями на коэффициенты Фурье.

Пусть $f(x_1,x_2,x_3)\in\mathfrak{A}_3$. Функция $f(x_1,x_2,x_3)\in E_3^2$ тогда и только тогда, когда для ее коэффициентов Фурье

$$C(m_1,m_2,m_3)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_1,x_2,x_3)e^{-2\pi i(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3)}dx_1dx_2dx_3$$

выполнено условие

$$\sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3}|C(m_1,m_2,m_3)|(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^2<\infty$$

где для любого вещественного m полагается $\overline{m}=\max\{1,|m|\}$.

На классе E_3^2 рассмотрим две эквивалентные нормы:

$$||f(\vec{x})||_{E_3^2}=\sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3}|C(m_1,m_2,m_3)|(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^2 \text{ и} \tag{3}$$

$$||f(\vec{x})||_{E_3^2,C_1}=\sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3}|C(m_1,m_2,m_3)|(\overline{C_1m_1}\,\overline{C_1m_2}\,\overline{C_1m_3})^2. \tag{4}$$

Класс функций E_3^2 с нормой (3) будем обозначать E_3^2, а с нормой (4) — $E_3^2(\cdot,C_1)$.

Пространства E_3^2 и $E_3^2(\cdot,C_1)$ — несепарабельные банаховы пространства, изоморфные пространству $l_{3,\infty}$ — ограниченных комплекснозначных функций на фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^3$, которое в силу счётности $\mathbb{Z}^3$ изоморфно пространству l_∞ — ограниченных последовательностей комплексных чисел. Действительно, этот изоморфизм нормированных пространств E_3^2 и $l_{3,\infty}$ задается равенствами для коэффициентов Фурье

$$C(\vec{m})=\frac{c(\vec{m})}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^2},\ \vec{m}\in\mathbb{Z}^3,\quad ||c(\vec{m})||_\infty=\sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3}|c(m_1,m_2,m_3)|<\infty.$$

Шар радиуса $C>0$ в пространстве E_3^2 с нормой (3) обозначают через $E_3^2(C)$, а с нормой (4) — $E_3^2(C,C_1)$. Класс функций E_s^α ввел Н. М. Коробов. О свойствах этого класса подробно можно узнать в [25] и [27] (так же см. [13]).

Рассмотрим *квадратурную формулу с весами*

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\rho_k f[\xi_1(k),\xi_2(k),\xi_3(k)]-R_N[f]. \tag{5}$$

Здесь через $R_N[f]$ обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3$$

средним взвешенным значением функции $f(x_1,x_2,x_3)$, вычисленным в точках

$$M_k=(\xi_1(k),\xi_2(k),\xi_3(k))\qquad(k=1\dots N).$$

Совокупность M точек M_k называется *сеткой* M, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k=\rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные.

Для произвольных целых m_1,m_2,m_3 суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,m_2,m_3)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,m_2,m_3)=\sum_{k=1}^N\rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+m_2\xi_2(k)+m_3\xi_3(k)]}, \tag{6}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Будем, также, рассматривать *нормированные тригонометрические суммы сетки с весами*

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(m_1, m_2, m_3) = \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(m_1, m_2, m_3).$$

Положим $\rho(M) = \sum\limits_{j=1}^{N} |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка

$$|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \frac{1}{N}\rho(M).$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто тригонометрическая сумма сетки и писать $S_M(\vec{m})$ и нормированная тригонометрическая сумма сетки $S^*_M(\vec{m})$.

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул (см. [7]). [3]

Теорема 1. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*

$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$

$$= C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \tag{7}$$

и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда, и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s-мерном кубе.

Из этой теоремы непосредственно следует, что для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования $R_N[f]$ на классе $\mathfrak{A}_s$ справедливо равенство

$$\|R_N[\cdot]\|_{\mathfrak{A}_s} = \max\left(\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|, \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus\{\vec{0}\}} |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|\right). \tag{8}$$

Анализ формулы (8) позволяет сделать вывод, что класс $\mathfrak{A}_s$ слишком широк для рассмотрения вопросов о скорости сходимости погрешности квадратурной формулы к нулю. Как показали Н. М. Коробов и его последователи уже на классе E^α_s этот вопрос становится содержательным.

В работе [9] вводится понятие гиперболического параметра $q(\Lambda)$ решётки Λ и доказывается обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции решёток.[4]

Теорема 2. **(Обобщенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функци решеток)** *Для любой s-мерной решетки Λ справедливы оценки*

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \leqslant \begin{cases} (2 + 2\zeta(\alpha))^s \cdot \left(1 + \left[\dfrac{1}{\lambda}\right]\right)^s, & \text{при } q(\Lambda) = 1; \\ 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s \dfrac{(\ln q(\Lambda) + 1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)}, & \text{при } q(\Lambda) > 1, \end{cases}$$

где λ — наибольшее число такое, что s-мерный куб $[-\lambda;\lambda]^s$ не содержит ни одной ненулевой точки решетки Λ.

[3] Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$.

[4] Гиперболический параметр $q(\Lambda)$ решётки Λ задается равенством $q(\Lambda) = \min\limits_{\vec{x}\in\Lambda, \vec{x}\neq\vec{0}} \overline{x_1}\cdot\ldots\cdot\overline{x_s}$.

Доказательство. См. [9]. □

Во втором разделе доказывается аналог этой теоремы для случая гиперболической дзета-функции сеток.

В теоретико-числовом методе приближенного анализа рассматриваются несколько основных классов сеток — это неравномерные сетки [21], параллелепипедальные сетки [22], комбинированные сетки [26], алгебраические сетки [31], обобщенные параллелепипедальные сетки [10], сетки Хэммерсли [37], сетки Холтона [36], сетки Фора [35], ЛП$_\tau$ сетки [30] и сетки Смоляка [29]. Современный обзор всех этих сеток дан в работе [28].

Отметим важную особенность параллелепипедальных сеток, комбинированных сеток, алгебраических сеток, обобщенных параллелепипедальных сеток и сеток Смоляка. Алгоритмы численного интегрирования по квадратурным формулам с этими классами сеток являются ненасыщаемыми на классах функций E_s^α.

В данной работе детально изучены трёхмерные сетки Смоляка, так как ранее в работе [16] и диссертации [19] были всесторонне изучены двумерные сетки Смоляка, а в работе [20] была дана достаточно подробно общая теория многомерных s-мерных сеток Смоляка, но аналогов результатов из работы [16] не удалось получить. Поэтому встал вопрос о рассмотрении следующего по сложности трёхмерного случая.

Рассмотрим 3-мерную простейшую декартову сетку

$$M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\frac{k_2}{2^{\nu_2}},\frac{k_3}{2^{\nu_3}}\right)\middle|\, 0\leqslant k_1\leqslant 2^{\nu_1}-1,\, 0\leqslant k_2\leqslant 2^{\nu_2}-1,\, 0\leqslant k_3\leqslant 2^{\nu_3}-1\right\} \tag{9}$$

из $2^{\nu_1+\nu_2+\nu_3}$ точек, которая, также, называется обобщенной равномерной сеткой. Очевидно, что обобщенная равномерная сетка $M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ является декартовым произведением соответствующих одномерных равномерных сеток:

$$M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=M(\nu_1)\times M(\nu_2)\times M(\nu_3).$$

Сетка Смоляка $Sm(q)=Sm(q,3)$ с параметром $q\geqslant 5$ определяется как объединение всех обобщенных равномерных сеток $M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ с $q-2\leqslant \nu_1+\nu_2+\nu_3\leqslant q$, таким образом

$$Sm(q,3)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\frac{k_2}{2^{\nu_2}},\frac{k_3}{2^{\nu_3}}\right)\middle|\, \begin{array}{c} 0\leqslant k_1\leqslant 2^{\nu_1}-1,\, 0\leqslant k_2\leqslant 2^{\nu_2}-1,\, 0\leqslant k_3\leqslant 2^{\nu_3}-1,\\ \nu_1,\nu_2,\nu_3\geqslant 1,\quad q-2\leqslant \nu_1+\nu_2+\nu_3\leqslant q\end{array}\right\}. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что минимальной равномерной сеткой, содержащей сетку Смоляка как подсетку, является $M(q-2,q-2,q-2)$: $Sm(q)\subset M(q-2,q-2,q-2)$.

Трёхмерные сетки Смоляка $Sm(q)$ являются частным случаем s–мерных сеток $Sm(q,s)$, которые использовались в работе [29] для построения квадратурных и интерполяционных формул с весами и на них были получены результаты на различных классах функций, сравнимые с наилучшими из известных.

Естественно изучить величину отклонения этих сеток, как меры равномерности распределения их точек в s–мерном единичном кубе. Здесь возможно три различных подхода: с учетом кратности точек в объединении, без их учета и, наконец, с весами из квадратурной формулы. В работе [19] для первых двух случаев сформулированы общие результаты о величине отклонения сеток Смоляка и впервые было дано решение этой задачи об отклонении сеток Смоляка, а в работе [16] была найдена точная формула для отклонения двумерных сеток Смоляка и в работе были существенно усилены результаты для произвольных s–мерных сеток Смоляка.

Для двумерных сеток Смоляка в работе [19] найдены точные значения тригонометрических сумм сеток. Оказываются, что они принимают только три значения — 0, 1 и -1. Пользуясь этим легко найти точные значения гиперболических параметров сетки Смоляка. Для

гиперболических параметров двумерной сетки Смоляка выполняются равенства:

$$q_3(Sm(q), \rho(\vec{x})) = \infty,$$
$$q_1(Sm(q), \rho(\vec{x})) = q_2(Sm(q), \rho(\vec{x})) = q(Sm(q), \rho(\vec{x})) = 2^{q-1}. \tag{11}$$

Квадратурные формулы с двумерными сетками Сомоляка выглядят достаточно просто (см. [16], стр. 122).

Целью данной серии работ является:

- получение оценок для гиперболической дзета-функции трёхмерных сеток Смоляка;
- получение новых оценок погрешности интерполяционных и квадратурных формул для трёхмерных сеток Смоляка;
- получение явной формулы выражения через элементарные функции граничной функции класса E_3^2 с нормой (4) для сеток Смоляка и вычисление нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурным формулам с сетками Смоляка.

Во втором разделе мы даём новую усиленную форму обобщённой теоремы Бахвалова–Коробова для гиперболической дзета-функции трёхмерных сеток.

Третий раздел посвящён подсчёту количества узлов в трёхмерной сетке Смоляка, при этом это сделано в трёх случаях: число узлов с учетом их кратности; число узлов без учета их кратности; число узлов с учетом их весов.

Последний случай имеет принципиальную важность для приложений, так как позволяет записать квадратурную формулу по сеткам Смоляка без повторения узлов и с явным видом весов.

2. Гиперболический параметр сетки с весами

2.1. Гиперболический крест и гиперболические параметры

В трёхмерном пространстве усеченной нормой называется величина $q(\vec{x}) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$.

Гиперболическим крестом называется область $K_3(t) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leqslant t\}$, а величина t — его параметром. Назовем r–ой компонентой гиперболического креста $K_3(t)$ подмножество

$$K_3^{(r)}(t) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leqslant t, \text{ ровно } r \text{ координат } \vec{x} \text{ отличны от } 0\}.$$

Ясно, что справедливо следующее разбиение гиперболического креста:

$$K_3(t) = \left(\bigcup_{r=1}^{3} K_3^{(r)}(t)\right) \bigcup \{\vec{0}\}.$$

С понятием усеченной нормы и гиперболическим крестом связано понятие гиперболического параметра множества.

Определение 1. *Для произвольного подмножества K фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^3$ гиперболическим параметром $q(K)$ называется величина*

$$q(K) = \min_{\vec{m} \in K} \overline{m_1 m_2 m_3}. \tag{12}$$

Для пустого множества K полагается $q(K) = \infty$.

Ясно, что гиперболический параметр $q(K)$ имеет простой геометрический смысл — он равен наименьшему значению параметра t гиперболического креста $K_3(t)$ такого, что на границе $K_3(t)$ имеются точки множества K, а внутри отсутствуют.

Важную роль в применении понятия гиперболического креста играет количество целых точек в гиперболическом кресте.

Обозначим через $KZ_3(t)$ множество всех целых точек принадлежащих гиперболическому кресту $K_3(t)$, а через $KZ_3^{(r)}(t)$ – множество всех целых точек принадлежащих r–ой компоненте $K_3^{(r)}(t)$ гиперболического креста $K_3(t)$. Таким образом

$$KZ_3(t) = K_3(t) \cap \mathbb{Z}^3, \quad KZ_3^{(r)}(t) = K_3^{(r)}(t) \cap \mathbb{Z}^3.$$

Для $t \geqslant 1$ положим:

$$B_j(t) = \sum_{m_1 \ldots m_j \leqslant t} 1, \tag{13}$$

здесь суммирование проводится только по натуральным значениям переменных $m_1, \ldots, m_j$. Ясно что

$$B_1(t) = [t]. \tag{14}$$

Из разбиения гиперболического креста на r-ые компоненты и определения величин $B_j(t)$ получим равенство для величины $|KZ_3(t)|$ — количества целых точек в гиперболическом кресте:

$$|KZ_3(t)| = 1 + \sum_{r=1}^{3} |KZ_3^{(r)}(t)| = 1 + \sum_{r=1}^{3} C_3^r 2^r B_r(t). \tag{15}$$

В работе [15] найдено число целых точек в гиперболическом кресте при значениях параметра $1 \leqslant t < 21$.

2.2. О гиперболическом параметре сетки

Мы рассматриваем класс $\mathfrak{A}_3$ всех периодических функций $f(\vec{x})$ с периодом 1 по каждой переменной, у которых их ряд Фурье (1) абсолютно сходится. Пространство $\mathfrak{A}_3$ относительно нормы (2) является сепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_1 — всех абсолютно суммируемых комплексно-значных последовательностей (см. [13]).

Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций $E_3^\alpha(C)$ $(\alpha > 1)$ с быстро убывающими коэффициентами Фурье. Через $E_3^\alpha(C)$ обозначается множество функций из E_3^α с нормой, не превосходящей C, то есть шар в банаховом пространстве E_3^α радиуса C с центром в нуле.

Банахово пространство E_3^α состоит из функций $f(x_1, x_2, x_3)$ из $\mathfrak{A}_3$, для которых их ряды Фурье (1) удовлетворяют условиям

$$\sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3} |C(m_1, m_2, m_3)| (\overline{m}_1 \overline{m}_2 \overline{m}_3)^\alpha = \|f(\vec{x})\|_{E_3^\alpha} < \infty. \tag{16}$$

Ясно, что такие ряды Фурье сходятся абсолютно, так как

$$\|f(\vec{x})\|_{\mathfrak{A}_3} \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_3^\alpha} (1 + 2\zeta(\alpha))^3,$$

а поэтому для любого $\alpha > 1$ они представляют непрерывные функции. Здесь и далее, как обычно, $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана.

Относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{E_3^\alpha}$ пространство E_3^α является несепарабельным банаховым пространством изоморфным пространству l_∞ — всех ограниченных комплексно-значных последовательностей (см. [13]).

Для дальнейшего мы будем рассматривать класс $E_3 = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_3^\alpha$. Очевидно $E_3 \subset \mathfrak{A}_3$. Ясно, что класс E_3 незамкнут в пространстве $\mathfrak{A}_3$ относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{\mathfrak{A}_3}$, но является всюду плотным множеством.

Усеченной норменной поверхностью с параметром $t \geqslant 1$ называется множество

$$N_3(t) = \{\vec{x} | q(\vec{x}) = t,\, \vec{x} \neq \vec{0}\},$$

которое является границей гиперболического креста $K_3(t)$. Для натурального t на усеченной норменной поверхности имеется $\tau_3^*(t)$ целых ненулевых точек, где

$$\tau_3^*(t) = \sum_{\vec{m} \in N_3(t)}{}' 1 \tag{17}$$

— число представлений натурального числа t в виде $t = \overline{m}_1 \cdot \overline{m}_2 \cdot \overline{m}_3$.

Используя новые обозначения, можно написать другое выражение для нормы функции $||f(\vec{x})||_{E_3^\alpha}$. Справедливо равенство

$$||f(\vec{x})||_{E_3^\alpha} = \max\left(|C(\vec{0})|, \sup_{t\in\mathbb{N}}\left(t^\alpha \cdot \max_{\vec{m}\in N_3(t)} |C(\vec{m})|\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что произвольная периодическая функция $f(\vec{x})$ из $E_3^\alpha(C)$ по модулю ограничена величиной $C \cdot (1 + 2\zeta(\alpha))^3$, при этом данная оценка достижима на функции

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} \frac{C \cdot e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}}{(\overline{m}_1 \cdot \overline{m}_3 \cdot \overline{m}_3)^\alpha}$$

в точке $\vec{x} = \vec{0}$.

Очевидно, что $E_3^\alpha(C) \subset E_3^\beta(C)$ при $\alpha \geqslant \beta$. Для любой периодической функции $f(\vec{x}) \in E_3^\alpha(C) \subset E_3^\beta(C)$ справедливо неравенство для норм

$$||f(\vec{x})||_{E_3^\alpha} \geqslant ||f(\vec{x})||_{E_3^\beta}.$$

Равенство достигается только для конечных тригонометрических многочленов вида

$$f(\vec{x}) = C(\vec{0}) + \sum_{\vec{m}\in N_3(1)} C(\vec{m})\, e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

В работе [7] дано следующее определение дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p \geqslant 1$.

Определение 2. *Дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p \geqslant 1$ называется функция $\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho})$, заданная в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$ рядом Дирихле*

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) = \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(p, M, \vec{\rho}, n)}{n^\alpha}, \tag{18}$$

где

$$S^*(p, M, \vec{\rho}, n) = \sum_{\vec{m}\in N(n)} |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p. \tag{19}$$

Непосредственно из определения следует неравенство

$$\zeta(p\alpha, p|M, \vec{\rho}) \leqslant \zeta^p(\alpha, 1|M, \vec{\rho}) \quad (\alpha > 1). \tag{20}$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто дзета-функция сетки M с параметром p и писать $\zeta(\alpha, p|M)$.

Теорема 3. *Если $f(x_1, x_2, x_3) \in E_3^\alpha(C)$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$|R_N[f]| \leq C\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \frac{C}{N}\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^\alpha} =$$
$$= C\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + C\cdot\zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}), \tag{21}$$

где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (6). На классе $E_3^\alpha(C)$ эту оценку нельзя улучшить.

Другими словами теорему 3 можно сформулировать так:

Для нормы $\|R_N[f]\|_{E_3^\alpha}$ линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле (5) справедливо равенство

$$\|R_N[f]\|_{E_3^\alpha} = \left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \frac{1}{N}\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_s)^\alpha} =$$
$$= \left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}). \tag{22}$$

Если рассмотреть при $\alpha > \frac{1}{q-1}$ класс $E_3^{\alpha,q}$ с нормой

$$\|f(\vec{x})\|_{E_3^{\alpha,q}} = \left(|C(\vec{0})|^q + \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' |C(\vec{m})|^q(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^{(q-1)\alpha}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если $f(\vec{x}) \in E_3^{\alpha,q}$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$|R_N[f]| \leq \|f(\vec{x})\|_{E_3^{\alpha,q}}\left(\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|^p + \frac{1}{N^p}\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \|f(\vec{x})\|_{E_3^{\alpha,q}}\left(\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|^p + \zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho})\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{23}$$

где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (6). На классе $E_3^{\alpha,q}$ эту оценку нельзя улучшить.

Доказательство. Действительно, по теореме 1

$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$
$$= C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^{\frac{\alpha}{p}}\frac{S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^{\frac{\alpha}{p}}}.$$

Применим к правой части неравенство Гёльдера, получим

$$|R_N[f]| \leqslant \left(|C(\vec{0})|^q + \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' |C(\vec{m})|^q (\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^{\frac{q\alpha}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \cdot$$

$$\cdot \left(\left| \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right|^p + \frac{1}{N^p} \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}} \left(\left| S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right|^p + \zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как неравенство Гёльдера обращается в равенство при

$$C(\vec{0}) = \begin{cases} 0, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1; \\ \frac{\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right|^p}{S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1}, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) \neq 1; \end{cases}$$

и

$$C(\vec{m}) = \begin{cases} 0, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0; \\ \frac{\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})\right|^p}{S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})(\overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3)^\alpha}, & \text{при } S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \neq 0; \end{cases} \qquad \vec{m} \neq \vec{0},$$

то теорема полностью доказана. □

Из теорем 3 и 4 следует, что на классах E_s^α и $E_s^{\alpha,q}$ оценка погрешности приближенного интегрирования сводится к оценке гиперболической дзета-функции сеток. Проводя аналогию с гиперболической дзета-функцией решетки, которая равна гиперболической дзета-функции сеток в случае параллелепипедальной сетки, можно высказать гипотезу, что для гиперболической дзета-функции сеток должен быть справедлив аналог теоремы Бахвалова об оценке гиперболической дзета-функцией решетки через гиперболический параметр решетки.

Цель данного раздела — ввести понятие гиперболических параметров сетки и доказать аналог теоремы Бахвалова для гиперболической дзета-функции сеток.

2.3. Первый, второй и третий гиперболические параметры сеток

В работе [16] было дано такое определение.

"Гиперболическим параметром сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ назовем величину

$$q\left(M, \rho(\vec{x})\right) = \min_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus\{\vec{0}\}, |S(\vec{m})|>0} \overline{m_1} \ldots \overline{m_s}\,. \text{ "}$$

Первое применение гиперболического параметра сетки вытекает из теоремы Абеля (см. [33], стр. 106), позволяющее представить гиперболическую дзету-функцию сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ в интегральном виде

$$\zeta_H(M, \rho(\vec{x})|\alpha) = \alpha \int\limits_{q(M,\rho(\vec{x}))}^{\infty} \frac{D(t|M, \rho(\vec{x}))dt}{t^{\alpha+1}},$$

где

$$D(t|M, \rho(\vec{x})) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^3, \overline{m}_1\overline{m}_2\overline{m}_3\leqslant t}{}' |S(\vec{m})|$$

— сумматорная функция тригонометрической суммы.

В работе [7] для любой сетки M с весами $\vec{\rho}$ на пространстве периодических функций E_3^α рассмотрен линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних заданный равенством

$$g(\vec{x}) = A_{M,\vec{\rho}} f(\vec{x}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \rho_k f[x_1+\xi_1(k), x_2+\xi_2(k), x_3+\xi_3(k)]. \tag{24}$$

Через $A_{M,\vec{\rho}}C(\vec{m})$ обозначается действие линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ на коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$.

Лемма 1. *Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_3^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье*

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \tag{25}$$

справедливо равенство

$$A_{M,\vec{\rho}}C(\vec{m}) = \frac{S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})}{N} C(\vec{m}) = S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) C(\vec{m}) \tag{26}$$

где $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки с весами, а $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — нормированная тригонометрическая сумма сетки с весами.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\left\| A_{M,\vec{\rho}} f(\vec{x}) \right\|_{E_3^\alpha} \leqslant \frac{\rho(M)}{N} \left\| f(\vec{x}) \right\|_{E_3^\alpha}. \tag{27}$$

Доказательство. См. [7], стр. 194. □

С точки зрения величины нормированной тригонометрической суммы сетки с весами естественно определить следующие пять подмножеств фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ таким образом:

$$K_0 = K_0(M,\vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3 \,|\, S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0\}, \tag{28}$$

$$K_1 = K_1(M,\vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3 \,|\, S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 1\}, \tag{29}$$

$$K_2 = K_2(M,\vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3 \,|\, S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \neq 1,\ |S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| = 1\}, \tag{30}$$

$$K_3 = K_3(M,\vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3 \,|\, 0 < |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| < 1\}, \tag{31}$$

$$K_4 = K_4(M,\vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^3 \,|\, |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| > 1\}. \tag{32}$$

Ясно что $\mathbb{Z}^3 = K_0 \bigcup K_1 \bigcup K_2 \bigcup K_3 \bigcup K_4$. Такое разбиение называется разбиением Коробова. Оно фактически возникало в его работах, когда он проводил оценки погрешности приближенного интегрирования.

В работе [7] было дано определение нормального и несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних (см. [7], стр. 195 и 199). Нормальный оператор не увеличивает норму любой функции, то есть $K_4 = \varnothing$, а для несмещенного оператора имеем: $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1$.

Далее везде будем считать, что веса $\vec{\rho}$ выбраны так, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным. Для таких операторов выражение гиперболической дзета-функции сетки имеет более простой вид

$$\zeta(\alpha,p|M,\vec{\rho}) = {\sum_{\vec{m}\in K_1 \bigcup K_2}}' \frac{1}{(\overline{m_1 m_2 m_3})^\alpha} + \sum_{\vec{m}\in K_3} \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m_1 m_2 m_3})^\alpha}. \tag{33}$$

Используя общее определение гиперболического параметра, в случае нормального, несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних можно определить первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$.

Определение 3. *Для произвольной сетки M с весами $\vec{\rho}$ такими, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ задаются равенствами*

$$q_\nu\left(M,\rho(\vec{x})\right) = q(K_\nu\left(M,\rho(\vec{x})\right)) \quad (\nu = 1,2,3). \tag{34}$$

Ясно, что гиперболический параметр сетки и первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ связаны соотношением

$$q\left(M,\rho(\vec{x})\right) = \min_{\nu=1,2,3} q_\nu\left(M,\rho(\vec{x})\right).$$

Пусть сетка M — рациональная со знаменателем p, то есть в кубе $G_3=\{\vec{x}|0\leqslant x_1,x_2,x_3<1\}$ имеется N рациональных точек вида

$$\left(\frac{x_1^{(k)}}{p},\frac{x_2^{(k)}}{p},\frac{x_3^{(k)}}{p}\right) \qquad k=1,\ldots,N, \tag{35}$$

$x_i^{(k)}$ — целые, $0\leqslant x_i^{(k)}\leqslant p-1$, p — натуральное.

Теорема 5. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, справедливо соотношение*

$$p\cdot\mathbb{Z}^3 \subset K_1\left(M,\rho(\vec{x})\right),$$

кроме того тригонометрические суммы $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ с весами $\vec{\rho}$ принимают конечное число различных значений, не превосходящее p^3.

Доказательство. Действительно, если

$$\vec{x}_k = \left(\frac{x_1^{(k)}}{p},\frac{x_2^{(k)}}{p},\frac{x_3^{(k)}}{p}\right),$$

то $(\vec{m},\vec{x}_k)\in\mathbb{Z}$ для любого $\vec{m}\in p\cdot\mathbb{Z}^3$, поэтому $e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x}_k)}=1$ и

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\rho(\vec{x}_k) = S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1,$$

так как линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным.

Аналогично получаем, что

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}+p\cdot\vec{n}).$$

Следовательно, все различные значения тригонометрических сумм $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ с весами $\vec{\rho}$ содержатся среди значений для $\vec{m}\in[-p_1,p_2]^3$, где $p_1=\left[\frac{p-1}{2}\right]$ и $p_2=\left[\frac{p}{2}\right]$. $\square$

Теорема 6. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, множество $K_1(M,\vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.*

Доказательство. Действительно, если для $\vec{m}$ выполняется равенство $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 1$, то в силу положительности весов $\vec{\rho}$ это возможно только при условии, что $e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x}_k)} = 1$ при $k = 1,\dots,N$. Это означает, что $(\vec{m},\vec{x}_k) \in \mathbb{Z}$ при $k = 1,\dots,N$. Таким образом, $\vec{m} \in K_1(M,\vec{\rho})$ тогда и только тогда, когда $(\vec{m},\vec{x}_k) \in \mathbb{Z}$ при $k = 1,\dots,N$. Но если $\vec{m}_1,\vec{m}_2 \in K_1(M,\vec{\rho})$, то и $\vec{m}_1 \pm \vec{m}_2 \in K_1(M,\vec{\rho})$, это означает что $K_1(M,\vec{\rho})$ является целочисленной решеткой. □

Теорема 7. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, множество $K_1(M,\vec{\rho}) \bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.*

Доказательство. Действительно, если для $\vec{m}$ выполняется равенство $|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| = 1$, то в силу положительности весов $\vec{\rho}$ это возможно только при условии, что найдется $x \in [0,1)$ такой, что $e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x}_k)} = e^{2\pi i x}$ при $k = 1,\dots,N$. Это означает, что $\{(\vec{m},\vec{x}_k)\} = x$ при $k = 1,\dots,N$.

Таким образом, $\vec{m} \in K_1(M,\vec{\rho}) \bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ тогда и только тогда, когда $\{(\vec{m},\vec{x}_k)\} = \{(\vec{m},\vec{x}_1)\}$ при $k = 1,\dots,N$.

Но если $\vec{m}_1,\vec{m}_2 \in K_1(M,\vec{\rho}) \bigcup K_2(M,\vec{\rho})$, то и

$$\vec{m}_1 \pm \vec{m}_2 \in K_1(M,\vec{\rho}) \bigcup K_2(M,\vec{\rho}),$$

это означает что $K_1(M,\vec{\rho}) \bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ является целочисленной решеткой. □

2.4. Обобщенная теорема Бахвалова–Коробова для гиперболической дзета-функции сеток

Для формулировки обобщенной теоремы Бахвалова–Коробова для гиперболической дзета-функции сеток нам потребуется обощенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функци решеток из работы [9] (см. стр. 197), одна лемма из работы [8] и одно новое определение.

Определение 4. *Будем говорить, что сетка M с весами $\vec{\rho}$, для которой линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, имеет тип $\Delta(N) < 1$, если для любого $\vec{m} \in K_3(M,\vec{\rho})$ выполняется оценка $|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \Delta(N)$.*

Для натурального $t > 1$ положим:

$$A_j(t) = \sum_{m_1\dots m_j > t} \frac{1}{(m_1\dots m_j)^\alpha} \quad (\alpha > 1), B_j(t) = \sum_{m_1\dots m_j \leqslant t} 1, \quad C_j(t) = \sum_{m_1\dots m_j \leqslant t} \frac{1}{m_1\dots m_j}. \tag{36}$$

Лемма 2. *Справедливы неравенства*

$$C_1(t) \leqslant \ln t + 1, \quad C_2(t) \leqslant 1 + 2\ln t + \frac{\ln^2 t}{2}, \quad C_3(t) \leqslant 1 + 3\ln t + \frac{3\ln^2 t}{2} + \frac{\ln^3 t}{6}. \tag{37}$$

Доказательство. Действительно,

$$C_1(t) \leqslant 1 + \int_1^t \frac{dx}{x} = 1 + \ln t.$$

Для $C_2(t)$ имеем:

$$C_2(t) = \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m} C_1\left(\left[\frac{t}{m}\right]\right) \leqslant \sum_{1}^{t} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\ln\left(\frac{t}{m}\right)\right) \leqslant 1 + 2\ln t + \int\limits_{1}^{t} \left(\ln\frac{t}{x}\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= 1 + 2\ln t + \int\limits_{0}^{\ln t} u du = 1 + 2\ln t + \frac{\ln^2 t}{2}.$$

Наконец, для $C_3(t)$ имеем

$$C_3(t) = \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m} C_2\left(\left[\frac{t}{m}\right]\right) \leqslant 1 + 2\ln t + \frac{\ln^2 t}{2} + \sum_{m=2}^{t} \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{m}\ln\frac{t}{m} + \frac{1}{2m}\ln^2\frac{t}{m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 1 + 2\ln t + \frac{\ln^2 t}{2} + \int\limits_{1}^{t} \left(1 + 2\ln\frac{t}{x} + \frac{1}{2}\ln^2\frac{t}{x}\right)\frac{dx}{x} = 1 + 2\ln t + \frac{\ln^2 t}{2} +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\ln t} \left(1 + 2u + \frac{u^2}{2}\right) du = 1 + 2\ln t + \frac{\ln^2 t}{2} + \ln t + \ln^2 t + \frac{\ln^3 t}{6} =$$

$$= 1 + 3\ln t + \frac{3\ln^2 t}{2} + \frac{\ln^3 t}{6},$$

что и доказывает (37). □

Лемма 3. *Справедливы неравенства*

$$B_1(t) \leqslant t, \quad B_2(t) \leqslant t(1 + \ln t), \quad B_3(t) \leqslant t\left(1 + 2\ln t + \frac{\ln^2 t}{2}\right). \tag{38}$$

Доказательство. Действительно,

$$B_1(t) = \sum_{m=1}^{t} 1 = t.$$

Так как при $j > 1$

$$B_j(t) = \sum_{m_1 \ldots m_{j-1} \leqslant t} B_1\left(\left[\frac{t}{m_1 \ldots m_{j-1}}\right]\right) \leqslant t C_{j-1}(t), \tag{39}$$

то утверждение леммы следует из леммы 2. □

Лемма 4. *При $\alpha > 1$ справедливы неравенства*

$$A_1(t) < \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}, \quad A_2(t) < \frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{\zeta(\alpha) + 1 + \ln t}{\alpha - 1}\right), \tag{40}$$

$$A_3(t) < \frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1 + \zeta(\alpha) + \frac{1 + \zeta(\alpha) + \zeta^2(\alpha)}{\alpha - 1} + \left(1 + \frac{2 + \zeta(\alpha)}{\alpha - 1}\right)\ln t + \frac{\ln^2 t}{2(\alpha - 1)}\right). \tag{41}$$

Доказательство. Действительно, так как t — натуральное, то

$$A_1(t) = \sum_{m > t} \frac{1}{m^\alpha} < \int\limits_{t}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}.$$

Для $A_2(t)$ имеем:

$$A_2(t) = \zeta(\alpha)A_1(t) + \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m^\alpha} A_1\left(\left[\frac{t}{m}\right]\right) < \frac{\zeta(\alpha)}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} + \sum_{m=1}^{t}\left(\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}m}\right) <$$
$$< \frac{\zeta(\alpha)}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} + \frac{1}{t^{\alpha-1}} + \frac{1+\ln t}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{\zeta(\alpha)+1+\ln t}{\alpha-1}\right).$$

Наконец, для $A_3(t)$ имеем

$$A_3(t) = \zeta(\alpha)A_2(t) + \sum_{m_1m_2\leqslant t} \frac{1}{(m_1m_2)^\alpha} A_1\left(\left[\frac{t}{m_1m_2}\right]\right) <$$
$$< \zeta(\alpha)\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{\zeta(\alpha)+1+\ln t}{\alpha-1}\right)\right) + \sum_{m_1m_2\leqslant t}\left(\frac{1}{t^\alpha} + \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}(m_1m_2)}\right) =$$
$$= \zeta(\alpha)\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{\zeta(\alpha)+1+\ln t}{\alpha-1}\right)\right) + \frac{B_2(t)}{t^\alpha} + \frac{C_2(t)}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} <$$
$$< \zeta(\alpha)\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1 + \frac{\zeta(\alpha)+1+\ln t}{\alpha-1}\right)\right) + \frac{1+\ln t}{t^{\alpha-1}} + \frac{1+2\ln t+\frac{\ln^2 t}{2}}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} =$$
$$= \frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(\zeta(\alpha)\left(1 + \frac{\zeta(\alpha)+1+\ln t}{\alpha-1}\right) + 1 + \ln t + \frac{1+2\ln t+\frac{\ln^2 t}{2}}{(\alpha-1)}\right) =$$
$$= \frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(1 + \zeta(\alpha) + \frac{1+\zeta(\alpha)+\zeta^2(\alpha)}{\alpha-1} + \left(1 + \frac{2+\zeta(\alpha)}{\alpha-1}\right)\ln t + \frac{\ln^2 t}{2(\alpha-1)}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Теорема 8. **(Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функци сеток)** *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$ типа $\Delta(N) < 1$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, справедлива оценка*

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) \leqslant 2^{(\alpha+1)3+1}\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^3 \frac{(\ln q(\Lambda)+1)^2}{q^\alpha(\Lambda)} +$$
$$+ \frac{\Delta^p(N)}{t^{\alpha-1}}\left(\frac{\tau^*(t)}{t} + 20 + 8\zeta(\alpha) + \frac{26+20\zeta(\alpha)+8\zeta^2(\alpha)}{\alpha-1} + \left(8 + \frac{28+8\zeta(\alpha)}{\alpha-1}\right)\ln t + \frac{4\ln^2 t}{\alpha-1}\right), \quad (42)$$

где решетка $\Lambda = K_1(M, \vec{\rho}) \bigcup K_2(M, \vec{\rho})$, $q(\Lambda) > 1$ и $t = q_3(M, \rho(\vec{x})) > 1$.

Доказательство. Действительно, пользуясь формулой (33), теоремой 7 и обозначениями из формулировки доказываемой теоремы, получим

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) = \zeta_H(\Lambda|\alpha) + \sum_{\vec{m}\in K_3} \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m_1}\cdot\overline{m_2}\cdot\overline{m_3})^\alpha} \leqslant \zeta_H(\Lambda|\alpha) + \Delta^p(N)\sum_{\vec{m}\in K_3}\frac{1}{(\overline{m_1}\cdot\overline{m_2}\cdot\overline{m_3})^\alpha}.$$

Оценим последнюю сумму с помощью леммы 4, получим:

$$\sum_{\vec{m}\in K_3}\frac{1}{(\overline{m_1}\cdot\overline{m_2}\cdot\overline{m_3})^\alpha} = \frac{\tau^*(t)}{t^\alpha} + 6A_1(t) + 12A_2(t) + 8A_3(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tau^*(t)}{t^\alpha} + \frac{6}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} + \frac{12}{t^{\alpha-1}}\left(1+\frac{\zeta(\alpha)+1+\ln t}{\alpha-1}\right)+$$
$$+\frac{8}{t^{\alpha-1}}\left(1+\zeta(\alpha)+\frac{1+\zeta(\alpha)+\zeta^2(\alpha)}{\alpha-1}+\left(1+\frac{2+\zeta(\alpha)}{\alpha-1}\right)\ln t+\frac{\ln^2 t}{2(\alpha-1)}\right)=\frac{\tau^*(t)}{t^\alpha}+$$
$$+\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(20+8\zeta(\alpha)+\frac{26+20\zeta(\alpha)+8\zeta^2(\alpha)}{\alpha-1}+\left(8+\frac{28+8\zeta(\alpha)}{\alpha-1}\right)\ln t+\frac{4\ln^2 t}{\alpha-1}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\zeta(\alpha,p|M,\vec{\rho}) \leqslant \zeta_H(\Lambda|\alpha)+\Delta^p(N)A_s(t) \leqslant 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s\frac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)}+$$
$$+\frac{\Delta^p(N)}{t^{\alpha-1}}\left(\frac{\tau^*(t)}{t}+20+8\zeta(\alpha)+\frac{26+20\zeta(\alpha)+8\zeta^2(\alpha)}{\alpha-1}+\left(8+\frac{28+8\zeta(\alpha)}{\alpha-1}\right)\ln t+\frac{4\ln^2 t}{\alpha-1}\right).$$

□

3. Количество узлов в трёхмерной сетке Смоляка

Для того чтобы определить порядок роста отклонения сетки Смоляка при увеличении количества точек сетки необходимо подсчитать их количество. Из определения видно, что сетка Смоляка $Sm(q)$ является объединением нескольких обобщённых равномерных сеток, при этом любые две сетки входящие в объединение имеют непустое пересечение. Поэтому здесь возможно два случая: число узлов подсчитывается с учетом их кратности и без учета.

3.1. Число узлов с учетом их кратности

По определению сетки Смоляка справедливо представление

$$Sm(q)=\bigcup_{\substack{q-2\leqslant\nu_1+\nu_2+\nu_3\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2,\nu_3\geqslant 1}} M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\left(\bigcup_{\nu_1=1}^{q-2}\bigcup_{\nu_1=1}^{q-1-\nu_1} M(\nu_1,\nu_2,q-\nu_1-\nu_2)\right)\bigcup$$
$$\bigcup\left(\bigcup_{\nu=1}^{q-3}\bigcup_{\nu_1=1}^{q-2-\nu_1} M(\nu_1,\nu_2,q-1-\nu_1-\nu_2)\right)\bigcup\left(\bigcup_{\nu=1}^{q-4}\bigcup_{\nu_1=1}^{q-3-\nu_1} M(\nu_1,\nu_2,q-2-\nu_1-\nu_2)\right). \qquad (43)$$

Нетрудно видеть, что любые два члена из объединения в правой части равенства (43) имеют непустое пересечение. А именно, справедливо равенство

$$M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\bigcap M(\mu_1,\mu_2,\mu_3)=M(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3), \qquad (44)$$

где $\lambda_1=\min(\nu_1,\mu_1)$, $\lambda_2=\min(\nu_2,\mu_2)$ и $\lambda_3=\min(\nu_3,\mu_3)$.

Обозначим через $N_q^{(1)}$ число узлов сетки $Sm(q)$ с учетом кратности, то есть узел (x_1,x_2,x_3) имеет кратность равную числу различных наборов (ν_1,ν_2,ν_3) таких, что

$$(x_1,x_2,x_3)=(k_1 2^{-\nu_1},k_2 2^{-\nu_2},k_3 2^{-\nu_3}).$$

Ясно, что при таком подсчете узлов справедливо равенство

$$N_q^{(1)}=\sum_{\substack{q-2\leqslant\nu_1+\nu_2+\nu_3\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2,\nu_3\geqslant 1}} |M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)|. \qquad (45)$$

Теорема 9. *Если $N_q^{(1)}$ — число узлов сетки $Sm(q)$ с учетом кратности, то при $q \geqslant 5$ выполняются соотношения:*

$$N_q^{(1)} = \frac{7q^2 - 29q + 32}{8} 2^q, \quad q = O\left(\ln N_q^{(1)}\right). \quad 2^q = O\left(\frac{N_q^{(1)}}{\ln^2 N_q^{(1)}}\right) \tag{46}$$

Доказательство. Действительно, узлы сетки Смоляка имеют вид:

$$\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}, \frac{k_3}{2^{\nu_3}}\right), \text{ где } 0 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1} - 1,\ 0 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2} - 1,\ 0 \leqslant k_3 \leqslant 2^{\nu_3} - 1,$$

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3 \geqslant 1 \text{ и } q - 2 \leqslant \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leqslant q.$$

Отсюда следует, что

$$N_q^{(1)} = \sum_{k=0}^{2} \sum_{\substack{\nu_1+\nu_2+\nu_3=q-k \\ \nu_1,\nu_2,\nu_3 \geqslant 1}} 2^{\nu_1} \cdot 2^{\nu_2} \cdot 2^{\nu_3} = \sum_{k=0}^{2} 2^{q-k} \sum_{\nu_1=1}^{q-k-2} \sum_{\nu_2=1}^{q-k-1-\nu_1} 1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{2} 2^{q-k} \sum_{\nu_1=1}^{q-k-2} (q-k-1-\nu_1) = \sum_{k=0}^{2} 2^{q-k} \sum_{\nu_1=1}^{q-k-2} \nu_1 = \sum_{k=0}^{2} 2^{q-k} \frac{(q-k-2)(q-k-1)}{2} =$$

$$= \frac{7q^2 - 29q + 32}{8} 2^q.$$

Так как $N_q^{(1)} = O(q^2 2^q)$, то $q = O\left(\ln N_q^{(1)}\right)$, $2^q = O\left(\frac{N_q^{(1)}}{\ln^2 N_q^{(1)}}\right)$ и теорема доказана. □

3.2. Число узлов без учета их кратности

По аналогии с приведенной системой вычетов определим при $\nu_1, \nu_2, \nu_3 > 0$ приведенные обобщенные равномерные сетки $M^*(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $M^*(\nu_1, \nu_2, 0)$, $M^*(\nu_1, 0, \nu_3)$, $M^*(0, \nu_2, \nu_3)$, $M^*(\nu_1, 0, 0)$, $M^*(0, \nu_2, 0)$, $M^*(0, 0, \nu_3)$ равенствами

$$M^*(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \left\{ \left(\frac{2k_1 - 1}{2^{\nu_1}}, \frac{2k_2 - 1}{2^{\nu_2}}, \frac{2k_3 - 1}{2^{\nu_3}}\right) \middle| \begin{array}{c} 1 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1 - 1},\ 1 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2 - 1}, \\ 1 \leqslant k_3 \leqslant 2^{\nu_3 - 1} \end{array} \right\},$$

$$M^*(\nu_1, \nu_2, 0) = \left\{ \left(\frac{2k_1 - 1}{2^{\nu_1}}, \frac{2k_2 - 1}{2^{\nu_2}}, 0\right) \middle| 1 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1 - 1},\ 1 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2 - 1} \right\},$$

$$M^*(\nu_1, 0, \nu_3) = \left\{ \left(\frac{2k_1 - 1}{2^{\nu_1}}, 0, \frac{2k_3 - 1}{2^{\nu_3}}\right) \middle| 1 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1 - 1},\ 1 \leqslant k_3 \leqslant 2^{\nu_3 - 1} \right\},$$

$$M^*(0, \nu_2, \nu_3) = \left\{ \left(0, \frac{2k_2 - 1}{2^{\nu_2}}, \frac{2k_3 - 1}{2^{\nu_3}}\right) \middle| 1 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2 - 1},\ 1 \leqslant k_3 \leqslant 2^{\nu_3 - 1} \right\},$$

$$M^*(\nu_1, 0, 0) = \left\{ \left(\frac{2k_1 - 1}{2^{\nu_1}}, 0, 0\right) \middle| 1 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1 - 1} \right\},$$

$$M^*(0, \nu_2, 0) = \left\{ \left(0, \frac{2k_2 - 1}{2^{\nu_2}}, 0\right) \middle| 1 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2 - 1} \right\},$$

$$M^*(0, 0, \nu_3) = \left\{ \left(0, 0, \frac{2k_3 - 1}{2^{\nu_3}}\right) \middle| 1 \leqslant k_3 \leqslant 2^{\nu_3 - 1} \right\}, \quad M^*(0, 0, 0) = \left\{ \vec{0} \right\}. \tag{47}$$

Ясно, что приведенные обобщенные равномерные сетки $M^*(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $M^*(\nu_1, \nu_2, 0)$, $M^*(\nu_1, 0, \nu_3)$, $M^*(0, \nu_2, \nu_3)$, $M^*(\nu_1, 0, 0)$, $M^*(0, \nu_2, 0)$, $M^*(0, 0, \nu_3)$ состоят из

$$|M^*(\nu_1, \nu_2, \nu_3)| = 2^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - 3}, \quad |M^*(\nu_1, \nu_2, 0)| = 2^{\nu_1 + \nu_2 - 2}, \quad |M^*(\nu_1, 0, \nu_3)| = 2^{\nu_1 + \nu_3 - 2}, \tag{48}$$

$$|M^*(0, \nu_2, \nu_3)| = 2^{\nu_2 + \nu_3 - 2},\ |M^*(\nu_1, 0, 0)| = 2^{\nu_1 - 1},\ |M^*(0, \nu_2, 0)| = 2^{\nu_2 - 1},\ |M^*(0, 0, \nu_3)| = 2^{\nu_3 - 1} \tag{49}$$

точек, так как каждая трёхмерная приведенная обобщенная равномерная сетка $M^*(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ является декартовым произведением соответствующих одномерных приведенных равномерных сеток:

$$M^*(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = M^*(\nu_1)\times M^*(\nu_2)\times M^*(\nu_3)$$

и справедливо равенство для количества точек одномерной приведенной равномерной сетки $M^*(\nu)$:

$$M^*(\nu) = \left\{ \left(\frac{2k+1}{2^\nu}\right) \middle| \, 0 \leqslant k \leqslant 2^{\nu-1}-1 \right\}, \quad |M^*(\nu)| = 2^{\nu-1}, \tag{50}$$

и для удобства примем соглашение

$$M^*(0) = \{(0,0,0)\}, \quad |M^*(0)| = 1. \tag{51}$$

Ясно, что при $\nu \geqslant 0$ справедлива общая формула $|M^*(\nu)| = 2^{\overline{\nu}-1}$, из которой при $\nu_1,\nu_2,\nu_3 \geqslant 0$ следует равенство $|M^*(\nu_1,\nu_2,\nu_3)| = 2^{\overline{\nu}_1+\overline{\nu}_2+\overline{\nu}_3-3}$.

Приведенные обобщенные равномерные сетки попарно не пересекаются. Отсюда вытекает важное для дальнейшего разбиение обобщенной равномерной сетки на непересекающиеся подсетки.

Лемма 5. *Справедливо представление*

$$M(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = \bigcup_{0\leqslant\mu_j\leqslant\nu_j,\, j=1,2,3} M^*(\mu_1,\mu_2,\mu_3). \tag{52}$$

Доказательство. Действительно, имеется единственная нулевая точка, и он образует приведенную обобщенную равномерную сетку $M^*(0,0,0)$.

Рассмотрим произвольную ненулевую точку обощенной равномерной сетки

$$\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}, \frac{k_3}{2^{\nu_3}}\right) \quad 1 \leqslant k_1 \leqslant 2^{\nu_1}-1,\ 1 \leqslant k_2 \leqslant 2^{\nu_2}-1,\ 1 \leqslant k_3 \leqslant 2^{\nu_3}-1.$$

Каждая такая точка однозначно определяет приведенную обобщенную сетку $M^*(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$, которой она принадлежит. А именно, при $j = 1,2,3$

если $k_j = 0$, то $\mu_j = 0$;

если $k_j \neq 0$, $(k_j, 2^{\nu_j}) = 2^{d_j}$, то $\mu_j = \nu_j - d_j$.

Отсюда следует, что ненулевые точки образуют следующее объединение приведенных обобщенных равномерных сеток:

$$\bigcup_{0\leqslant\mu_j\leqslant\nu_j,\, j=1,2,3\ (\mu_1,\mu_2,\mu_3)\neq\vec{0}} M^*(\mu_1,\mu_2,\mu_3).$$

Объединяя с сеткой $M^*(0,0,0)$, получим утверждение леммы. □

Теорема 10. *Если $N_q^{(2)}$ — число узлов сетки $Sm(q)$ без учета кратности, то при $q \geqslant 5$ выполняются соотношения:*

$$N_q^{(2)} = 2^{q-2}\frac{q^2+q-4}{2}, \quad q = O\left(\ln N_q^{(2)}\right), \quad 2^q = O\left(\frac{N_q^{(2)}}{\ln^2 N_q^{(2)}}\right).$$

Доказательство. Из определения сетки Смоляка и из леммы 5 следует представление

$$Sm(q) = \bigcup_{\substack{q-2\leqslant\nu_1+\nu_2+\nu_3\leqslant q,\\ \nu_1,\nu_2,\nu_3\geqslant 1}} M(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = \bigcup_{\substack{0\leqslant\mu_1,\mu_2,\mu_3\leqslant q-2,\\ \mu_1+\mu_2+\mu_3\leqslant q}} M^*(\mu_1,\mu_2,\mu_3). \tag{53}$$

Так как различные приведенные обобщенные равномерные сетки не пересекаются, то

$$N_q^{(2)} = |Sm(q)| = \sum_{\substack{0\leqslant\mu_1,\mu_2,\mu_3\leqslant q-2,\\ \mu_1+\mu_2+\mu_3\leqslant q}} |M^*(\mu_1,\mu_2,\mu_3)| = \sum_{\substack{0\leqslant\mu_1,\mu_2,\mu_3\leqslant q-2,\\ \mu_1+\mu_2+\mu_3\leqslant q}} 2^{\overline{\mu}_1+\overline{\mu}_2+\overline{\mu}_3-3}.$$

Отсюда следует, что

$$N_q^{(2)} = 1 + 3\sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2} 2^{\mu_1-1} + 3\sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2}\sum_{1\leqslant\mu_2\leqslant q-1-\mu_1} 2^{\mu_1+\mu_2-2} +$$
$$+ \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2}\sum_{1\leqslant\mu_2\leqslant q-1-\mu_1}\sum_{1\leqslant\mu_3\leqslant q-\mu_1-\mu_2} 2^{\mu_1+\mu_2+\mu_3-3} =$$

$$= 1 + 3\left(2^{q-2}-1\right) + 3\sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2} 2^{\mu_1-1}\left(2^{q-1-\mu_1}-1\right) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2}\sum_{1\leqslant\mu_2\leqslant q-1-\mu_1} 2^{\mu_1+\mu_2-2}\left(2^{q-\mu_1-\mu_2}-1\right) = 3\cdot 2^{q-2} - 2 + 3\cdot 2^{q-2}(q-2) - 3\left(2^{q-2}-1\right) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2} 2^{q-2}(q-1-\mu_1) - \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2} 2^{\mu_1-1}\left(2^{q-1-\mu_1}-1\right) = 1 + 3\cdot 2^{q-2}(q-2) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant\mu_1\leqslant q-2} 2^{q-2}(q-2-\mu_1) + 2^{q-2} - 1 = 2^{q-2}(3q-5) + 2^{q-2}\frac{(q-2)(q-3)}{2} = 2^{q-2}\frac{q^2+q-4}{2}.$$

Отсюда следует $q = O(\ln N_q^{(2)})$, $2^q = O\left(\frac{N_q^{(2)}}{\ln^2 N_q^{(2)}}\right)$ и утверждение теоремы полностью доказано. □

3.3. Число узлов с учетом их весов

Квадратурная формула трёхмерной сетки Смоляка с весами имеет вид

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3 = \sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\sum_{\nu_1=1}^{q-l-2}\sum_{\nu_2=1}^{q-l-\nu_1-1}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{\nu_2}-1}\sum_{k_3=0}^{2^{q-l-\nu_1-\nu_2}-1} 1\times$$
$$\times f\left(\frac{m_1k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{m_2k_2}{2^{\nu_2}}, \frac{m_3k_3}{2^{q-l-\nu_1-\nu_2}}\right) - R_{N(q)}[f], \tag{54}$$

где $N(q)$ — число узлов сетки с ненулевыми весами, а $R_{N(q)}[f]$ — линейный функционал погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле.

Введём обозначение

$$I_q[f] = \sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\sum_{\nu_1=1}^{q-l-2}\sum_{\nu_2=1}^{q-l-\nu_1-1}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\sum_{k_2=0}^{2^{\nu_2}-1}\sum_{k_3=0}^{2^{q-l-\nu_1-\nu_2}-1} f\left(\frac{m_1k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{m_2k_2}{2^{\nu_2}}, \frac{m_3k_3}{2^{q-l-\nu_1-\nu_2}}\right).$$

Это равенство можно переписать в виде

$$I_q[f] = \sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\sum_{\nu_1=1}^{q-l-2}\sum_{\nu_2=1}^{q-l-\nu_1-1}\sum_{\nu_3=q-l-\nu_1-\nu_2}\sum_{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\frac{k_2}{2^{\nu_2}},\frac{k_3}{2^{\nu_3}}\right)\in M(\nu_1,\nu_2,\nu_3)} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \frac{k_2}{2^{\nu_2}}, \frac{k_3}{2^{\nu_3}}\right).$$

Воспользуемся представлением (5), получим

$$I_q[f]=\sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\sum_{\nu_1=1}^{q-l-2}\sum_{\nu_2=1}^{q-l-\nu_1-1}\sum_{\nu_3=q-l-\nu_1-\nu_2}\left(f(0,0,0)+\sum_{0\leqslant\mu_j\leqslant\nu_j,\,j=1,2,3\,(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\neq\vec{0}}1\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)\in M^*(\mu_1,\mu_2,\mu_3)}f\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)\right).$$

Меняя порядок суммирования, получим:

$$I_q[f]=f(\vec{0})\rho(\vec{0})+\sum_{\mu_1+\mu_2+\mu_3\leqslant q,\,(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\neq\vec{0}}\ \sum_{\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)\in M^*(\mu_1,\mu_2,\mu_3)}f\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)\cdot$$

$$\cdot\rho\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right),$$

где

$$\rho(\vec{0})=\sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\sum_{\nu_1=1}^{q-l-2}\sum_{\nu_2=1}^{q-l-\nu_1-1}\sum_{\nu_3=q-l-\nu_1-\nu_2}1=\sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\sum_{\nu_1=1}^{q-l-2}(q-l-\nu_1-1)=$$

$$=\frac{1}{2^q}\left(\frac{(q-2)(q-1)}{2}-2(q-3)(q-2)+2(q-4)(q-3)\right)=\frac{1}{2^q}\frac{q^2-11q+26}{2},$$

а для $\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)\neq\vec{0}$ имеем:

$$\rho\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)=\sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\sum_{\nu_1=\max(1,\mu_1)}^{q-l-2}\sum_{\nu_2=\max(1,\mu_2)}^{q-l-\nu_1-1}\sum_{\nu_3=q-l-\nu_1-\nu_2\geqslant\mu_3}1=$$

$$=\sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\sum_{\nu_1=\max(1,\mu_1)}^{q-l-2}\sum_{\nu_2=\max(1,\mu_2)}^{\min(q-l-\nu_1-1,q-l-\nu_1-\mu_3)}1=\sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\sum_{\nu_1=\max(1,\mu_1)}^{q-l-2}\sum_{\nu_2=\max(1,\mu_2)}^{q-l-\nu_1-\max(1,\mu_3)}1=$$

$$=\sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\sum_{\nu_1=\max(1,\mu_1)}^{\min(q-l-2,q-l-\max(1,\mu_3)-\max(1,\mu_2))}(q-l-\nu_1-\max(1,\mu_3)-\max(1,\mu_2)+1)=$$

$$=\sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\sum_{\nu_1=\overline{\mu_1}}^{q-l-\overline{\mu_2}-\overline{\mu_3}}(q-l-\nu_1-\overline{\mu_2}-\overline{\mu_3}+1)=$$

$$=\sum_{l=0}^{\min(2,q-\overline{\mu_1}-\overline{\mu_2}-\overline{\mu_3})}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\frac{(q-l-\overline{\mu_2}-\overline{\mu_3}-\overline{\mu_1}+1)(q-l-\overline{\mu_2}-\overline{\mu_3}-\overline{\mu_1}+2)}{2}.$$

Лемма 6. *Пусть величина $S(q,\mu)$ при натуральных q и μ с $1\leqslant\mu\leqslant q$ задана равенством*

$$S(q,\mu)=\sum_{l=0}^{\min(2,q-\mu)}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\frac{(q-l-\mu+1)(q-l-\mu+2)}{2},$$

тогда справедливы соотношения

$$S(q,\mu)=\begin{cases}\frac{1}{2^q}, & \text{при } \mu=q,\\ -\frac{1}{2^q}, & \text{при } \mu=q-1,\\ \frac{1}{2^q}\frac{\left(q-\mu-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}{2}, & \text{при } \mu\leqslant q-2.\end{cases}$$

Доказательство. Действительно,

$$S(q,q)=\sum_{l=0}^{0}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\frac{(1-l)(2-l)}{2}=\frac{1}{2^q}.$$

При $\mu=q-1$ получим

$$S(q,q-1)=\sum_{l=0}^{1}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\frac{(2-l)(3-l)}{2}=\frac{1}{2^q}\,(3-4)=-\frac{1}{2^q}.$$

Наконец, при $\mu\leqslant q-2$ имеем:

$$S(q,\mu)=\sum_{l=0}^{2}\frac{(-1)^l C_2^l}{2^{q-l}}\frac{(q-l-\mu+1)(q-l-\mu+2)}{2}=$$
$$=\frac{1}{2^q}\left(\frac{(q-\mu+1)(q-\mu+2)}{2}-2(q-\mu)(q-\mu+1)+2(q-1-\mu)(q-\mu)\right)=$$
$$=\frac{1}{2^q}\frac{q^2-(5+2\mu)q+\mu^2+5\mu+2}{2}=\frac{1}{2^q}\frac{\left(q-\mu-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}{2}$$

и лемма полностью доказана. □

Теорема 11. *В квадратурной формуле*

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3=f(\vec{0})\rho(\vec{0})+$$
$$+\sum_{\mu_1+\mu_2+\mu_3\leqslant q,\,(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\neq\vec{0}}\ \sum_{\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)\in M^*(\mu_1,\mu_2,\mu_3)} f\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)\rho\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)-R_{N(q)}[f]\quad(55)$$

все узлы отличны от нуля и их количество $N(q)=N_q^{(2)}=2^{q-2\frac{q^2+q-4}{2}}$.

Доказательство. Действительно, из предыдущего и леммы 6 следует, что

$$\rho(\vec{0})=\frac{1}{2^q}\frac{q^2-11q+26}{2},\quad \rho\left(\frac{k_1}{2^{\mu_1}},\frac{k_2}{2^{\mu_2}},\frac{k_3}{2^{\mu_3}}\right)=\frac{1}{2^q}\frac{\left(q-\overline{\mu_1}-\overline{\mu_2}-\overline{\mu_3}-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{17}{4}}{2}.$$

Таким образом, все веса не обращаются в ноль, а так совокупность всех узлов квадратурной формулы (55) совпадает с множеством всех узлов сетки Смоляка без повторений, то из теоремы 10 вытекает утверждение о количестве узлов в формуле (55). □

4. Заключение

В данной работе получены следующие результаты:

1. доказана усиленная обобщённая теорема Бахвалова–Коробова для гиперболической дзета-функции трёхмерных сеток;
2. подсчитано число узлов сетки Смоляка с учетом их кратности; число узлов с учетом их весов.
3. подсчитано число узлов сетки Смоляка без учета их кратности;

4. подсчитано число узлов сетки Смоляка с учетом их весов;

5. найдена форма квадратурной формулы с сеткой Смоляка без кратных узлов и найдены явные формулы для весов этой квадратурной формулы. Показано, что количество узлов такой квадратурной формулы в 7 раз меньше, чем в случае формулы с кратными узлами.

В следующих статьях предполагается дать формулы для значения тригонометрических сумм сеток Смоляка, новые оценки погрешностей квадратурных и интерполяционных формул для трёхмерных сеток Смоляка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. N 4. С. 3–18.

2. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. 193 с.

3. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. 284 с.

4. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

5. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90–98.

6. Добровольская Л. П., М. Н. Добровольский, Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 4, ч. 2. С. 47–52.

7. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник 2008 Т. 9, вып. 1(25). С. 185–223.

8. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82–90.

9. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6090–84.

10. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6089–84.

11. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$ / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6091–84.

12. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Яфаева Р. Р. О сетках С. А. Смоляка // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГу, 2002. С. 18–20.

13. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4, вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.

14. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. Тула, 2001. С. 82–86.

15. Добровольский Н. Н. О числе целых точек в гиперболическом кресте при значениях параметра $1 \leqslant t < 21$ // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 91–95.

16. Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник, 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110–152.

17. Добровольский Н. Н. О тригонометрическом полиноме сетки Смоляка // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 36–36.

18. Добровольский Н. Н. О гиперболическом параметре сетки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 1. С. 6–18.

19. Добровольский Н. Н. Гиперболический параметр сеток с весами и его применение: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ имени М. В. Ломоносова, 2014.

20. Киселёва О. В. О задаче Коробова для модифицированных сеток Смоляка // Чебышевский сборник, 2007. Т. 8, вып. 4(24). С. 50–104.

21. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. № 6. С. 1062–1065.

22. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

23. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.

24. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1009–1012.

25. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

26. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83–90.

27. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе (второе издание). М.: МЦНМО, 2004.

28. Реброва И. Ю., Чубариков В. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.

29. Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР. 1963. Т. 148, № 5, С. 1042–1045.

30. Соболь И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.

31. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.

32. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1979.

33. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел / М.: Изд-во "МИР" 1974.

34. Dobrovolskaya, L. P., Dobrovolsky, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovolsky, N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. V. 211. 2014. P. 23–62. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_2

35. Faure H. Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s) // Acta Arith. 41. 1982. P. 337–351.

36. Halton J. H. On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals. // Numerische Math. 27. № 2 (1960), 84–90, Bd 2 № 2.

37. Hammersley J. M. Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems // Proc. N 4. Acad. Sci. 1960.

38. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313–352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984).

REFERENCES

1. Bakhvalov, N.S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals" , Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.

2. Vronskaya, G.T. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, Otklonenie ploskikh setok [Standard deviation of a flat mesh], Izdatel'stvo TGPU im. L.N.Tolstogo, Tula, Russia.

3. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i algoritmy poiska optimal'nykh koehffitsientov [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and algorithms for finding optimal coefficients], Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. L.N. Tolstogo, Tula, Russia. 284 p.

4. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients" , Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

5. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Ogorodnichuk, N. K., Rebrov, E. D. & Rebrova, I. YU. 2012, "Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis" , Trudy X mezhdunarodnoj konferentsii "Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya" Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta [Proceedings of the X international conference "Algebra and number theory: modern problems and applications"scientific notes of Orel state University], no. 6, part 2, pp. 90-98.

6. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., & Rebrova, I. YU. 2013, "Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis" , Izvestie Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol.13, no. 4(2), pp. 47-52.

7. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, "On the error of approximate integration over modified grids" , Chebyshevskij sbornik, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.

8. Dobrovol'skii, M. N. 2003, "Estimates of sums over a hyperbolic cross" , Izvestie Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol.9, no. 1, pp. 82-90.

9. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices" , Dep. v VINITI, no. 6090–84.

10. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids" , Dep. v VINITI, no. 6089–84.

11. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$" , Dep. v VINITI, no. 6091–84

12. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A.R. & Yafaeva, R. R. 2002, "On grids of Smolyak S. A." , Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Tezisy dokladov Vserossijskoj nauchnoj konferentsii, Tula, Russia, pp. 18–20.

13. Dobrovol'skii, N. M. & Manokhin, E.V. 1998, "Banach spaces of periodic functions" , Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.

14. Dobrovol'skii, N. M., Manokhin, E.V., Rebrova, I. YU. & Roshhenya, A. L., 2001, "On the continuity of the Zeta function of a grid with weights" , Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 7, no. 1., pp. 82–86.

15. Dobrovol'skii, N. N. 2003, "On the number of integer points in a hyperbolic cross at the values of $1 \leqslant t < 21$" , Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 9, no. 1, pp. 91–95.

16. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "Deviation of two-dimensional Smolyak grids" , Chebyshevskij sbornik, vol. 8, no. 1(21), pp. 110–152.

17. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "A trigonometric polynomial on a grid of Smolyak", Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferentsii "Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki" [Proceedings of the international scientific conference "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"], Tula, Russia, pp. 34–36.

18. Dobrovol'skii, N. N., 2013, "О гиперболическом параметре сетки" , Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 2. P. 1. P. 6–18.

19. Dobrovol'skii, N. N., 2014, Hyperbolic parameter of meshes with weights and its application, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

20. Kiseleva O. V., 2007, "On the Korobov problem for modified resin grids" , Chebyshevskij sbornik, vol. 8, no. 4(24), pp. 50–104.

21. Korobov, N. M., 1957, "Approximate evaluation of multiple integrals by using methods of the theory of numbers", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 115, no. 6, pp. 1062–1065.

22. Korobov, N. M., 1959, “The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients”, Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

23. Korobov, N. M., 1959, “On approximate computation of multiple integrals”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.

24. Korobov, N. M., 1960, “Properties and calculation of optimal coefficients”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

25. Korobov, N. M., 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

26. Korobov, N.M. 1994, “Quadrature formulas with combined grids”, Matematicheskie zametki, vol. 55, no. 2, pp. 83–90.

27. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

28. I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol’skii, M. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii, 2018, "On classical number-theoretic nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 118–176.

29. Smolyak, S. A., 1963, “Quadrature and interpolation formulas on tensor products of some classes of functions”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 148, no. 5, pp. 1042–1045.

30. Sobol’, I. M., 1969, Mnogomernye kvadraturnye formuly i funktsii Khaara [Multidimensional quadrature formulas and Haar functions], Nauka, Moscow, USSR.

31. Frolov, K. K., 1976, “Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 231, no.4, pp. 818–821.

32. Frolov, K. K., 1979, Quadrature formulas on classes of functions, Ph.D. Thesis, Vychislitel’nyj tsentr Akademii Nauk SSSR, Moscow, USSR.

33. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

34. Dobrovol’skaya, L. P., Dobrovol’skii, M. N., Dobrovol’skii, N. M. & Dobrovol’skii, N. N., 2014, “On Hyperbolic Zeta Function of Lattices”, Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 23–62.
http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_2

35. Faure, H., 1982, “Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s)”, Acta Arith, vol. 41, pp. 337–351.

36. Halton, J. H., 1960, “On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals”, Numerische Math, vol. 27, no. 2, pp. 84–90.

37. Hammersley, J. M., 1960, “Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems”, Ann. New York Acad. Sci., vol. 86, 844–874.

38. Weyl H., 1916, “On the uniform distribution of Numbers mod. one”, Math. Ann., vol. 77, pp. 313–352.

Получено 16.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.