

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 20. Выпуск 3.

УДК 517+519.713

DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-165-192

Поведение конечных автоматов в лабиринтах¹

Д. В. Гусев

Гусев Даниил Владимирович — аспирант, Московский физико-технический институт (г. Москва).

e-mail: gusdzerzhi@yandex.ru

Аннотация

Работа посвящена исследованию задач о поведении конечных автоматов в лабиринтах. Для любого n строится лабиринт, который можно обойти с помощью $2n$ камней но нельзя обойти с помощью n камней.

Спектр задач обхода обширен и затрагивает ключевые аспекты теоретической Computer Science. Конечно, решение таких задач не означает автоматическое решение сложных проблем теории сложности, тем не менее рассмотрение данных вопросов может положительно сказаться на понимании сути теоретической Computer Science. Есть надежда, что поведение автоматов в лабиринтах является хорошей моделью для нетривиальных теоретико-информационных задач, и отработка методов и подходов к исследованию поведения роботов даст более серьезные результаты с будущем.

Задачи связанные с автоматным анализом геометрических сред имеют довольно богатую историю изучения. Первой работой, давшей начало подобного рода задачам, стоит признать работу Шеннона [24]. В ней рассматривается модель мыши в виде автомата, которая должна найти определенную цель в лабиринте. Другая ранняя работа, так или иначе затрагивающая нашу проблематику, это работа Фишера [9] о вычислительных системах с внешней памятью в виде дискретной плоскости.

Серьёзным толчком к исследованию поведения автоматов в лабиринтах послужила работы Дешпа [7, 8], в которых предложена следующая модель: имеется некоторая конфигурация клеток из $\mathbb{Z}^2$ (шахматный лабиринт), в которой конечные автоматы, обозревая некоторую окрестность клетки, в которой они находятся, могут перемещаться в соседнюю клетку в одном из четырёх направлений.

Основной вопрос, который ставится в подобной модели, существует ли автомат обходящий все подобные лабиринты.

В [20] Мюллер построил для заданного автомата плоскую ловушку (лабиринт который обходится не полностью) в виде 3-графа. Будах [5] построил шахматную ловушку для любого заданного конечного автомата. Отметим, что решение Будаха было довольно сложным (первые варианты содержали 175 страниц). Более наглядные решения данного вопроса представлены здесь [29, 31, 33, 34]. Антельман [2] оценил сложность подобной ловушки по числу клеток, а в [1] Антельман, Будах и Роллик сделали конечную ловушку для любой конечной системы автоматов.

В постановке с шахматным лабиринтом и одним автоматом есть ещё ряд результатов, связанных с проблемами обходимости лабиринтов с различными числом дыр, с расслоениями лабиринтов по количеству состояний автомата и другими вопросами. Обзор подобных проблем можно найти например здесь [35].

Невозможность обхода всех плоских шахматных лабиринтов одним автоматом выдвинула вопрос об изучении возможных усилениях модели автомата, которая решит задачу обхода. Основным способом усиления может являться рассмотрение коллектива автоматов,

¹Работа была поддержана Российским научным фондом (грант № 17-11-01377).

вместо одного автомата, взаимодействующих между собой. Частным и широко используемым случаем является рассмотрение системы из одного полноценного автомата и некоторого количества автоматов камней, которые не имеют внутреннего состояния и могут передвигаться только совместно с главным автоматом. Взаимодействие между автоматами является ключевой особенностью данного усиления, оно позволяет иметь коллективу (или одному автомату с камнями) внешнюю память, тем самым существенно разнообразит его поведение. Если от взаимодействия автоматов избавиться, то полученная независимая система будет немногим лучше одного автомата.

Далее обсудим известные результаты связанные с коллективом автоматов.

Ключевые слова: обход лабиринта, конечный автомат.

Библиография: 38 названий.

Для цитирования:

Д. В. Гусев. Поведение конечных автоматов в лабиринтах // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 165–192.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 20. No. 3.

UDC 517+519.713

DOI 10.22405/2226-8383-2019–20-3-165-192

Behavior of finite automata in mazes²

D. V. Gusev

Gusev Daniil Vladimirovich — post-graduate student, Moscow Institute of physics and technology (Moscow).

e-mail: gusdzerzhi@yandex.ru

Abstract

The paper is devoted to the study of problems on the behavior of finite automata in mazes. For any n , a maze is constructed that can be bypassed with $2n$ stones but you can't get around with n stones.

The range of tasks is extensive and touches upon key aspects of theoretical Computer Science. Of course, the solution of such problems does not mean the automatic solution of complex problems of complexity theory, however, the consideration of these issues can have a positive impact on the understanding of the essence of theoretical Computer Science. It is hoped that the behavior of automata in mazes is a good model for non-trivial information theoretic problems, and the development of methods and approaches to the study of robot behavior will give more serious results in the future.

Problems related to automaton analysis of geometric media have a rather rich history of study. The first work that gave rise to this kind of problems, it is necessary to recognize the work of Shannon [24]. It deals with a model of a mouse in the form of an automaton, which must find a specific target in the maze. Another early work, one way or another affecting our problems, is the work of Fisher [9] on computing systems with external memory in the form of a discrete plane.

A serious impetus to the study of the behavior of automata in mazes was the work of Depp [7, 8], in which the following model is proposed: there is a certain configuration of cells from

²The work was supported By the Russian scientific Foundation (grant № 17-11-01377).

$\mathbb{Z}^2$ (chess maze), in which finite automata, surveying some neighborhood of the cell in which they are, can move to an adjacent cell in one of four directions.

The main question posed in such a model is whether there is an automaton that bypasses all such mazes.

In [20], Muller constructed a flat trap for a given automaton (a maze that does not completely bypass) in the form of a 3-graph. Budach [5] constructed a chess trap for any given finite automaton. Note that Budach's solution was quite complex (the first versions contained 175 pages). More visual solutions to this question are presented here [29, 31, 33, 34]. Antelman [2] estimated the complexity of such a trap by the number of cells, and in [1] Antelman, Budach, and Rollick made a finite trap for any finite automaton system.

In the formulation with a chess maze and one automaton, there are a number of results related to the problems of traversability of labyrinths with different numbers of holes, with bundles of labyrinths by the number of States of the automaton, and other issues. An overview of such problems can be found for example here [35].

The impossibility of traversing all flat chess labyrinths with one automaton raised the question of studying the possible amplifications of the automaton model, which will solve the problem of traversal. The main way of strengthening can be the consideration of a collective of automata, instead of one automaton, interacting with each other. A special and widely used case is the consideration of a system of one full-fledged automaton and a certain number of automata of stones, which have no internal state and can move only together with the main automaton. Interaction between machines is a key feature of this gain, it is allowed to have a collective (or one machine with stones) external memory, thereby significantly diversifies its behavior. If you get rid of the interaction of automata, the resulting independent system will be little better than a single machine.

Next, we discuss the known results associated with the collective automata.

Keywords: maze traversal, finite state machine.

Bibliography: 38 titles.

For citation:

D. V. Gusev, 2019, "Behavior of finite automata in mazes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 165–192.

1. Введение

Первой работой связанной с коллективами автоматов можно считать работу Блюма и Козена [3], в которой авторы демонстрируют, каким образом можно обойти конечный шахматный лабиринт с помощью автомата и двух камней или двух взаимодействующих автоматов. Хофман [14, 15] установил, что автомат с камнем в общем случае не обходит конечный шахматный лабиринт. Хемерлинга [12] и Кригела [18] показали, что класс шахматных конечных лабиринтов допускает естественное расслоение, (для любого слоя найдется коллектив из одного автомата с камнем, обходящий этот слой) в качестве параметра расслоения здесь выступает число дыр в лабиринте.

Случай плоского бесконечного шахматного лабиринта оказался более сложным. В работе [4] Блум и Сакода установили, что автомат с семью камнями может обойти бесконечный шахматный лабиринт. После доказательства этого факта было уточнено Хабасинским и Карпинским [10]. В работе [25] Шепитовский с помощью алгоритма из [3] показал, что обойти можно, используя всего 5 камней. В [17, 30] Килибарада показывает, что нельзя обойти бесконечный шахматный лабиринт одним автоматом с тремя камнями (а также просто четырьмя автоматами) и можно двумя автоматами с тремя камнями. Таким образом для данной задачи остаётся открытым вопрос о обходе лабиринта автоматом с четырьмя камнями.

Для лабиринтов более общего вида Блюмом и Сакодой [4] частично обосновано, а впоследствии доказано Хемерлингом [13] наличие ловушки уже в трехмерном случае. Также установ-

лено наличие бесконечной трехмерной ловушки сразу для всех коллективов автоматов [32]. При этом каждый коллектив обходит только конечную часть лабиринта. Ролликом предложен подобный результат для лабиринтов, имеющих вид плоского кубического графа [21].

Отдельный интерес представляет обход пространств $\mathbb{Z}^k$ для различных k . В [27] Анджансом рассмотрены случаи для малых k , в частности $\mathbb{Z}$ нельзя обойти автоматом с одним камнем, и можно автоматом с двумя камнями. Также существует лёгкий способ обойти $\mathbb{Z}^2$ используя автомат с тремя камнями. При этом любое $\mathbb{Z}^k$ обходится с помощью эмуляции машины Минского автоматом с тремя камнями [19]. При этом данный обход экспоненциален по времени и мной в моей бакалаврской работе был предъявлен автомат с четырьмя камнями обходящий быстро любое $\mathbb{Z}^k$. Также легко показать, что автомата с двумя камнями не достаточно для обхода $\mathbb{Z}^k, k > 1$.

В работах Савича [22, 23] рассмотрены специальные классы лабиринтов, для которых установлено, что проблема выхода из них по специальным путям эквивалентна открытой проблеме совпадения языков, распознаваемых детерминированными и недетерминированными линейно ограниченными машинами Тьюринга.

1.1. Постановка задачи и содержание работы

Если рассматривать только задачу обхода какого-либо семейства лабиринтов автоматом с некоторым набором камней, можно заметить, что до сих пор нижние и верхние оценки на количество необходимых для обхода камней были либо маленькими числами, либо были доказательства, что с никаким числом камней лабиринт не обходится. Поэтому, логично поставить задачу о нахождении лабиринта, который обходится с k камнями и не обходится с $k - 1$. Собственно, построение подобного лабиринта являлось основной задачей этой работы.

В итоге, конкретно такой лабиринт построить не удалось, тем не менее построен лабиринт обладающий довольно близкими свойствами к требуемому, а именно $k + 3$ мерный мозаичный лабиринт, который нельзя обойти с k камнями и заведомо можно с $2k + 2$ камнями.

Были опробованы различные конструкции лабиринта. Основной идеей была модификация уже существующих лабиринтов посредством встраивания других лабиринтов в рёбра. После многочисленных не очень удачных попыток, была придумана конфигурация, которая дала нужные свойства.

В табличке ниже можно сравнить полученный лабиринт с некоторыми другими лабиринтами или семействами лабиринтов.

Лабиринт	Нельзя обойти	Можно обойти
Конечные плоские	1	2
Бесконечные плоские	3	5
$\mathbb{Z}$	1	2
$\mathbb{Z}^k, k > 1$	2	3
Конечные трёхмерные	∞	-
Планарные 3-графы	∞	-
$B(2, 665)$	∞	-
$k + 3$ -мерный специального вида	k	$2k + 2$

Меньшая часть работы связана с использованием бёрнсайдových свободных групп для построения сильной ловушки для любого коллектива автоматов. Используя подобные группы, мы получили лабиринт с максимально сильными свойствами в терминах коллективов автоматов. Ближайший аналог этого лабиринта, строится здесь [32], при этом построение получается довольно сложным. В нашем случае вся сложность заложена в структуре группы, при этом доказательство самого факта и описание самого лабиринта получается довольно простым.

Далее в работе мы сначала дадим все необходимые определения, потом рассмотрим сложную ловушку основанную на бёрнсайдовых группах и в конце концов предъявим необходимые построения и доказательства для лабиринта с нетривиальной оценкой на количество камней.

2. Определения

В этой секции мы введём основные определения, которые нам понадобятся. Во-первых мы определим понятие лабиринта. В нашем случае лабиринтом будет некоторый граф со специальной структурой на рёбрах. Отметим, что возможны и другие определения лабиринта. Во-вторых, определим конечный автомат и способ взаимодействия автомата с лабиринтом, то как автомат движется по лабиринту. В-третьих, обобщим понятие конечного автомата до понятия коллектива автоматов. Также, определим поведение коллектива автоматов в лабиринте. В-четвёртых, определим интересный нам случай коллектива автоматов, где в коллективе некоторые автоматы (автоматы-камни) очень просто устроены.

При этом будем пользоваться основными понятиями и обозначениями теории из автоматов и графов, принятыми здесь [33, 34, 38].

2.1. Общие определения

Введём некоторые теоретико-множественные обозначения. Пусть X — некоторое множество. Через $|X|$ будем обозначать мощность X . Через $\mathcal{P}(X)$ будем обозначать булеан множества X . Через $\mathcal{P}_0(X)$ — булеан без пустого множества. Пусть $\{X_i\}_{i \in A}$ — семейство множеств, тогда через Pr_i обозначим проектирование произведения $\prod_{j \in A} X_j$ на i -ый сомножитель.

2.2. Лабиринт

В данной части введём понятия лабиринта.

Рассмотрим $G = (V, E)$ некоторый ориентированный граф. V — множество вершин графа G (не более чем счётное), E — множество рёбер (не более чем счётное). Назовём, тройку (G, f, X) — нагруженным графом, где $f : E \rightarrow X$ — разметка дуг графа, X — множество отметок (конечное). Для простоты разметку на ребре (v, u) , будем обозначать $f(v, u)$.

Пусть X — некоторое конечное множество $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Через $D(X)$ будем обозначать множество $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$, где $\bar{a}_i$ — обратный элемент к a_i и наоборот. Обратный элемента к $a \in A_0$ будет обозначать также, через a^{-1} или $-a$, в зависимости от ситуации. Помимо множества $D(X)$, для удобства иногда будет использоваться 0 — нулевой элемент.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $G = (E, V)$ — симметрический ориентированный граф без петель и кратных дуг. Тогда нагруженный граф $(G, f, D(X))$, для некоторого X , будем называть лабиринтом, если выполнено:

- Для любой вершины $v \in V$ и рёбер $(v, u), (v, w) \in E$, $f(v, u) \neq f(v, w)$
- Для любых $v, u \in V$ если $(v, u) \in E$, то $(u, v) \in E$ (из условия симметричности графа) и $f(v, u) = f(u, v)^{-1}$

Для удобства доопределим $f(v, v) = 0$, $v \in V$, $0 \notin D(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Симметрический ориентированному графу без петель и кратных дуг соответствует неориентированный граф без петель и кратных дуг. Поэтому иногда для удобства будем описывать обычный граф, подразумевая при это ориентированному симметрический.

Для лабиринта $L = (G, f, D(X)) = ((V, E), f, D(X))$, обозначим $[v]_L = \{f(v, u) | (v, u) \in E\}$ – множество меток на выходящих из вершины v дугах. Также $[v]_L$ будем называть конфигурацией вершины. Пару дуг $(u, v), (u, v) \in E$ будем обозначать $< u, v >$ (при этом для удобства допускаем обозначение $< u, v > \in E$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовём лабиринт $L' = ((V', E'), f', D(X))$ – *подлабиринтом лабиринта* $L = ((V, E), f, D(X))$, если

- $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$;
- для любых $v_1, v_2 \in V'$ если $(v_1, v_2) \in E$, то $(v_1, v_2) \in E'$, причём $f(v_1, v_2) = f'(v_1, v_2)$.

Через $\mathcal{L}(D(X))$ будем обозначать множество (семейство) всех лабиринтов $(G, f, D(X))$, где G и f корректно заданный граф и разметка на нём.

2.3. Автоматы

В этой части определим конечный автомат и поведение конечного автомата в лабиринте.

Под конечным автоматом $\mathfrak{A}$ будем понимать пятёрку (A, Q, B, φ, ψ) , где A, B, Q – конечные множества (алфавиты): входной, выходной и алфавит состояний. $\varphi : Q \times A \rightarrow Q$, $\psi : Q \times A \rightarrow B$ – функции переходов и выходов. Если начальное состояние $q_0 \in Q$ фиксировано, то такой автомат $\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ будем называть *инициальным*. Далее, если факт инициальности будет важен для нас, тогда будем обозначать автомат нижним индексом. Часто вместо конечного автомата будем говорить просто автомат.обратная

Определим взаимодействие автомата и лабиринта. Пусть задано некоторое семейство лабиринтов $\mathcal{L}(D(X))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ – называется $\mathcal{L}(D(X))$ -допустимым автоматом, если

- $A = \mathcal{P}_0(D(X)), B = D(X) \cup \{0\}$
- $\psi(q, a) \in a \cup \{0\}$, для любых $q \in Q, a \in A$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Поведением инициального $\mathcal{L}(D(X))$ -допустимого автомата

$$\mathfrak{A}_{q_0} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$$

в лабиринте $L = ((V, E), f, D(X))$ с начальной вершиной $v_0 \in V$, назовем последовательность $\pi(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = (q_0, v_0), (q_1, v_1), \dots$, такую, что

- $q_t \in Q, v_t \in V, (v_t, v_{t+1}) \in E$ или $v_t = v_{t+1}$
- $\varphi(q_t, [v_t]_L) = q_{t+1}, \psi(q_t, [v_t]_L) = f(v_t, v_{t+1})$

Положим $\pi_t(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = (q_t, v_t)$.

Таким образом, A – входной алфавит автомата и множество различных возможных конфигураций вершины (множество меток на исходящих рёбрах), B – множество вариантов движения автомата, Q – множество состояний автомата (его внутренняя память), φ – функция отвечающая за изменение состояния автомата, ψ – за ходы автомата в лабиринте. В каждый момент времени автомат «видит» метки на дугах исходящих из текущей вершины лабиринта и в соответствии с набором этих меток и внутренним состоянием, он передвигается по какой-то из дуг в соседнюю вершину лабиринта и меняет своё внутренне состояние.

Пусть $\text{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = \bigcup_{t=0}^{\infty} \{v_t\}$ — множество всех лабиринта вершин, которые автомат обойдет; $\text{Fr}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = V \setminus \text{Int}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0})$ — множество вершин, которые автомат не обойдет.

Будем говорить, что $\mathfrak{A}_{q_0}$ обходит L_{v_0} , если $\text{Fr}(\mathfrak{A}_{q_0}, L_{v_0}) = \emptyset$. Говорим, что $\mathfrak{A}_{q_0}$ сильно обходит L , если он обходит его начиная из любой вершины лабиринта. L_{v_0} — ловушка для $\mathfrak{A}_{q_0}$, если автомат не обходит лабиринт; L — ловушка для $\mathfrak{A}_{q_0}$, если автомат не обходит лабиринт с какой бы вершины он ни начинал.

2.4. Независимая система автоматов

Иногда в одном лабиринте L из вектора начальных вершин $\vec{v}_0 = (v_0^1, \dots, v_0^m)$ одновременно запускается сразу несколько инициальных автоматов $\mathcal{A}_{\vec{q}_0} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m)$ с вектором начальных состояний $\vec{q}_0 = (q_0^1, \dots, q_0^m)$. Такую систему автоматов будем называть независимой. Логично для неё определить.

$$\text{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{v}_0}) = \bigcup_{t=1}^m \text{Int}(\mathcal{A}_{i, q_0^i}, L_{v_0^i})$$

$$\text{Fr}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{v}_0}) = V \setminus \text{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{v}_0})$$

Тогда, понятия (сильного) обхода и (сильной) ловушки для независимой системы автоматов определяются также как и для одного автомата.

2.5. Коллектив автоматов

По аналогии с одним автоматом, определим понятие коллектива автоматов и поведение коллектива в лабиринтах. Пусть задано некоторое семейство лабиринтов $\mathcal{L}(D(X))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Набор $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m)$ называется коллективом $\mathcal{L}(D(X))$ -допустимых автоматов, где $\mathfrak{A}_i = (A_i, Q_i, B_i, \varphi_i, \psi_i)$, для $i = 1, \dots, m$, некоторые автоматы, для которых выполнено:

- $A_i = \{a \in \mathcal{P}_0(D(X)) \times \prod_{i=1}^m (\theta \cup Q_i) \mid \text{Pr}_{i+1}(a) = \theta\}$, где $\theta \notin \bigcup_{i=1}^m Q_i$ — некоторый выделенный элемент
- $B_i = D(X) \cup \{0\}$
- $\psi_i(q, a) \in \text{Pr}_1(a) \cup \{0\}$, для любых $q \in Q_i, a \in A_i$

Аналогично случаю с одним автоматом, если у всех m автоматов заданы начальные состояния $\vec{q}_0 = (q_0^1, \dots, q_0^m)$, то коллектив будем называть инициальным и обозначать $\mathcal{A}_{\vec{q}}$

Пусть $L = ((V, E), f, D(X))$ некоторый лабиринт; $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$, $v_i \in V$, набор вершин лабиринта L ; $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$, где $q_i \in Q_i$ — некоторое состояние автомата $\mathfrak{A}_i$. Пусть для любого $i = 1, \dots, m$

$$a_i(\vec{q}, \vec{v}) = ([v_i]_L, q'_{i1}, q'_{i2}, \dots, q'_{im})$$

где для $1 \leq j \leq m$, $q'_{ij} = q_j$, если $v_i = v_j$ и $i \neq j$, иначе $q'_{ij} = \theta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Поведением коллектива $\mathcal{L}(D(X))$ -допустимых автоматов $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m)$ с начальными состояниями $\vec{q}_0 = (q_0^1, \dots, q_0^m)$, $q_i \in Q_i$ в лабиринте $L = ((V, E), f, D(X))$ с набором начальных вершин $\vec{v}_0 = (v_0^1, \dots, v_0^m)$, назовем последовательность

$$\pi(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{v}_0}) = (\vec{q}_0, \vec{v}_0), (\vec{q}_1, \vec{v}_1), \dots,$$

где $\vec{q}_t = (q_t^1, \dots, q_t^m)$, $\vec{v}_t = (v_t^1, \dots, v_t^m)$, такую, что

- $q_t^i \in Q_i, v_t^i \in V, (v_t^i, v_{t+1}^i) \in E$ или $v_t^i = v_{t+1}^i$
- $\varphi_i(q_t^i, a_i(\vec{q}, \vec{v})) = q_{t+1}^i$
- $\psi(q_t^i, a_i(\vec{q}, \vec{v})) = f(v_t^i, v_{t+1}^i)$

Положим $\pi_t(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{v}_0}) = (\vec{q}_t, \vec{v}_t)$.

Если в случае с одним автоматом, автомат принимает решение по какой метке пойти только в соответствии со своим состоянием, в случае коллектива их m автоматов, каждый автомат также учитывает состояния всех автоматов стоящих в текущий момент в той же вершине, что и он. Таким образом возникает «обратная связь» между автоматами.

Пусть,

$$\text{Int}_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{v}_0}) = \bigcup_{t=0}^{\infty} \{v_t^i\}, \forall i = 1, \dots, m$$

$$\text{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{v}_0}) = \bigcup_{t=1}^m \text{Int}_i(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{v}_0})$$

$$\text{Fr}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{v}_0}) = V \setminus \text{Int}(\mathcal{A}_{\vec{q}_0}, L_{\vec{v}_0})$$

Тогда, понятия (сильного) обхода и (сильной) ловушки определим так же, как в случае с одним автоматом.

2.6. Коллектив с камнями

Определим частый случай коллектива – коллектив с камнями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m)$ – некоторый $\mathcal{L}(D(X))$ -допустимый коллектив автоматов. Набор $(\mathfrak{A}_{i_1}, \mathfrak{A}_{i_2}, \dots, \mathfrak{A}_{i_k})$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ назовём системой камней в коллективе $\mathcal{A}$, если

- у любого из этих автоматов $\mathfrak{A}_{i_j}$ только одно состояние – $q_{i_j}^0$
- у любого из этих автоматов $\mathfrak{A}_{i_j}$, для любого $a \in A_{i_j}$ либо $\psi_{i_j}(q_{i_j}^0, a) = 0$, либо $\psi_{i_j}(q_{i_j}^0, a) = \sigma$, но тогда существует автомат $\mathfrak{A}_l$ из этого коллектива, не являющийся камнем ($l \neq i_j, j' = 1, \dots, k$), со следующим свойством. Если $a = (b, z_1, \dots, z_m)$, где $z_{i_j} = \theta$ как и положено, тогда выполнено $z_l \neq \theta$, а также $\psi_l(z_l, a') = \sigma$, где $a' = (b, z'_1, \dots, z'_m)$, $z'_l = \theta, z'_{i_j} = q_{i_j}^0$ и $z'_i = z_i$ для остальных $i = 1, \dots, m$.

То есть, автомат-камень $\mathfrak{A}_{i_j}$ может двигаться, только тогда, когда в вершине с ним есть обычный автомат $\mathfrak{A}_l$, причем двигаться они будут по одной метке (в одном направлении).

Если в коллективе автоматов $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m)$, есть k автоматов-камней, то будем называть этот коллектив типа $(m - k, k)$. В основном нас будут интересовать коллективы типа $(k, 0)$ (все автоматы полноценные) или $(1, k)$ (один автомат и k камней). В случае с коллективом типа $(1, k)$ будем подразумевать, что за всю сложную логику отвечает автомат, он принимает решение брать с собой камни стоящие с ним в одной вершине или не брать в соответствии своим состоянием.

3. Построение сильной ловушки для любого коллектива автоматов

В этой секции мы построим сильную ловушку для любого коллектива автоматов. Ловушка будет выглядеть как граф Кэли некоторой группы. Сама группа будет и, соответственно, лабиринт бесконечны, но любой коллектив автоматов обойдёт лишь конечную область в нём, что мы и докажем.

3.1. Проблема Бёрнсайда и её решения

Проблема Бёрнсайда о периодических группах фиксированного периода была поставлена Бёрнсайдом в 1902 году в следующей форме [6]

Проблема 1. Пусть группа G имеет t независимых порождающих элементов $a_1, a_2, \dots, a_t$ и для любого элемента $x \in G$ выполнено соотношение $x^n = 1$, где n — данное целое число. Будет ли определенная таким образом группа конечной, и если да, то каков ее порядок?

Сейчас группы, определенные t порождающими и соотношением $x^n = 1$, называют свободными бёрнсайдowymi группами ранга t и периода n (экспоненты n). Обычно они обозначаются как $B(t, n)$.

Понятно, что вопрос нетривиален для случая $t > 1$. Самим Бёрнсайдом показана конечность $B(t, n)$ для $n \leq 3$ и любого t и $B(2, 4)$ [6]. Сановым [37] показана конечность $B(t, n)$ для $n = 4$ и любого t , М.Холлом [11] для $n = 6$ и любого t .

В 1964 году Голод и Шафаревич [28] доказали, что существуют бесконечные 2-порожденные периодические группы с неограниченными периодами элементов. В 1968 году Новиков и Адян представили отрицательное решение проблемы Бёрнсайда [36] для любого нечётного периода $n \geq 4381$ и любого $t > 1$. В [26] Адяном решение упрощено и доказано, что $B(t, n)$ бесконечны для любого нечётного $n \geq 665$ и любого $t > 1$.

ТЕОРЕМА 1. $B(t, n)$ — бесконечна для всех нечётных $n \geq 665$ при $t > 1$.

В 1992 году Иванов [16] анонсировал отрицательное решение для больших чётных периодов.

Таким образом, мы имеем бесконечные группы порождённые конечным количеством элементов, при этом период каждого элемента равномерно ограничен. В дальнейшем, при построении лабиринта, будем использовать какую-нибудь из таких групп, например $B(2, 665)$.

3.2. Определение лабиринта

Пусть G бесконечная группа нужного вида, M такое, что $g^M = 1$ для любого $g \in G$. $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ — множество её образующих группы G , среди которых нет повторяющихся и обратных. $S^{-1} = \{s_1^{-1}, s_2^{-1}, \dots, s_n^{-1}\}$. Положим $D(S) = S \cup S^{-1}$, где структура обратных элементов в $D(S)$, такая же как в группе G .

Построим граф Кэли (ориентированный симметрический) для группы G и сделаем его нагруженным метками из $D(S)$. А конкретнее:

- за множество вершин V возьмём множество элементов группы G ;
- между вершинами, отвечающими элементам g_1 и g_2 проведем дуги (g_1, g_2) и (g_2, g_1) , если $g_1 s = g_2$, для некоторого $s \in S$;
- положим $f(g_1, g_2) = s$, $f(g_2, g_1) = s^{-1}$

Таким образом получился размеченный симметрический граф $((V, E), f, D(S))$ без кратных дуг и петель, удовлетворяющий условиям лабиринта. То есть, мы построили лабиринт по группе G , будем обозначать его L_G . Далее будем отождествлять элементы группы и вершины, а также будет использовать групповые операции над вершинами, если это потребуется.

Пусть $g = t_1 t_2 \dots t_n$, где $g \in G$ и $t_i \in D(S)$, причем n минимальное число с такими свойствами, т.е. g нельзя представить меньшим количеством элементов из $D(S)$. Тогда будем обозначать $d(g) = n$. Заметим, что $d(g) = d(g^{-1})$. Также, легко видеть, что кратчайшее расстояние в лабиринте между двумя вершинами v_1 и v_2 , равно $d(v_1^{-1}v_2) = d(v_2v_1^{-1})$.

3.3. Единичный автомат

Рассмотрим сначала случай с одним автоматом. Покажем, что единичный автомат сможет обойти только ограниченную часть L_G .

Пусть $\mathfrak{A} - L(D(S))$ -допустимый автомат. Заметим, что ход автомата в конкретной вершине определяется исключительно его состояние, поскольку конфигурация всех вершин одинакова (из каждой выходит $2n$ дуг всех возможных меток), а других автоматов нет. Пусть этот автомат $\mathfrak{A}$ начинает движение из некоторой вершины v_0 . Тогда, его движение будет довольно простым.

ЛЕММА 1. *Поведение автомата $\mathfrak{A}_{q_0}$ в лабиринте G_L с $|Q|$ состояниями будет обладать следующими свойствами:*

- На начальной стадии автомат сделает $U < |Q|$ ходов, с неповторяющимися состояниями;
- Далее состояния будут повторяться с периодом $T \leq |Q|$;
- Каждые M периодов, вершины посещаемые автоматом будут повторяться;

Доказательство леммы.

Так как количество состояний конечно, какое-то состояние автомата повториться как минимум два раза. Пусть первое такое состояние q_1 и между первым и вторым появлением сделано T ходов (очевидно $T \leq |Q|$), а перед q_1 было $U < |Q|$ ходов. Заметим, что текущее состояние однозначно определяет следующее, таким образом после второго появления q_1 последовательность состояний будет такой же как и после первого появления. Отсюда получаем заикленность состояний с периодом T . Обозначим через v_1 вершину лабиринта, в которой автомат впервые оказался в состоянии q_1 .

Пусть $s'_1, s'_2, \dots, s'_T$ – направления движения автомата в цикле, $s'_i \in D(S)$. Пусть $g_T = s'_1 s'_2 \dots s'_T$, $g_T \in G$. Тогда через M циклов после посещения вершины v_1 автомат окажется в вершине $v_1 g_T^M = v_1$, то есть вернётся обратно. Таким образом, сначала автомат посетит не более U вершин, а дальше в цикле будет посещать не более TM вершин. $\square$

Из этой леммы легко видеть, что L_G – сильная ловушка для любого одиночного автомата.

3.4. Коллектив типа $(m, 0)$

Теперь рассмотрим случай коллектива автоматов.

Пусть $\mathcal{A}_{\vec{q}_0} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m) - L(D(S))$ -допустимый коллектив автоматов. Основная наша цель – доказать, что построенный нами лабиринт – сильная ловушка для любого такого коллектива, причём коллектив сможет обойти только конечное число вершин лабиринта.

Пусть $|Q_1|, \dots, |Q_m|$ – количество состояний у автоматов. Обозначим через Q_A максимум из $|Q_i|$ $i = 1, \dots, m$.

Назовём состоянием коллектива $\mathcal{A}$ в момент времени t набор $I = (q_t^1, q_t^2, \dots, q_t^m, F_t)$, где $q_t^i \in Q_i$ – состояние конкретного автомата в момент t ; $F_t = \{F_t^1, F_t^2, \dots, F_t^k\}$, $k \leq m$, где F_t^i – множество номеров всех автоматов находящихся в какой-то вершине в данный момент. Причём $\bigcup_{i=1}^k F_t^i = \{1, \dots, m\}$ и один индекс принадлежит только одному F_t^i . Если все автоматы находятся в разных вершинах, то F_t^i состоят из одного индекса каждый и их m штук. То есть, состояние коллектива – это состояния всех автоматов и разбивка автоматов на группы стоящих в одной вершине. Далее факт нахождения в одной вершине двух или более автоматов будем называть встречей.

Положением коллектива в лабиринте в момент времени t , назовём набор вершин $(v_t^1, v_t^2, \dots, v_t^m)$, в котором находятся автоматы. Заметим, что пара положение-состояние однозначно все определяет последующее поведение коллектива автоматов.

ТЕОРЕМА 2. *Поведение коллектива автоматов $\mathcal{A}_{\vec{q}_0} = (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_m)$ в лабиринте L_G в вектором начальных вершин $\vec{v}_0$ обладает следующим свойством: существуют такие O_m и H_m зависящие только от m , M и Q_A , что:*

- *Состояния коллектива $\mathcal{A}$ любые в H_m подряд идущих моментов времени однозначно определяют следующее состояние.*
- *На начальной стадии коллектив автоматов сделает $U \leq O_m$ ходов, после которых состояния будут повторяться с периодом $T \leq O_m$;*
- *Каждые M периодов, положение коллектива будет повторяться, т.е. после первых U ходов пара положение-состояние коллектива $\mathcal{A}$ будет повторяться с периодом $MT \leq MO_m$.*

Доказательство теоремы.

Будем доказывать индукции по числу автоматов. В случае с одним автоматом, состояние коллектива фактически состояние автомата и $O_1 = Q_A$, $H_1 = 1$, что было доказано ранее. Таким образом база индукции есть.

Пусть $m = l$, тогда по предположению индукции для всех $m < l$ утверждение верно. H_l и O_l будем выражать через l , M , Q_A , H_i и O_i для $i < l$. Поскольку H_i и O_i по предположению зависят только от i , M и Q_A , H_l и O_l тоже можно будет выразить через l , M и Q_A .

ЛЕММА 2. *Пусть существуют две группы автоматов размерами a и b , $a + b = l$. Пусть O_a и O_b константы из индукции. Тогда, если никакие два автомата из этих групп (один из первой, один из второй) не встречались $h = \max(O_a, O_b) + M^2 O_a O_b + 1$ ходов подряд, то и в дальнейшем никакие два не встретятся.*

Доказательство леммы. Заметим, что эти h ходов, группы не влияют на движения друг-друга, поэтому эти две группы мы можем в течении h ходов рассматривать как два коллектива в лабиринте L_G с некоторыми начальными состояниями и вектором начальных вершин. Заметим, так как $a, b < l$, то к этим коллективам применимы предположения индукции (но только на h первых ходов, в дальнейшем в худшем случае автоматы из разных групп встретятся и независимость пропадёт).

Тогда, после $\max(O_a, O_b)$ ходов (могут и раньше), состояния автоматов в обеих группах зацикливаются, причем циклы длиной не более O_a и O_b и каждые M таких циклов положения групп автоматов повторяются.

Заметим, что за следующие $M^2 O_a O_b + 1$ ходов первая группа будет находиться в не более MO_a различных парах положение-состояние, аналогично вторая в не более MO_b различных

парах. Тогда существуют два момента времени t_1, t_2 из этих $M^2 O_a O_b + 1$ ходов, когда положение первого коллектива – $\vec{v}_a$, состояние – $(\vec{q}_a, F_a)$, положение второго коллектива – $\vec{v}_b$, состояние – $(\vec{q}_b, F_b)$. Заметим, что из эти двух пар положение-состояние однозначно получается пара положение-состояние всего коллектива. Таким образом, пара положение-состояние всего коллектива из m автоматов повторилась, то есть оно и дальше будет повторяться с периодом $T_{ab} = t_2 - t_1 < M^2 O_a O_b$. Поскольку, между t_1 и t_2 группы автоматов не встречались, они и дальше не будут встречаться. $\square$

Докажем, следующую лемму, являющуюся подпунктом теоремы.

ЛЕММА 3. *Положим H_l минимальным натуральным числом со следующими свойствами:*

$$H_l \geq \max(O_i, O_j) + M^2 O_i O_j + 1, \forall i > 0, j > 0, i + j = l$$

$$H_l \geq H_i, \forall i < l$$

Тогда, по последовательности $I_1, I_2, \dots, I_{H_l}$ из H_l состояний коллектива можно однозначно определить состояние I_{H_l+1} .

Доказательство леммы.

Заметим, что по этим H_l состояниям мы можем определить, есть ли две группы автоматов, автоматы из которых не встречаются друг с другом за эти H_l ходов (в состояниях записана информация о встречах автоматов).

Пусть есть две такие группы A и B с размерами a и b . Тогда в силу выбора H_l эти группы удовлетворяют условию предыдущей леммы. Следовательно, автоматы из этих групп не встретятся после этих H_l ходов, а следовательно и на ходу $H_l + 1$. Заметим, что состояние состояния коллектива их l камней однозначно определяется определяется состоянием коллектива A и коллектива B и наоборот (если их рассматривать как коллективы автоматов в L_G) на этих $H_l + 1$ ходу.

Тогда, I_{H_l+1} – состояние коллектива $\mathcal{A}$ из l камней, однозначно определяется состоянием коллектива A и коллектива B на $H_l + 1$ -ом ходу. В свою очередь, состояния коллективов A и B на этом ходу, однозначно определяются предыдущими своими H_a и H_b состояниями, а значит и предыдущими H_l состояниями. Следовательно I_{H_l+1} однозначно определяется через предыдущие H_l состояний коллективов A и B , а значит и $\mathcal{A}$, что и требовалось.

Пусть таких двух групп нет. Далее все моменты времени лежат в интервале от 1 до H_l (если не оговорено обратное). Заметим, что по состояниям $I_1, I_2, \dots, I_{H_l}$ можно определить, направление движения автомата $\mathfrak{A}_i$ в момент t (будем обозначать его $g_t^i \in D(S)$). Следовательно, если известная вершина v_{t_1} , в которой $\mathfrak{A}_i$ находился в момент t_1 , то и известна вершина v_{t_2} , в которой он находился любой другой момент t_2 , причём $v_{t_2} = v_{t_1} g$, где $g \in G$ произведение каких-то g_j^i , либо их обратных.

Пусть $\mathfrak{A}_1$ в момент времени 1 находится в вершине v_0 . Тогда в остальные моменты $2 \leq t \leq H_l$ он находится в вершинах $v_0 h_t^1$, где $h_t^1 \in G$ однозначно определяется через $I_1, I_2, \dots, I_{H_l}$. В силу предположения о том, что разделённых групп не существует, есть автомат, для удобства $\mathfrak{A}_2$, с которым он встретится в момент t_1 , в вершине $v_0 h_{t_1}^1$. Тогда, в момент t_1 известно положение $\mathfrak{A}_2$, а значит известны вершины в которой $\mathfrak{A}_2$ находится во все остальные моменты времени t , причём они имеют вид $v_0 h_t^2$, где h_t^2 однозначно выражается через $I_1, I_2, \dots, I_{H_l}$ ($h_{t_1}^1 = h_{t_1}^2$, а остальные получаются из $h_{t_1}^2$ с помощью g_j^2).

Аналогично, найдем автомат $\mathfrak{A}_3$, с которым встречается хотя бы один из двух первых, для него положения вершин будут определяться аналогично. Так будем продолжать и далее. Заметим, что в силу условия о несуществовании двух не встречающихся групп, мы всегда найдем новый автомат, с которым есть встречи у уже рассмотренных. Таким образом, любой $\mathfrak{A}_i$ из m автоматов в момент t находится в вершине $v_0 h_t^i$, причём h_t^i однозначно выражается через $I_1, I_2, \dots, I_{H_l}$.

Рассмотрим момент времени $H_l + 1$. Состояния каждого из m автоматов, однозначно получаются из I_{H_l} . Пусть в момент $H_l + 1$ $\mathfrak{A}_i$ находится в вершине $v_0 h_{H_l}^i g_i$, $g_i \in G$. Заметим, что для определения, стоят ли $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$ достаточно сравнить на равенство $h_{H_l}^i g_i$ и $h_{H_l}^j g_j$. $h_{H_l}^i$ и $h_{H_l}^j$ однозначно определяется через $I_1, I_2, \dots, I_{H_l}$, g_i и g_j через I_{H_l} . Следовательно, разбиение на группы стоящие в одной вершине на шаге $H_l + 1$ однозначно определяется через $I_1, I_2, \dots, I_{H_l}$, а значит и I_{H_l+1} однозначно через них определяется. Что нам и требовалось. Итого пункт про H_l выполнен. $\square$

Посчитаем, сколько различных состояний $I = (\vec{q}, F)$ может быть у коллектива $\mathcal{A}$. Различных $\vec{q}$ не более Q_A^l (т.к. состояний у каждого из автоматов не более Q_A). Количество различных F грубо оценим сверху числом l^l . Действительно, разложить l индексов автоматов по l множествам можно не более чем l^l способами, и каждому такому способу соответствует только одно F (разбиение автоматов по группам стоящим в одной вершине). Итого, различных состояний коллектива не более чем $(Q_A l)^l$.

Тогда заметим, что существует не более $(Q_A l)^{lH_l}$ различных блоков из H_l подряд идущих состояний коллектива. Положим $O_l = (Q_A l)^{lH_l} + H_l$, рассмотрим первые O_l ходов коллектива $\mathcal{A}$ в L_G . В этих ходах можно выделить $(Q_A l)^{lH_l} + 1$ блок из H_l подряд идущих состояний коллектива. Тогда, два блока начинающиеся в ходы t_1 и t_2 будут одинаковыми. Так как каждый такой блок однозначно определяет последующую последовательность состояний коллектива, мы получаем, что, начиная с момента t_1 , состояния коллектива зацикливаются с периодом $t_2 - t_1$. Таким образом, U из условия теоремы равно $t_1 \leq O_l$ (если первый ход считается нулевым), а $T = t_2 - t_1 \leq O_l$. Получаем, что второй пункт теоремы выполнен, нужное O_l найдено.

Для доказательства теоремы осталось показать, что каждые M получившихся циклов, положения коллектива будут повторяться. Действительно, пусть любой $\mathfrak{A}_i$ на каком-то ходе $t \geq t_1$ находится в вершине v_t . Пусть за каждые T ходов он сдвигается на $g_i \in G$, тогда через M ходов он попадёт в вершину $v_t g_i^M = v_t$, что нам и требуется. Таким образом после первых U ходов пара положение-состояние всего коллектива $\mathcal{A}$ будет повторяться с периодом $MT \leq MO_m$. $\square$

Таким образом, мы показали, что любой коллектив автоматов стартующий из любых вершин не обойдёт только конечную части графа Кэли группы G .

3.5. Замечания

Интересным представляется вопрос, какие модификации можно внести коллектив автоматов, чтобы он таки обошел данный граф Кэли. Самым напрашивающейся модификацией является добавления датчика случайных чисел в автомат. Легко видеть, что случайно блуждающий по группе G автомат сможет выйти из любой конечной области. Интересно, что коллектив автоматов на это не способен. В принципе это не первый случай, когда случайность переигрывает коллектив автоматов, здесь [27] рассматриваются другие, более тривиальные примеры такого рода. Тем не менее, вопрос об обходе коллективом с датчиком случайных чисел группы G представляется довольно интересным.

4. Лабиринт с нетривиальной оценкой на количество камней

В этой части работы мы покажем как построить лабиринт, с нетривиальными верхними и нижними оценками на количество камней k , требующихся для обхода лабиринта коллективом автоматов типа $(1, k)$.

4.1. Прямоугольный, мозаичный и шахматный лабиринты

Определим некоторые классы лабиринтов, вершины которых будут лежать в пространстве $\mathbb{R}$.

Обозначим через $B_n = \{b_1, \dots, b_n\}$ – единичные вектора n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Положим $D(B_n) = \{b_1, \dots, b_n, -b_1, \dots, -b_n\}$.

Если $A, B \in \mathbb{R}^k$, то в зависимости от ситуации под $\overline{AB}$ будем понимать либо вектор, либо отрезок между точками A и B . Назовём множество отрезков в $\mathbb{R}^n$ n -конфигурацией, если любые два отрезка имеют не более одной общей точки и если таковая есть, то это конец для каждого из отрезков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Лабиринт $L = ((V, E), f, D(B_n))$ назовём *прямоугольным*, если

- $V \subseteq \mathbb{R}^n$ и если $(v, u) \in E$, то вектор $\overline{vu}$ сонаправлен направлению $f(v, u)$;
- Множество отрезков $\{\overline{vu} | (v, u) \in E\}$ является n -конфигурацией.

Фигура $\bar{L} = \bigcup_{(v,u) \in E} \overline{vu}$ в $\mathbb{R}^n$ называется конфигурацией прямоугольного лабиринта L . Далее не будем отличать лабиринт от его фигуры, из контекста будет понятно, что имеется в виду.

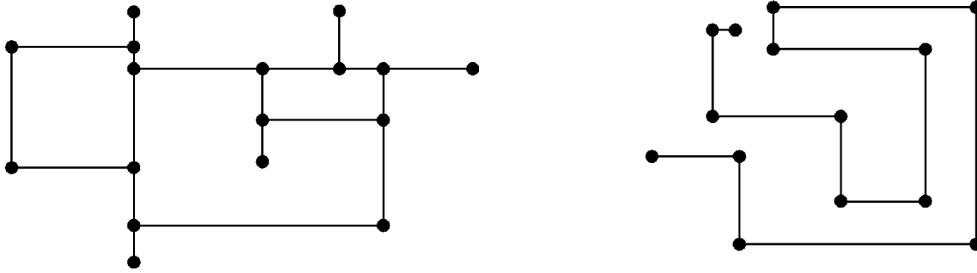


Рис. 1: Примеры плоских прямоугольных лабиринтов

Пусть $\mathbb{Z}^n$ – целочисленная решётка в $\mathbb{R}^n$, тогда логично ввести такие типы лабиринтов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Прямоугольный L назовём *целочисленным*, если множество вершин лежит в $\mathbb{Z}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Если для некоторого целочисленного лабиринта L выполняется, $\bigcup_{(v,u) \in E} \overline{vu}$ – множество отрезков длины k , то будем называть такой лабиринт k -мозаичным. Если $k = 1$, будем говорить, что такой лабиринт просто *мозаичный*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Мозаичный лабиринт, у которого любые две вершины на расстоянии 1 соединены ребром, назовём *шахматным*.

В случае $\mathbb{Z}^n$ шахматный лабиринт обычно представляется как некоторое множество клеток в бесконечной клетчатой плоскости.

4.2. Невозможность обхода плоских конечных мозаичных лабиринтов без камней

Для правильного построения лабиринта нам потребуется некоторая теорема, сформулируем её здесь.

Ещё Будахом [5] была сформулирована и доказана следующая теорема

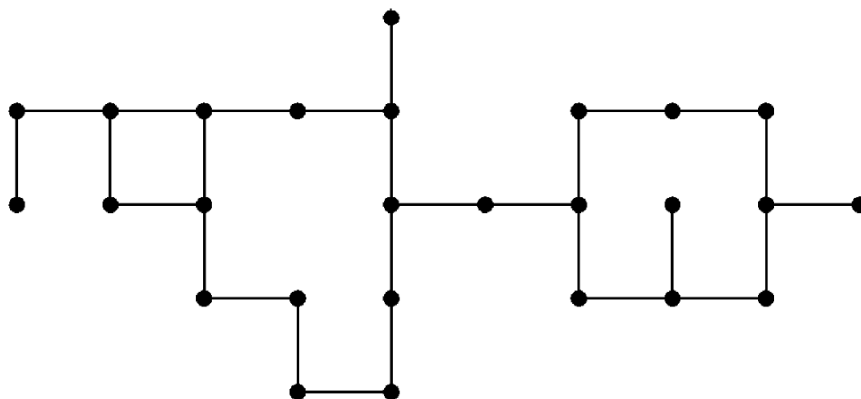


Рис. 2: Пример плоского мозаичного лабиринта

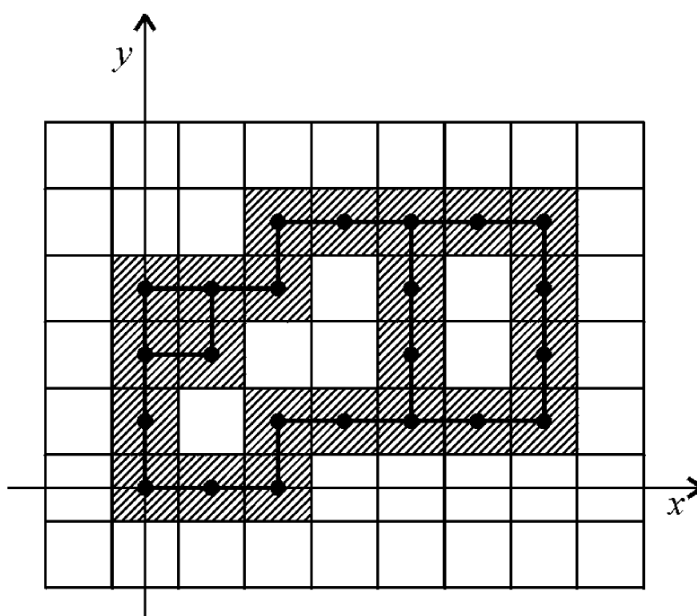


Рис. 3: Пример плоского шахматного лабиринта

ТЕОРЕМА 3. *Для любого конечного автомата существует конечный плоский шахматный (мозаичный) лабиринт, который он не обходит.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Для лабиринтов такого рода обычно не принципиально есть в них шахматность или нет (если построен мозаичный, то можно построить и шахматный).*

Решение было довольно громоздким, и в дальнейшем существенно было упрощено Подколызиным [33, 34], а также Килибарда [31, 17] доказал это более легким и понятным способом.

В [1] было показано, для любой конечной независимой системы автоматов существует бесконечный плоский мозаичный лабиринт, являющийся ловушкой для каждого автомата в отдельности. Из этого факта легко следует следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Для любой независимой системы автоматов $\mathcal{A}_{q_0} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_m)$, стартовых из одной вершины, существует конечная плоская шахматная (мозаичная) ловушка.*

Простое доказательство этой теорема приведено в [29]. Именно эта теорема понадобится в дальнейших наших рассуждениях.

4.3. Построение лабиринта

Лабиринт, который мы будем строить, будем являться мозаичным в каком-то $\mathbb{Z}^n$. При этом его нельзя будет обойти никакому коллективу автоматов типа $(1, n - 2)$, и будет существовать коллектив типа $(1, 2n - 2)$ его обходящий.

4.3.1. Вложение лабиринтов

Определим вспомогательную конструкцию. Конкретнее, это будет способ сделать из плоского мозаичного лабиринта более сложный, вставив в его ребро конструкцию содержащую другой мозаичный лабиринт. При построении итогового лабиринта мы будем многократно использовать такую конструкцию.

Пусть имеется два мозаичных лабиринта $L_1 = ((V_1, E_1), f_1, D(B_2))$ и $L_2 = ((V_2, E_2), f_2, D(B_k))$, $k > 1$ и две вершины $v', v'' \in V_2$. При этом первый L_1 – плоский, т.е. вершины лежат в $\mathbb{Z}^2$, и возможно бесконечный; вершины второго лежат в $\mathbb{Z}^k$ и он весь лежит в некотором k -мерном шаре радиуса $R - 2$ (при этом R – нечетное, $R > 6$).

Определим мозаичный лабиринт $L = ((V, E), f, D(B_{k+1}))$, который будем обозначать $\Delta(L_1, L_2, v', v'')$, вершины которого лежат в $\mathbb{Z}^{k+1}$, который будет фактически являться лабиринтом L_1 в ребра которого встроили пары лабиринтов L_2 .

Опишем построение L точнее. Заметим, что нам достаточно описать $k + 1$ -конфигурацию этого лабиринта, нагруженный симметрический граф будет получаться из неё очевидным образом. $B_{k+1} = \{b_1, \dots, b_{k+1}\}$ – единичные вектора в $\mathbb{Z}^{k+1}$. Пусть $v \in V_1$ и имеет координаты (x, y) в $\mathbb{Z}^2$, тогда в лабиринте L будет вершина $g(v)$ с координатами $(3Rx, 3Ry, 0, \dots, 0)$.

Пусть есть две точки в $\mathbb{Z}^{k+1}$ на расстоянии $3R$, например $(0, \dots, 0)$ и $(3R, 0, \dots, 0)$. Будем строить некоторое множество единичных отрезков T , соединяющие эти точки.

Рассмотрим, k -конфигурацию T_2 , соответствующую L_2 . Пусть, шар радиуса R , в котором лежат все вершины L_2 , имеет центр $(r_1, \dots, r_k)$. Определим два отображения $g_1, g_2 : \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^{k+1}$. Первое переводит $(x_1, \dots, x_k)$ в $(R, x_1 - r_1, \dots, x_k - r_k)$, второе переводит $(x_1, \dots, x_k)$ в $(2R, x_1 - r_1, \dots, x_k - r_k)$. Применим g_1 и g_2 к конфигурации T_2 , получим получившиеся наборы $g_1(T_2)$ и $g_2(T_2)$ единичных отрезков в T .

Рассмотрим образы вершины v'' $g_1(v'')$ и $g_2(v'')$. Заметим, что их координаты имеют вид $(2, y_1, \dots, y_k)$ и $(2R, y_1, \dots, y_k)$. Тогда мы можем соединить их цепочкой T'' из R единичных отрезков параллельных направлению b_1 . Положим T'' в T .

Возьмем 4 отрезка между точками $(0, \dots, 0)$, $(1, 0, \dots, 0)$, $(2, 0, \dots, 0)$, $(2, 1, 0, \dots, 0)$, $(3, 1, 0, \dots, 0)$, $(3, 0, \dots, 0)$. Далее продолжим эту цепочку отрезков цепочкой из $R - 4$ отрезков из точки $(3, 0, \dots, 0)$ в точку $(R - 1, \dots, 0)$. Пусть $g_1(v')$ имеет координаты $(R, y_1, \dots, y_k)$. Тогда продолжим цепочку $|y_1|$ отрезками в направлении $\sigma(y_1)b_2$, $|y_2|$ отрезками в направлении $\sigma(y_2)b_3$, и так далее, при этом последним будут $|y_k|$ отрезков в направлении $\sigma(y_k)b_{k+1}$ ($\sigma(y_i)b_{i+1} - b_i$ если $y_i \geq 0$, $-b_{i+1}$ иначе). Завершает эту цепочку отрезок из $(R - 1, y_1, \dots, y_k)$ в $(R, y_1, \dots, y_k)$. Таким образом мы соединили $(0, \dots, 0)$ с $g_1(v')$ цепочкой отрезков T'_1 . Цепочку отрезков T'_2 , соединяющую $(3R, \dots, 0)$ с $g_2(v')$, можно получить симметрично отразив T'_1 относительно гиперплоскости проходящей через $(3R/2, 0, \dots, 0)$ и перпендикулярной b_1 . Таким образом, мы получили множество единичных отрезков $T = T'_1 \cup g_1(T_2) \cup T'' \cup g_2(T_2) \cup T'_2$. Далее составные части T будем обозначать верхними индексами T^1, T^5 – начальная и конечная части, T^3 – середина, T^2, T^4 – подлабиринты L_2 .

ЛЕММА 4. Все точки $(x_1, \dots, x_k) \in T$, кроме нулевой удовлетворяют неравенству $x_1 - |x_2| > 0$

Доказательство леммы.

Действительно, для точек начального изгиба и точек прямой из T^1 это верно. Для точек с $x_1 \geq R - 1$ это верно, т.к. ни у одной точки из T не $x_2 \geq R - 2$, т.к. L_2 -подобные части лежат в шарах с радиусом $R - 2$ и второй координатой центра равной 0.

□



Рис. 4: Примерная конструкция T в проекции на первые две координаты. Утолщения – L_2 -подобные части

Возьмем любые $v_1, v_2 \in V_1$ из первого лабиринта такие, что $\langle v_1, v_2 \rangle \in E_1$. Предположим $\overline{v_1 v_2}$ – параллелен $b_1 \in B_2$ (для удобства будем считать $f_1(v_1, v_2) = b_1$, иначе рассуждения будут аналогичны, нужно только поменять местами v_1 и v_2), а $v_1 = (x, y)$ и $v_2 = (x + 1, y)$, тогда в лабиринте L_2 им соответствуют вершины $(3Rx, 3Ry, 0, \dots, 0)$ и $(3Rx + 3R, 3Ry, 0, \dots, 0)$. Пусть $g_{\langle v_1, v_2 \rangle}$ – параллельный перенос в $\mathbb{Z}^{k+1}$ на вектор $(3Rx, 3Ry, 0, \dots, 0)$. Тогда, $g_{\langle v_1, v_2 \rangle}(T)$ – это множество единичных отрезков соединяющих $(3Rx, 3Ry, 0, \dots, 0)$ и $(3Rx + 3R, 3Ry, 0, \dots, 0)$. В случае, если $\overline{v_1 v_2}$ параллелен $b_2 \in B_2$, аналогично соединим образы v_1 и v_2 , $(3Rx, 3Ry, 0, \dots, 0)$ и $(3Rx, 3Ry + 3R, 0, \dots, 0)$ с помощью $g_{\langle v_1, v_2 \rangle}(T)$, где $g_{\langle v_1, v_2 \rangle}$ – движение, переводящее $(x_1, \dots, x_{k+1})$ в $(3Rx + x_2, 3Ry + x_1, x_3, \dots, x_{k+1})$.

Итого, $k + 1$ -конфигурацию $\Delta(L_1, L_2, v', v'')$ определим как объединение

$$\bigcup_{\langle v_1, v_2 \rangle \in E_1} g_{\langle v_1, v_2 \rangle}(T).$$

Покажем, что различные $g_{\langle v_1, v_2 \rangle}(T)$ не пересекаются между собой нигде кроме начальных точек. Для этого докажем, что проекции различных $g_{\langle v_1, v_2 \rangle}(T)$ на плоскость первые две координаты не пересекаются. Действительно, заметим, что T легко вкладывается в прямоугольник длиной $3R$ и шириной $2R$, так как L_2 -подобные части помещаются внутри шара с радиусом $R - 1$. Поэтому имеет смысл проверять только $g_{\langle v_1, v_2 \rangle}(T)$ и $g_{\langle v_1, v_3 \rangle}(T)$, где v_1 общая вершина $g_{\langle v_1, v_2 \rangle}(T)$ и $g_{\langle v_1, v_3 \rangle}(T)$. Заметим, что они не пересекаются в силу ранее доказанной леммы, оказываясь отдельными биссектрисой соответствующего угла. Таким образом, это объединение действительно $k + 1$ -конфигурация и $\Delta(L_1, L_2, v', v'')$ действительно мозаичный лабиринт.

В дальнейшем будем иногда называть вершины $\Delta(L_1, L_2, v', v'')$ соответствующие L_1 главными, а конструкции T между ними сложными рёбрами.

4.4. Построение сложного лабиринта

Теперь можно преступить к итоговому построению лабиринта. Параллельно будем доказывать, что его не может обойти любой автомат с необходимым нам количеством камней.

Определим понятие изоморфизма лабиринтов. Нам оно понадобится для правильного описания соответствия мозаичных лабиринтов и подлабиринтов различных размерностей (лабиринты маленьких размерностей будет использовать при построении лабиринтов в больших размерностях).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Назовём лабиринты $L_1 = ((V_1, E_1), f_1, D(B_l))$ и $L_2 = ((V_2, E_2), f_2, D(B_n))$, $l < n$ (g, h) -изоморфными, если

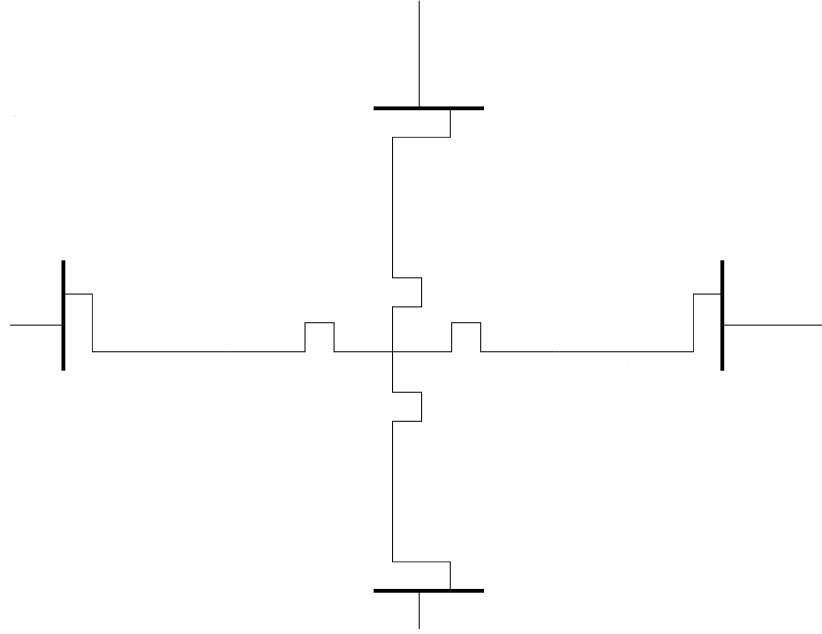


Рис. 5: Часть лабиринта $\Delta(L_1, L_2, v', v'')$ в районе образа вершины $v \in V_1$ из которой ведут 4 дуги

- g – биекция из V_1 в V_2 ;
- h – инъекция из $D(B_l)$ в $D(B_n)$ (если $n = l$, то биекция);
- Для любых $v_1, v_2 \in V_1$ выполнено $(v_1, v_2) \in E_1$, тогда и только тогда, когда $(g(v_1), g(v_2)) \in E_2$, причём $h(f_1(v_1, v_2)) = f_2(g(v_1), g(v_2))$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заметим, что инъекция h переводит обратные друг другу элементы из $D(B_l)$ в обратные друг другу элементы из $D(B_n)$. Все инъекции в дальнейшем будут обладать таким свойством.

Пусть есть лабиринт $L = ((V, E), f, D(B_k))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Назовём пару (L', v) висячим подлабиринтом лабиринта L , если выполняется:

- L' подлабиринт L , $v \in L'$;
- L' связан с остальным лабиринтом только одним ребром, причём это ребро выходит из v .

Зафиксируем следующие сущности:

- натуральные числа $l \leq n$;
- лабиринт $L \in \mathcal{L}(D(B_l))$ с вершинами v и u в нём;
- инъекцию h из $D(B_l)$ в $D(B_n)$ (переводящую обратные направления в обратные)
- $\mathcal{A}_{[q]} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_k)$ – инициальный $\mathcal{L}(D(B_n))$ -допустимый коллектив автоматов типа $(1, k)$;

- неупорядоченный набор индексов $\{i_1, \dots, i_m\}$, $1 \leq i_j \leq k$.

Пусть $L \in \mathcal{L}(D(B_l))$ (g, h) -изоморфно $L_1 \in \mathcal{L}(D(B_n))$ для какой-то g , $g(v) = v_1$, $g(u) = u_1$. Тогда, если для любого $L_2 \in \mathcal{L}(D(B_n))$ с висячим подлабиринтом (L_1, v_1) и любого вектора вершин $\vec{v}_0 = (v^1, \dots, v^{k+1})$, где $v^i \in L_2$, $v^1 \notin L_1$, таких, что при обходе L_2 коллективом $\mathcal{A}$, начиная с вектора $\vec{v}_0$, в L_1 бывает только автомат $\mathfrak{A}$ и камни $\mathfrak{B}_{i_j}$, $j = 1, \dots, k$, выполнено, что автомат $\mathfrak{A}$ не посетит вершину $g(u)$, в этом случае назовём $(L, v, u) - (h, (i_1, \dots, i_m))$ -висячей ловушкой для $\mathcal{A}$.

Другими словами, $(L, v, u) - (h, (i_1, \dots, i_m))$ -висячая ловушка, если изоморфную ей часть нельзя обойти автоматом (а именно посетить конкретную вершину), используя только конкретные камни при передвижении по ней. Вне неё можно использовать все камни и лабиринт может быть вообще произвольного вида. При этом стартовая позиция автомата может быть любой вершине вне лабиринта, а стартовая позиция камней просто любой вершине (в том числе, они могут располагаться в вершине, которую автомату нужно посетить).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Если $(L, v, u), L \in \mathcal{L}(D(B_l)) - (h, (i_1, \dots, i_m))$ -висячая ловушка для $\mathcal{L}(D(B_n))$ -допустимого коллектива $\mathcal{A}_{[q]} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_k)$, для всех возможных инъекций h из $D(B_l)$ в $D(B_n)$ и всех возможных выборов m индексов из k , то назовём её (l, m) -висячей ловушкой для $\mathcal{A}$.

Теперь докажем основную теорему, позволяющую построить лабиринт.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_k)$ - инициальный $\mathcal{L}(D(B_n))$ -допустимый коллектив автоматов типа $(1, k)$. $(L_2, v_2, u_2) - (l, m)$ -висячая ловушка для $\mathcal{A}$, $l < n$. Тогда существует конечный $L_1 \in \mathcal{L}(D(B_2))$ и вершины v_1 и u_1 в нём, что $(\Delta(L_1, L_2, v_2, u_2), v'_1, u_1) - (l+1, m+1)$ -висячая ловушка для $\mathcal{A}$, где v'_1 и u'_1 образы v_1 и u_1 при конструировании Δ .

Доказательство теоремы.

Основная идея доказательства примерно такая, показать, что поведение автомата $(m+1)$ камнями в $(\Delta(L_1, L_2, v_2, u_2), v'_1, u_1)$ соответствует поведению некоторого автомата (без камней) в лабиринте L_1 , после для выбора правильного L_1 воспользуемся о существовании конечной плоской шахматной ловушки для любого коллектива автоматов.

Рассмотрим какой-то конечный $L_1 \in \mathcal{L}(D(B_2))$ с выделенной вершиной v_1 . Построим $L_3 = \Delta(L_1, L_2, v_2, u_2)$, причём v_3 образ v_1 при этом построении. Заметим, что $L_3 \in \mathcal{L}(D(B_{l+1}))$. Рассмотрим какую-то инъекцию h из $D(B_{l+1})$ в $D(B_n)$ и набор камней $i_1, \dots, i_{m+1}$. Пусть $L \in \mathcal{L}(D(B_n))$ и L_3 (g, h) -изоморфен висячему подлабиринту (L_4, v_4) (v_4 соответствует v_3) лабиринта L . Пусть коллектив стартует с какой-то вершины в L вне L_4 (камни с любых вершин в L) и при обходе L в L_4 могут находиться только камни с индексами $i_1, \dots, i_{m+1}$. Вершина с которой стартует автомат и как выглядит остальная часть L (не L_4) нам будет не важно, они могут любыми. Попытаемся обойти L_4 .

L_4 выглядит как лабиринт L_1 со сложными рёбрами, в которые вставлены пары лабиринтов L_2 . Вершины соответствующие вершинам L_1 будем обозначать множеством U , а получающиеся сложные рёбра множеством E_U . Пусть $u \in U$ вершина соответствующая какой-то вершине L_1 , тогда через $\sigma(u)$ будем обозначать следующий подлабиринт. Пусть из u выходит несколько сложных рёбер (не больше четырёх) вида T в другие вершины из U (каждое состоит из частей T^1, T^2, T^3, T^4 и T^5). Тогда в $\sigma(u)$ для каждого T , выходящего из неё, положим вершины из T^1, T^2 и ближайшей половины T^3 (длина T^3 нечётная, поэтому она делится пополам) вместе с отрезками их соединяющими. Таким образом, весь L_4 разбился на подлабиринты соответствующие вершинам из U .

Рассмотрим поведение автомата в области $\sigma(u)$ для какой-то $u \in U$. Если автомат находится в вершине u , а в $\sigma(u)$ находится меньше $m+1$ камней, то автомат никогда больше не

выйдет из $\sigma(u)$, так как области, соответствующие L_2 (они практически висячие подлабиринты лабиринта $\sigma(u)$), автомат не может обойти, используя не более m любых камней и стартуя из u (при этом начальное расположение камней в $\sigma(u)$ не важно).

Рассмотрим поведение автомата в L_4 . Во все моменты времени автомат находится в $\sigma(u)$, для какого-то $u \in U$ (моменты когда автомат выходит из L_4 в остальную часть лабиринта будем считать, что автомат находится в $\sigma(v_4)$). Таким образом всё время разобьётся на отрезки $[t_1, t_2 - 1]$, $[t_2, t_3 - 1]$, ..., $[t_i, t_{i+1} - 1]$, ... , где в течении каждого отрезка автомат находится в конкретном $\sigma(u)$, при этом для соседних отрезков, эти $\sigma(u)$ разные. Заметим, что в течении каждого отрезка, количество камней в соответствующем $\sigma(u)$ постоянно.

Из этих отрезков, выделим те, в которых автомат посещает соответствующую вершину $u \in U$. Назовём эти отрезки времени – главными. Т.к. в течении главного отрезка времени, автомат посещает $u \in U$, количество находящихся в $\sigma(u)$ камней либо $m + 1$ (чтобы автомат мог выйти), либо этот отрезок последний (автомат навсегда останется в $\sigma(u)$). Пусть главный отрезок $a = [a_1, a_2]$ такой, что после него следующий главный отрезок (не последний) $b = [b_1, b_2]$ соответствует другой вершине. Пусть эти вершины u_a и u_b (очевидно, что они соседние вершины в лабиринте L_1) и их соединяет сложное ребро T .

Рассмотрим моменты времени a_2 и b_1 . Заметим, что в эти моменты все камни находятся на ребре T .

Действительно, до a_2 они находились в $\sigma(u_a)$, после b_2 в $\sigma(u_b)$, а между моментами a_2 и b_1 автомат всегда находится на ребре T , соответственно, чтобы их можно было перетащить, они должны находиться на T . Пусть ходу a_2 соответствует $S_{a_2} = (q_{a_2}, \vec{s}_{a_2})$, где q_{a_2} – состояние автомата в этот момент, $\vec{s}_{a_2}$ – вектор смещения автомата и камней относительно u_a в этот момент.

Аналогично, определим $S_{b_1} = (q_{b_1}, \vec{s}_{b_1})$ (только смещения будем считать относительно u_{b_1}). Назовём S_{a_2} – выходным состоянием вершины u_a , S_{b_1} – входным состоянием вершины u_b .

Пусть автомат последовательно посещает вершины из U (фактически обходит лабиринт L_1). Пусть эта последовательность $u_0, u_1, \dots, u_t, \dots$ (считаем, что из неё выкинуты подряд повторяющиеся посещения одной и той же вершины). Возможно она конечная, возможно бесконечная. Заметим, что выходное состояние вершины u_t , либо однозначно определяет входное состояние u_{t+1} , либо однозначно определяет, что в $\sigma(u_{t+1})$ будет меньше $m + 1$ камня и u_{t+1} будет последней вершиной в последовательности. Если $u_t \neq v_4$, конфигурация u_t (множество направлений для рёбер в E_U из неё исходящих) и входное состояние вершины, однозначно определяют либо направление движения из вершины (в лабиринте L_1) и выходное состояние, либо то, что это последняя вершина в последовательности. Если $u_t = v_4$ выходное состояние и направление могут в принципе быть любыми.

Пусть $\mathcal{S}$ – множество всех выходных состояний, оно конечно (состояний $\mathfrak{A}$ – конечно и конфигураций $m + 1$ камней в T – конечно). Тогда пусть $Q = \mathcal{S} \cup \{\alpha\} \cup \mathcal{S}'$, где $\mathcal{S}'$ множество такой же мощности, как и $\mathcal{S}$ и каждый элемент из $\mathcal{S}'$ соответствует какому-то элементу из $\mathcal{S}$. $A = \mathcal{P}_0(D(B_2))$, $B = D(B_2) \cup \{0\}$.

Пусть дана произвольная вершина $u \in U$, $v_4 \neq u$ вместе с $\sigma(u)$ с заданной конфигурацией рёбер a ($\sigma(u)$ для всех таких вершин выглядят одинаково). Пусть в u автомат попадает из какого-то выходного состояния $S_1 \in \mathcal{S}$ (заметим, что по этой конфигурации можно однозначно определить с какой стороны приходит робот), тогда $\varphi(S_1, a) = S_2$, $\psi(S_1, a) = b$, где S_2 – выходное состояние u (однозначно определяется из конфигурации a и S_2), b – направление выхода (также определяется однозначно). Если из u мы не можем выйти или выходное состояние S_1 не может быть таковым для этой вершины, то $\varphi(S_1, a) = \alpha$, $\psi(S_1, a) = 0$. Пусть $S'_1 \in \mathcal{S}'$ соответствует $S_1 \in \mathcal{S}$, тогда определим $\varphi(S'_1, a) = S_1$, $\psi(S'_1, a) = b$, где b это направление хода для выходного состояния S_1 . Если b нет в a , положим $\varphi(S'_1, a) = \alpha$, $\psi(S'_1, a) = 0$. Также положим $\varphi(\alpha, a) = \alpha$, $\psi(\alpha, a) = 0$.

Запустим автомат (A, Q, B, φ, ψ) , инициализированный каким-то состоянием $q \in \mathcal{S}'$ (q соответствует $S \in \mathcal{S}$), по лабиринту L_1 из вершины v_1 (она соответствует v_4 в U). Запустим, $\mathcal{A}$ в L_4 состоянием автомата и начальными вершинами, соответствующими выходному состоянию S для вершины $v_4 \in U$. В силу построения автомата (A, Q, B, φ, ψ) , вершины, которые обходит (A, Q, B, φ, ψ) в L_1 будут соответствовать вершинам из U , которые обходит $\mathcal{A}$ до возвращения обоих автоматов в v_4 (v_1), либо до бесконечности, если в v_4 (v_1) они не вернуться.

Пусть во время какого-либо обхода $\mathcal{A}$ лабиринта L_4 (начатого вне L_4) $\mathfrak{A}$ посещает вершину $u \in U$, тогда он вершину может посетить при обходе, начиная из выходного состояния S для вершины v_4 (т.к. любой обход с посещением u должен в какой-то момент выходить из v_4 , последний такой момент перед посещением соответствует выходному состоянию S). Следовательно если запускать автомат (A, Q, B, φ, ψ) из вершины v_1 в лабиринте L_1 из всех состояний $\mathcal{S}'$ он посетит не меньше вершин, чем может посетить $\mathfrak{A}$ в U .

Построим подобные автоматы (A, Q, B, φ, ψ) для всех инъекций h и всех различных наборов из $m + 1$ камня. Тогда если все такие автоматы не посещают какую-то вершину $u_1 \in L_1$, то и $\mathfrak{A}$ не посетит соответствующую вершины при любом всячем лабиринте изоморфном L_1 внутри которого нельзя использовать больше $m + 1$ камня.

Для этого воспользуемся теоремой о существовании конечного шахматного лабиринта для любой системы независимых автоматов, который она не может обойти. Таким образом мы получим лабиринт L_1 с вершиной u_1 удовлетворяющие условие теоремы. $\square$

Построим самую простейшую всячую ловушку.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_k)$ – инициальный $\mathcal{L}(D(B_n))$ -допустимый коллектив автоматов типа $(1, k)$, тогда существует $(2, 0)$ -всячая конечная ловушка для $\mathcal{A}$.

Доказательство леммы. Рассмотрим, плоский конечный лабиринт $L_1 \in \mathcal{L}(D(B_2))$ с вершиной v_1 . Пусть он (g, h) -изоморфен всячему подлабиринту (L_2, v_2) , какого-то лабиринта из $\mathcal{L}(D(B_n))$ ($g(v_1) = v_2$). Тогда, рассмотрим движение в L_2 автомата $\mathfrak{A}$ без камней. Заметим, что периоды движения автомата между посещениями вершины v_2 (либо начиная с неё и до бесконечности, если автомат в неё не возвращается) можно описать как движение $\mathcal{L}(D(B_2))$ -допустимого автомата $\mathfrak{A}'$ по лабиринту L_1 стартующего из вершины v_1 с каким-то начальным состоянием q , причём этих начальных состояний не больше чем состояний у автомата $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathcal{A}'_h$ множество таких инициальных автоматов $\mathfrak{A}'_q$ для конкретного h , а $\mathcal{A}'$ объединение $\mathcal{A}'_h$ для всех инъекций из $D(B_2)$ и $D(B_n)$, переводящих обратные элементы в обратные. Тогда для системы независимых лабиринтов $\mathcal{A}'$ найдем конечный шахматный лабиринт L_1 , который она не обходит. Этот лабиринт, точнее L_2 ему изоморфный, и будет являться искомой ловушкой. $\square$

Теперь пользуясь леммой и теоремой получаем следующий факт.

ТЕОРЕМА 6. Существует бесконечный лабиринт $L \in \mathcal{L}(D(B_{k+3}))$ такой с вершиной v_0 , что любой $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_k)$ – инициальный $\mathcal{L}(D(B_{k+3}))$ -допустимый коллектив автоматов типа $(1, k)$, стартующий из v_0 (автомат и камни стартуют из одной вершины) обходит в нём ограниченную область.

Доказательство леммы.

Рассмотрим конкретный коллектив $\mathcal{A}$. Будем строить для него большую всячую ловушку. Начнём с $(2, 0)$ -всячей конечной ловушки (L_1, v_1, u_2) и будем применять теорему. Таким образом построим $(3, 1)$ -всячую ловушку $(\Delta(L_2, L_1, v_1, u_1), v_2, u_2)$ с помощью плоского лабиринта (L_2, v_2, u_2) , $(4, 2)$ -всячую ловушку над $(3, 1)$ -ловушкой с помощью плоского лабиринта (L_3, v_3, u_3) и так далее, до $(k + 2, k)$ -всячей ловушки (L', v', u') .

Теперь пронумеруем коллективы (их счётное число, поэтому так можно сделать). Для i -го построим $G_i = \Delta(I, L'_i, v'_i, u'_i)$, где I – лабиринт отрезок, соединяющий две вершины, (L'_i, v'_i, u'_i)

– соответствующая коллективу $(k+2, k)$ -ловушка. Пусть у G_i две главные вершины g_i^1 и g_i^2 . Тогда соединим G_i , так чтобы g_i^2 совпала с g_{i+1}^1 . Получится цепочка в виде луча, составленная из G_i . Сделаем стартовой вершиной g_1^1 . Тогда $\mathcal{A}_i$ для любого i не сможет дойти до вершины $g_i^2 = g_{i+1}^1$, т.к. внутри G_i на пути к g_i^2 есть $(k+2, k)$ -висячая ловушка для $\mathcal{A}_i$. Таким образом, действительно каждый коллектив обойдёт только конечную область получившегося лабиринта. $\square$

Далее будем получившийся лабиринт L , оставим обозначения для частей G_i . Через L_i $i = 1, \dots, k+1$ будем обозначать плоские лабиринты соответствующие какому либо G_j . Через Δ_i $i = 1, \dots, k+1$ будем обозначать подлабиринты которые получены с помощью оператора Δ . Для каждого G_j есть $k+1$ уровней таких подлабиринтов, каждые Δ_i содержит в себе Δ_j меньших уровней.

4.5. Алгоритм обхода

Теперь опишем алгоритм обход полученного $k+3$ -мерного лабиринта L , коллективом $\mathcal{A} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_{2k+2})$ типа $(1, 2k+2)$, т.е. один автомат и $2k+2$ камня.

4.5.1. Части лабиринта

Посмотрим какие части есть у лабиринта.

- Есть главные вершины кусков G_i , их бесконечное количество. С одной из таких начинается обход;
- Части T_1 , T_3 и T_5 сложных рёбер между вершинами из предыдущего пункта, части T_2 и T_4 это какие-то Δ_{k+1} -подлабиринты, их части рассмотрим далее (T_1 и T_5 на самом деле одно и то же);
- Есть вершины соответствующие вершинам плоских лабиринтов L_i , $i = 1, \dots, k+1$. Для каждого G_j конфигурация всех L_i своя собственная;
- Части T_1 , T_3 и T_5 (T_1 и T_5 на самом деле одно и то же) сложных рёбер между вершинами из предыдущего пункта. Если вершины были из какого-то L_i , то T_2 и T_4 это какие-то Δ_{i-1} , поэтому их не включаем в список. Для L_1 очевидно не существует T_1 , T_3 и T_5 (так рёбра идут напрямую).

Эти множества будем обозначать через M_i и N_i , $i = 1, \dots, k+2$, M_{k+2} и N_{k+2} – это первые два пункта, M_i для остальных i – это третий пункт (разделённый по соответствующим уровням), N_i – это последний пункт (разделённый по соответствующим уровням). N_1 не бывает.

В ходе обхода камни будут находится либо в одной вершине с автоматом, либо в вершинах из M_i $i \leq k+1$.

4.5.2. Состояние автомата

Опишем как устроено состояние автомата. При этом всё описание коллектива автоматов, это описание состояния автомата и описание взаимодействие с камнями.

Состояние автомата будем описывать как конечную память. У ней будут l частей, каждая i -ая принимает какие-то возможные значения из множества S_i . Тогда, итоговое множество состояний – это декартово произведение этих S_i .

Опишем эти части:

- S_1 -часть описывающая в каком из M_i или N_i автомат сейчас находится;
- S_2 -часть. Для каждого уровня L_i , $i \leq k+1$ описывает производится ли обход L_i , если да, то какого типа (их может быть несколько, различающихся по конфигурации выходной вершины) и какое сейчас в этом обходе состояние;
- S_3 -часть описывает для каждого i , что автомат делает сейчас в окрестности вершины из уровня M_i : продолжает обход соответствующего L_i или обходит все соседние более низкие уровни (σ этой вершины), а именно, описывает в какую сторону сейчас необходимо продолжать какой обход (всего сторон, очевидно, 4 штуки);
- S_4 -часть описывает внутренние состояния при обходе T_1 (T_5), а именно: состояния в которых записано в какую сторону сейчас движемся; состояния регулирующие правильное определение того, что T_1 закончилось; состояния устанавливающие какой тип обхода L_i , к которому автомат двигается, нам потребуется;
- S_5 -часть описывает внутренние состояния при обходе T_3 , а именно: состояния, в которых записано в какую сторону сейчас движемся и нужно ли сразу после прохода в одну сторону вернуться обратно; состояния регулирующие правильное определение того, что T_3 закончилось; состояния устанавливающие какой тип обхода L_i , к которому автомат двигается, нам потребуется;

4.5.3. Взаимодействие с камнями

Как было ранее замечено, любой камень либо находится в M_i , $i \leq k+1$, либо в вершине вместе автоматом. Соответственно, в вершинах их M_{k+2} и N_i автомат всегда забирает камни при движении с собой.

Разделим все камни на $k+1$ группу, камни из i -ой группы отвечают за обход лабиринтов типа L_i , и могут находиться либо в вершинах M_i , либо в вершине с автоматом. При посещении автоматом вершины v из M_i , если в этой вершине оказывается камень (или два) из группы i , то принимается решение брать или не брать камень (камни) с собой. Если в S_3 сейчас записано, что производится обход $\sigma(v)$, то камни не берутся с собой. Если в S_3 записано, что выполняется обход L_i , то в соответствии с состоянием этого обхода записанным в S_2 автомат решает, брать камень (или камни) с собой или оставлять их на месте и в какую сторону двигаться. На уровне 1, всегда делается обход L_1 (т.к. там нет $\sigma(v)$ и все вершины связаны на прямую).

Если на уровне i лабиринт обойдён и найден выход из L_i , то при выходе из L_i камни уровня i всегда забираются с собой (камни остальных уровней тоже).

4.5.4. Общее описание обхода

Обход L выглядит следующим образом. Автоматом по очереди обходятся части G_j . Основную сложность в обходе G_j , представляют части Δ_{k+1} и лежащие в них различные Δ_i .

Обход каждой Δ_i делится на обход соответствующего L_i с помощью двух камней, где под обходом L_i подразумевается старт из какой-то вершины вместе со всеми камнями, обход всех вершин, а потом нахождение выхода и сбор всех камней у выхода. Вторая часть обхода Δ_i это передвижение по Δ_i по сложным рёбрам (состоящих в том числе из Δ_{i-1}), связывающим главные вершины Δ_i (которые соответствуют вершинам L_i), а также обход всех множеств σ для каждой главной вершины. Для этого, такой обход запускается при каждом посещении каждой главной вершины. При этом, для каждого направления, ведущего из вершины, по очереди обходятся части сложных рёбер T_1 , T_2 (Δ_{i-1}), T_3 и они же в обратном порядке. В случае Δ_1 очевидно обход σ не производится. Заметим, что при таком способе подхода для любая Δ_i будет обойдена полностью.

Рассмотрим обход более конкретно, а именно опишем, что автомат делает в вершинах разного типа:

- В вершинах соответствующих M_{k+2} автомат всегда принимает решение двигаться из G_i в G_{i+1} , при этом он сразу попадает в сложное ребро N_{k+2} (при этом выставляется правильное S_1 состояние и S_4 часть, в которой записано, что это начал T_1 части ребра и направление в котором необходимо двигаться).
- В вершинах N_{k+2} автомат движется в соответствии с заданными направлением записанным в S_4 или S_5 . При переходе в вершины из M_{k+2} и M_{k+1} он выставляет соответствующее состояние в S_1 (моменты переходов легко определяются по изгибам T_1 и конфигурациям вершин). При входе в вершину из M_{k+1} в S_2 устанавливается начальное состояние для обхода лабиринта L_{k+1} , в S_3 – состояние в котором записано, нужно начать обход σ .
- В вершинах M_i , если в части памяти S_3 для уровня i указано, что автомат должен продолжить обход лабиринта L_i . Тогда S_3 для уровня i переставляется на состояние на состояние «обходить σ в первом из четырёх направлений», сам автомат идёт в направлении задаваемым соответствующим состоянием из S_2 и набором камней из уровня i находящихся с ним сейчас в одной вершине. При этом он переходит в N_i (а именно какой-то T_1), выставляя соответствующий S_1 и S_4 (в котором в том числе указано в какую сторону идти по T_1) и забирая с собой нужный набор камней уровня i . Если из текущей вершины есть выход в N_{i+1} , оба камня уровня i находятся в вершине и состояние S_2 для уровня i соответствует конечному состоянию, то автомат выходит из вершины в N_{i+1} . При этом в S_4 (или S_5) прописывается направление хода автомата (это направление – это направление выходе в N_{i+1}).
- В вершинах M_i , если в части S_3 для уровня i указано, что автомат обходит соответствующую σ в направлении b . В этом случае, если такое направление доступно в данной вершине, то начинаем движение по T_1 в этом направлении, если не доступно – ничего не делаем, ждём следующие ход. В обоих случаях вменяем состояние S_3 для уровня i на следующее за b направление, если b было последним из четырёх, то выставляем состояние «продолжить обход лабиринта». Заметим, что при такой ротации состояний из S_3 при входе в какую-то вершину из M_i мы всегда сначала обойдем по очереди исходящие из неё ребра T возвращаясь обратно в неё, а потом продолжим обход L_i .
- В вершинах N_i , соответствующим T_1 автомат движется в определённом в S_4 (понятно, что можно легко описать его движение с помощью конечного числа состояние). Заметим, что с помощью изгибов автомат может легко понять когда он входит в вершину из M_i или M_{i-1} (в этом случае просто изменим состояние S_1). При входе в вершину M_{i-1} будем инициализировать обход L_{i-1} , выставляя нужное состояние в S_2 для уровня $i-1$, и S_3 в котором записано, нужно начать обход σ .
- В вершинах N_i , соответствующим T_3 автомат движется в определённом в S_5 . Если из S_3 понятно, что сейчас выполняется обход σ , после прохода в одну сторону по T_3 , развернёмся и пойдём в обратную сторону (как того требует обход σ). Если сейчас выполняется обычный обход L_i , то пройдем по T_3 просто в одну сторону. Концы T_3 легко детектируются наличием рёбер в направлениях отличных от направления T_3 . При входе в вершину M_{i-1} будем инициализировать обход L_{i-1} , выставляя нужное состояние в S_2 для уровня $i-1$ и S_3 в котором записано, нужно начать обход σ .

4.5.5. Обход плоского конечного лабиринта с двумя камнями

Осталось обсудить существование обхода каждого L_i (плоского конечного лабиринта с помощью двух камней по построению). При этом обход заключается в старте с входа автомата с камнями, обхода всех вершин лабиринта, нахождение выхода и стягивание к выходу обоих камней.

Конечный шахматный лабиринт можно обойти с помощью двух камней, при этом зафиксировать факт обхода [3]. Опишем в общих чертах алгоритм этого обхода.

Конечный шахматный лабиринт представляет собой конечное множество вершин (клеток) $A \in \mathbb{Z}^2$ (если две вершины находятся на расстоянии 1 – то они соединены ребром), остальные вершины $\mathbb{Z}^2$ являются вершинами дыр этого лабиринта. Если вершины дыр соединять рёбрами если они находятся на расстоянии $\sqrt{2}$, то граф с такими вершинами и ребрами разобьётся на компоненты связности, эти компоненты связности и будем называть дырами. У конечного шахматного лабиринта есть одна бесконечная дыра и, возможно, некоторое количество конечных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть h какая-то дыра, тогда $N(h) \subset A$ – это множество вершин из A , лежащих на расстоянии не больше $\sqrt{2}$, хотя бы от одной вершины дыры. Назовём $N(h)$ границей дыры.

Введём на $\mathbb{Z}^2$ порядок $<$ такой, что $(a, b) < (c, d)$, только если $b < d$ или $b = d$ и $a \leq c$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. $v_0 \in N(h)$ особенное поле дыры h , если для любого другого $v \in N(h)$ $v < v_0$.

Если нам известны особые поля для всех дыр лабиринта, то мы можем горизонтально порезать лабиринт, как на рисунке. При том получившийся лабиринт (если считать разрезы его границами), легко обходиться автоматом без камней (автомат движется по границе оставляя саму границу слева от направления движения, «внутренности» легко обходятся в промежутках между ходами). Тогда, если автомат будет уметь определять особенные точки дыр, он сможет не переступать получившиеся разрезы (переступать и тут же возвращаться обратно) и обойти таким образом лабиринт. Назовём эту часть обхода главной (заметим, что в ней автомат не использует камни, поэтому они всегда находятся в одной вершине с автоматом).

Для определения, является ли граничная вершина особенной или нет, достаточно наличия автомата со счётчиком (максимальное значение на нем не больше периметра дыры). Такой автомат легко эмулируется автоматом с двумя камнями. При этом также можно определить дыра, соответствующая этой вершине бесконечная или нет.

Пользуясь этим соображениями, для нужного нам обхода будем использовать следующий алгоритм.

- Запустим обход лабиринта из стартовой точки.
- Когда главный обход достигнет особенной точки бесконечной дыры, запустим главный обход заново. Заметим, что главный обход обойдет весь лабиринт и вернётся в эту вершину (что мы сможем зафиксировать), так как он фактически ходит в цикле по границе лабиринта получившегося после разреза.
- После этого запустим ещё раз главный обход. Заметим, что когда он дойдет до вершины выхода, все камни будут у автомата, поэтому в этот момент мы сможем завершить обход.

Таким образом мы обошли построенный нами $k+3$ -мерный мозаичный лабиринт, используя $2k+2$ камня.

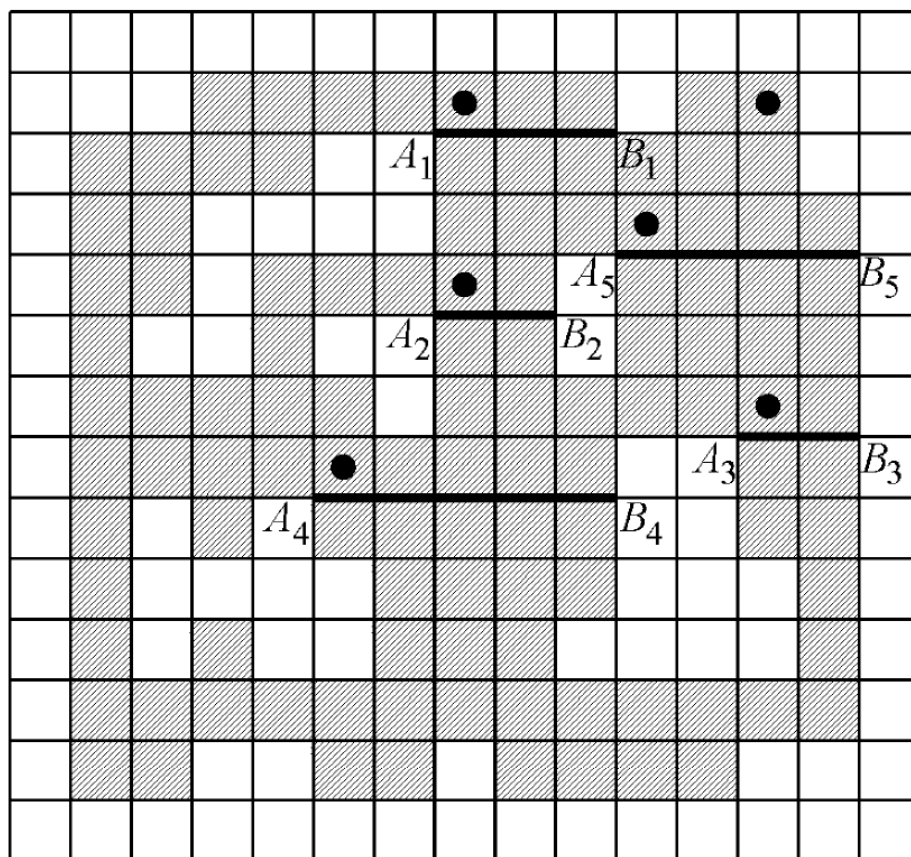


Рис. 6: Точки – особые вершины дыр шахматного лабиринта, $A_i B_i$ – разрезы на лабиринте

4.6. Замечания

Очевидно, что данный результат необходимо улучшать. Во-первых очевидно, что необходимо свести верхнюю и нижнюю оценку в одно число. Сейчас этому помешали некоторые технические трудности, тем не менее, кажется, они вполне преодолимы в будущем. Во-вторых, у автора есть некоторые соображения, как подобного результата добиться в $\mathbb{Z}^3$, а не в $k + 3$ мерном пространстве. Наличие такого результата в $\mathbb{Z}^3$ может поднять вопрос о существовании каких-то критериев, которые позволяли бы отделять лабиринты из $\mathbb{Z}^3$ обходимые разным числом камней. Например, в плоских мозаичных лабиринтах, таким критерием служит количество и размер дыр (правда там разделение в основном делается по размеру памяти, а не по числу камней).

5. Заключение

По результатам работы нами получены два результата. Первый, построение сильной ловушки, несмотря на то, что вторичен, сам по себе позволяет намного проще описать такие ловушки и довольно наглядно показывает слабость модели коллектива автоматов при обходе сложных объектов. Второй, построение лабиринта с нетривиальными оценками на количество камней, требующихся для его обхода. Этот результат решает существенную часть поставленной перед нами задачи и сам по себе ценен, так как до этого не было примеров лабиринтов,

обходимых автоматом с более чем пятью камнями.

address МФТИ, г. Москва email gusdzerzhi@yandex.ru

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Antelmann H., Budach L., Rollik H. A. On universale traps // EIK. 1979. Vol. 15. No. 3. Pp. 123–131.
2. Antelmann H. An application of the prime number theorem in automata theory // ICS PAS Reports 411. 1980. Pp. 9–11.
3. Blum M., Kozen D. On the power of the compass // Proc. 19th IEEE FOCS Conf. 1978. Pp. 132–142.
4. Blum M., Sakoda W. On the capability of finite automata in 2 and 3 dimensional space // Proc. 17th IEEE FOCS Conf. 1977. Pp. 147–161.
5. Budach L. Automata and labyrinths // Math. Nachrichten 86. 1978. Pp. 195–282.
6. Burnside W., “On an unsettled question in the theory of discontinuous groups” // Quart. J. Pure Appl. Math., 1902, 33, 230–238.
7. Dopp K. Automaten in Labyrinthen I // EIK. 1971. Vol. 7. No. 2. Pp. 79–94.
8. Dopp K. Automaten in Labyrinthen II // EIK. 1971. Vol. 7. No. 3. Pp. 167–190.
9. Fischer P. C. Multi-tape and infinite-state automata: A survey // Comm. ACM. 1965. Vol. 8. No. 12. Pp. 799–805.
10. Habasinski Z., Karpinski M. A codification of Blum-Sakoda 7-pebbles algorithm // ICS PAS Reports 448. Warszawa, 1981.
11. Hall M. jun., “Solution of the Burnside problem for exponentsix” // Illinois J. Math., 1958, 2, 764–786.
12. Hemmerling A. 1-pointer automata searching finite plane graphs // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 1986. Vol. 32. Pp. 245–256.
13. Hemmerling A. Normed two-plane traps for finite systems of cooperating compass automata // J. Inf. Process. Cybern. EIK 1987. Vol. 28. No. 8/9. Pp. 453–470.
14. Hoffmann F. One pebble does not suffice to search plane labyrinths // Lecture Notes in Computer Science. 1981. Vol. 117. Pp. 433–444.
15. Hoffman F. 1-Kiesel-Automaten in Labyrinthen // Report R-Math-06/82. AdW der DDR, Berlin, 1982.
16. Ivanov S. On the Burnside problem on periodic groups // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), 27:2 (1992), 257–260; arXiv: math/9210221.
17. Kilibarda G. On the minimum universal collectives of automata for plane labyrinths // Discrete Math. Appl. 1993. Vol. 3. No. 6. Pp. 555–586.
18. Kriegel K. Universelle 1-Kiesel-Automaten fur ? k-komponentige Labyrinthe // Report R-Math-04/84. AdW der DDR, Berlin, 1984.

19. Minsky M. Computation: Finite and Infinite Machines (1st ed.). Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc, 1967.
20. Muler ? H. Endliche Automaten und Labyrinthen // EIK. 1971. Vol. 7. No. 4. Pp. 261–264.
21. Rollik H. A. Automaten in planaren Graphen // Acta Informatica. 1980. Vol. 13. Pp. 287–298.
22. Savitch W. Relations between nondeterministic and deterministic tape complexities // Journal of Computer and System Science. 1970. Vol. 4. Pp. 177–192.
23. Savitch W. Maze recognizing automata and nondeterministic tape complexity // Journal of Computer and System Science. 1973. Vol. 7. Pp. 389–403.
24. Shannon Cl. E. Presentation of a maze-solving machine // Cybernetics Trans. of the 8th Conf. of the Josiah Macy Jr. Found / Editor: H. Forester. 1951. Pp. 173–180.
25. Szepestowski A. A finite 5-pebble-automaton can search every maze // Information Processing Letters. 1982. Vol. 15. No. 5. Pp. 199–204.
26. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
27. Анджанс А. В. Поведение детерминированных и вероятностных автоматов в лабиринтах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Рига, 1987. 90 с.
28. Голод Е. С. О ниль-алгебрах в финитно-аппроксимируемых группах // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1964, 28(2), 273–276.
29. Килибарда Г. Об универсальных лабиринтах-ловушках для конечных множеств автоматов // Дискретная математика. 1990. Т. 2. Вып. 1. С. 72–79.
30. Килибарда Г. О минимальных универсальных коллективах автоматов для плоских лабиринтов // Дискретная математика. 1994. Т. 6. Вып. 4. С. 133–153.
31. Килибарда Г. Новое доказательство теоремы Будаха-Подколзина // Дискретная математика. 1991. Т. 3. Вып. 3. С. 135–146.
32. Килибарда Г., Ушчумлич Ш. О лабиринтах-ловушках для коллективов автоматов // Дискретная математика. 1993. Т. 5. Вып. 2. С. 29–50.
33. Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С, Ушчумлич Ш. Введение в теорию абстрактных автоматов. М.: Изд-во МГУ, 1985.
34. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
35. Кудрявцев Г. Килибарда Ш. Ушчумлич Системы автоматов в лабиринтах. Грант РФФИ № 06-01-00240.
36. Новиков П. С., Адян С. И. О бесконечных периодических группах. I, II, III // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1968, 32(1), 212–244; 32(2), 251–524; 32(3), 709–731.
37. Санов И. Н. Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Ученые записки ЛГУ. Сер. матем., 1940, 10, 166–170.
38. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973

Получено 5.10.2019 г.

Принято в печать 12.11.2019 г.