ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 20. Выпуск 3.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-154-164

О поведении функций, родственных функции Чебышева

С. А. Гриценко, Е. И. Деза, Л. В. Варухина

Гриценко Сергей Александрович — доктор физико-математических наук профессор кафедры математических и компьютерных методов анализа, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: s.gritsenko@gmail.com
Деза Елена Ивановна — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: Elena.Deza@gmail.com
Варухина Лидия Владимировна — Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: Lidadgema@mail.ru

Аннотация

Многие вопросы теории чисел связаны с исследованием *рядов Дирихле*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

и *сумматорных функций*

$$\Phi(x)=\sum_{n\le x} a_n$$

их коэффициентов. Наиболее известным примером ряда Дирихле является *дзета-функция Римана* $\zeta(s)$, определенная для любого комплексного числа $s=\sigma+it$ с действительной частью $\mathrm{Re}s=\sigma>1$ как

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Квадрат дзета-функции

$$\zeta^2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s},\qquad \mathrm{Re}s>1,$$

связан с *функцией делителей* $\tau(n)=\sum_{d|n}1$, дающей число натуральных делителей натурального числа n. Сумматорной функцией ряда Дирихле $\zeta^2(s)$ является функция $D(x)=\sum_{n\le x}\tau(n)$, вопросы асимптотической оценки которой известны как *проблема делителей Дирихле*. В общем случае,

$$\zeta^k(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k(n)}{n^s},\qquad \mathrm{Re}s>1,$$

где функция $\tau_k(n)=\sum_{n=n_1\cdot\ldots\cdot n_k}1$ дает число представлений натурального числа n в виде произведения k натуральных сомножителей. Сумматорной функцией ряда Дирихле $\zeta^k(s)$ является функция $D_k(x)=\sum_{n\le x}\tau_k(n)$. Ее изучение — это *многомерная проблема делителей Дирихле.*

Логарифмическая производная $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ дзета-функции представима в виде

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \quad \mathrm{Re}s > 1.$$

Здесь $\Lambda(n)$ — *функция Мангольдта*, которая определяется как $\Lambda(n) = \log p$, если $n = p^k$ для простого p и натурального k, и как $\Lambda(n) = 0$, иначе. Таким образом, *функция Чебышева* $\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$ является сумматорной функцией коэффициентов ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

соответствующего логарифмической производной $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ дзета-функции Римана. Она хорошо известна в аналитической теории чисел и связана со многими классическими задачами, прежде всего, с *асимптотическим законом распределения простых чисел.*

В частности, хорошо известно представление функции $\psi(x)$ по нулям дзета-функции:

$$\psi(x) = x - \sum_{|\mathrm{Im}\rho| \le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $x = n + 0,5$, $n \in \mathbb{N}$, $2 \le T \le x$, и $\rho = \beta + i\gamma$ — *нетривиальные нули* дзета-функции Римана, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в *критической полосе* $0 < \mathrm{Re}s < 1$.

Аналогичные представления, связанные с нетривиальными нулями дзета-функции Римана, можно получить и для арифметических функций, родственных функции Чебышева, например, для функции $\psi_1(x) = \sum_{n \le x} (x - n)\Lambda(n)$. Именно, в настоящей статье получено представление функции $\psi_1(x)$ по нулям дзета-функции Римана следующего вида:

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \left(\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right) x - \sum_{|\mathrm{Im}\rho| \le T} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(\frac{x^2}{T^2} \ln^2 x\right) + O\left(\sqrt{x} \ln^2 x\right),$$

где $x > 2$, $T \ge 2$, и $\rho = \beta + i\gamma$ — *нетривиальные нули* дзета-функции Римана, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в *критической полосе* $0 < \mathrm{Re}s < 1$.

Ключевые слова: арифметические функции, ряд Дирихле, суматорная функция коэффициентов ряда Дирихле, дзета-функция Римана, функция Чебышева, нетривиальные нули дзета-функции Римана, теорема Коши о вычетах.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

С. А. Гриценко, Е. И. Деза, Л. В. Варухина. О поведении функций, родственных функции Чебышева // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3, с. 154–164.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 20. No. 3.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-154-164

On behavior of arithmetical functions, related to Chebyshev function

S. A. Gritsenko, E. I. Deza, L. V. Varukhina

Gritsenko Sergey Aleksandrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor of mathematical and computer methods of analysis department, Lomonosov Moscow state University (Moscow).
e-mail: s.gritsenko@gmail.com
Deza Elena Ivanovna — doctor of pedagogical sciences, candidate of physical and mathematical science, professor of the department of theoretical computer science and discrete mathematics, Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: Elena.Deza@gmail.com
Varukhina Lidiya Vladimirovna — Moscow Pedagogical State University (Moscow).
e-mail: Lidadgema@mail.ru

Abstract

Many problems of Number Theory are connected with investigation of *Dirichlet series* $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}$ and the *adding functions* $\Phi(x)=\sum_{n\leq x}a_n$ of their coefficients. The most famous Dirichlet series is the *Riemann zeta function* $\zeta(s)$, defined for any $s=\sigma+it$ with $\mathrm{Re}s=\sigma>1$ as $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

The square of zeta function $\zeta^2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}$, $\mathrm{Re}s>1$, is connected with the *divisor function* $\tau(n)=\sum_{d|n}1$, giving the number of a positive integer divisors of positive integer number n. The adding function of the Dirichlet series $\zeta^2(s)$ is the function $D(x)=\sum_{n\leq x}\tau(n)$; the questions of the asymptotic behavior of this function are known as *Dirichlet divisor problem*. Generally, $\zeta^k(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_k(n)}{n^s}$, $\mathrm{Re}s>1$, where function $\tau_k(n)=\sum_{n=n_1\cdot\ldots\cdot n_k}1$ gives the number of representations of a positive integer number n as a product of k positive integer factors. The adding function of the Dirichlet series $\zeta^k(s)$ is the function $D_k(x)=\sum_{n\leq x}\tau_k(n)$; its research is known as the *multidimensional Dirichlet divisor problem*.

The logarithmic derivative $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ of zeta function can be represented as $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$, $\mathrm{Re}s>1$. Here $\Lambda(n)$ is the *Mangoldt function*, defined as $\Lambda(n)=\log p$, if $n=p^k$ for a prime number p and a positive integer number k, and as $\Lambda(n)=0$, otherwise. So, the *Chebyshev function* $\psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)$ is the adding function of the coefficients of the Dirichlet series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$, corresponding to logarithmic derivative $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ of zeta function. It is well-known in analytic Number Theory and is closely connected with many important number-theoretical problems, for example, with *asymptotic law of distribution of prime numbers*.

In particular, the following representation of $\psi(x)$ is very useful in many applications: $\psi(x)=x-\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\leq T}\frac{x^\rho}{\rho}+O\left(\frac{x\ln^2x}{T}\right)$, where $x=n+0,5$, $n\in\mathbb{N}$, $2\leq T\leq x$, and $\rho=\beta+i\gamma$ are *non-trivial zeros* of zeta function, i.e., the zeros of $\zeta(s)$, belonging to the *critical strip* $0<\mathrm{Re}s<1$.

We obtain similar representations over non-trivial zeros of zeta function for an arithmetic function, relative to the Chebyshev function: $\psi_1(x)=\sum_{n\leq x}(x-n)\Lambda(n)$. In fact, we prove the following theorem: $\psi_1(x)=\frac{x^2}{2}-\left(\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right)x-\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\leq T}\frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}+O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2x\right)+O\left(\sqrt{x}\ln^2x\right)$, where $x>2$, $T\geq2$, and $\rho=\beta+i\gamma$ are *non-trivial zeros* of zeta function, i.e., the zeros of $\zeta(s)$, belonging to the *critical strip* $0<\mathrm{Re}s<1$.

Keywords: arithmetical functions, Dirichlet series, adding function of the coefficients of a Dirichlet series, the Riemann zeta function, the Chebyshev function, non-trivial zeros of the Riemann zeta function, Cauchy's residue theorem.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
S. A. Gritsenko, E. I. Deza, L. V. Varukhina, 2019, "On behavior of arithmetical functions, related to Chebyshev function Chebyshevskii sbornik, vol. 20, no. 3, pp. 154–164.

1. Введение

Многие вопросы теории чисел связаны с исследованием *рядов Дирихле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

и *сумматорных функций*

$$\Phi(x) = \sum_{n \le x} a_n$$

их коэффициентов ([2, 3, 6, 9, 11, 12, 17]).

Наиболее известным примером ряда Дирихле является *дзета-функция Римана* $\zeta(s)$ ([4, 6, 13, 14, 16]), определенная для любого комплексного числа $s = \sigma + it$ с действительной частью $\mathrm{Re} s = \sigma > 1$ как

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \mathrm{Re} s > 1.$$

Квадрат дзета-функции

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s},\ \mathrm{Re} s > 1,$$

связян с *функцией делителей* $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, дающей число натуральных делителей натурального числа n. Именно, сумматорной функцией ряда Дирихле $\zeta^2(s)$ является функция $D(x) = \sum_{n \le x} \tau(n)$, вопросы асимптотической оценки которой известны как *проблема делителей Дирихле* ([4, 5, 7, 8, 12]).

В общем случае,

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s},\ \mathrm{Re} s > 1,$$

где функция $\tau_k(n) = \sum_{n=n_1 \cdot \ldots \cdot n_k} 1$ дает число представлений натурального числа n в виде произведения k натуральных сомножителей. Сумматорной функцией ряда Дирихле $\zeta^k(s)$ является функция $D_k(x) = \sum_{n \le x} \tau_k(n)$. Ее изучение - это *многомерная проблема делителей Дирихле* ([4, 5, 6, 7, 8, 12]).

Обобщением дзета-функции Римана и еще одним известным рядом Дирихле является L-функция Дирихле, определяемая равенством

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}, \mathrm{Re} s > 1,$$

где χ — *характер Дирихле* ([3, 4, 6, 16]).

Произведение нескольких L-функций дает ряд

$$L_1(s,\chi_1)\cdot\ldots\cdot L_k(s,\chi_k)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n n^{-s}, \mathrm{Re}s>1,$$

сумматорная функция коэффициентов которого имеет вид

$$C_k(x)=\sum_{n\le x}c_n=\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_k\le x}\chi_1(n_1)\cdot\ldots\cdot\chi_k(n_k).$$

Задача об оценке $C_k(x)$ является обобщением проблемы делителей Дирихле и связана с проблемой делителей в числовых полях ([7, 8, 10, 12, 17]).

Логарифмическая производная дзета-функции $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ представима в виде

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}, \mathrm{Re}s>1.$$

Здесь $\Lambda(n)$ — *функция Мангольдта*:

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & \text{если } n=p^k, p\in P, k\in\mathbb{N},\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Таким образом, *функция Чебышева*

$$\psi(x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)$$

является сумматорной функцией коэффициентов ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$, соответствующего логарифмической производной $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ дзета-функции Римана.

Функция $\psi(x)$ является хорошо известной арифметической функцией, используемой во многих областях теории чисел. Так, она тесно связана с функцией $\pi(x)=\sum_{p\le x}1$ (число простых, не превосходящих x), то есть с доказательством асимптотического закона распределения простых чисел ([3, 4, 6]).

В монографии [6] было получено представление функции Чебышева по нулям дзета-функции Римана:

$$\psi(x)=x-\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\le T}\frac{x^\rho}{\rho}+O\left(\frac{x\ln^2 x}{T}\right),$$

где $x=n+0,5$, $n\in\mathbb{N}$, $2\le T\le x$, и $\rho=\beta+i\gamma$ — *нетривиальные нули* дзета-функции, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в *критической полосе* $0<\mathrm{Re}s=\sigma<1$.

В работе [1] мы получили аналогичные результаты для двух других арифметических функций:

$$\psi_1(x)=\sum_{n\le x}(x-n)\Lambda(n) \text{ и } \psi_2(x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)\ln\frac{x}{n}.$$

Эти функции, родственные функции Чебышева, используются в некоторых теоретико-числовых задачах, связанных с изучением асимптотоического поведения суммарных функций рядов Дирихле.

Именно, были получены асимптотические формулы следующего вида:

$$\psi_1(x)=\sum_{n\le x}(x-n)\Lambda(n)=\frac{x^2}{2}-\sum_{|\mathrm{Im}\rho|\le T}\frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}+O\left(\frac{x^2\ln x}{T}\right),$$

$$\psi_2(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) \ln \frac{x}{n} = x - \sum_{|\mathrm{Im}\rho|\le T} \frac{x^\rho}{\rho^2} + O\left(\frac{x\ln x}{T}\right),$$

где $x = n + 0,5$, $n \in \mathbb{N}$, $2 \le x \le T$, и $\rho = \beta + i\gamma$ — нули дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в критической полосе $0 < \mathrm{Re}s < 1$.

В настоящей статье мы уточняем результат, полученный для функции

$$\psi_1(x) = \sum_{n\le x} (x-n)\Lambda(n).$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. *Для $x > 2$, $T \ge 2$ имеет место формула*

$$\psi_1(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)(x-n) =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \left(\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right) x - \sum_{|\mathrm{Im}\rho|\le T} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right) + O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ — нетривиальные нули дзета-функции Римана, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в критической полосе $0 < \mathrm{Re}s < 1$.

2. Доказательство вспомогательной леммы

Для доказательства основного результата нам потребуется вспомогательное утверждение об асимптотическом поведении интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^{s+1}}{s(s+1)}ds$.

Лемма. *Для $b > 0$ и $T \ge 2$ имеет место формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^{s+1}}{s(s+1)}ds = \begin{cases} a - 1 + O\left(a^{b+1}\min\left(\frac{1}{T^2\ln a}, \frac{1}{T}\right)\right), & \text{если} \quad a > 1, \\ O\left(\frac{1}{T}\right), & \text{если} \quad a = 1, \\ O\left(a^{b+1}\min\left(\frac{1}{T^2|\ln a|}, \frac{1}{T}\right)\right), & \text{если} \quad 0 < a < 1. \end{cases}$$

Доказательство.

А. Пусть $a > 1$. Рассмотрим положительно ориентированный прямоугольник Γ с вершинами $b - iT$,$b + iT$, $-U + iT$,$-U - iT$, где $U \ge T$.

Тогда по теореме Коши ([15]) мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{a^{s+1}}{s(s+1)}ds = a - 1.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^{s+1}}{s(s+1)}ds = a - 1 + O(J_1) + O(J_2),$$

где

$$J_1 = \int_{-U}^{b} \frac{a^{s+1}}{\sigma^2 + T^2}d\sigma, \quad J_2 = \int_{-T}^{T} \frac{a^{-U+1}}{U^2 + t^2}dt.$$

Оценим J_1 сверху двумя разными способами. Во-первых, имеет место следующая оценка:

$$J_1 \le \frac{a}{T^2}\int_{-\infty}^{b} a^\sigma d\sigma = \frac{a^{1+b}}{T^2\ln a}.$$

Во-вторых, имеет место следующая оценка:

$$J_1 \le a^{b+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^2+T^2} = \frac{\pi a^{b+1}}{T}.$$

Таким образом,

$$J_1 = O\left(a^{b+1} \min\left(\frac{1}{T^2 \ln a}, \frac{1}{T}\right)\right).$$

При этом, так как $U > T$, мы получаем для интеграла J_2 такую оценку сверху:

$$J_2 \le \frac{2Ta}{U^2} \le \frac{2a}{U}.$$

Поскольку $\lim_{U\to+\infty} J_2 = 0$, то для $a > 1$ мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^{s+1}}{s(s+1)} ds = a - 1 + O\left(a^{b+1} \min\left(\frac{1}{T^2 \ln a}, \frac{1}{T}\right)\right).$$

B. Пусть $0 < a < 1$. Рассмотрим прямоугольник Γ_1 с вершинами $b+iT$, $b-iT$, $U-iT$, $U+iT$, где $U \ge T$. Повторяя рассуждения предыдущего пункта, приходим к равенствам

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{a^{s+1}}{s(s+1)} ds = 0,$$

то есть

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^{s+1}}{s(s+1)} ds = O\left(a^{b+1} \min\left(\frac{1}{T^2 |\ln a|}, \frac{1}{T}\right)\right).$$

C. Пусть $a = 1$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{ds}{s(s+1)} = 0,$$

то есть, поскольку $U > T$, имеет место следующая формула:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{ds}{s(s+1)} = O\left(\int_{-U}^{b} \frac{d\sigma}{\sigma^2+T^2}\right) + O\left(\int_{-T}^{T} \frac{dt}{U^2+t^2}\right) =$$

$$= O\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^2+T^2}\right) + O\left(\frac{T}{U^2}\right) = O\left(\frac{1}{T}\right).$$

Лемма доказана.

3. Доказательство основной теоремы

Перейдем к формулировке и доказательству основного результата статьи.

Теорема. *Для $x > 2$, $T \ge 2$ имеет место формула*

$$\psi_1(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n)(x-n) =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \left(\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right) x - \sum_{|\mathrm{Im}\rho|\le T} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(\frac{x^2}{T^2} \ln^2 x\right) + O\left(\sqrt{x} \ln^2 x\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ *— нетривиальные нули дзета-функции Римана, то есть нули* $\zeta(s)$*, лежащие в* критической полосе $0 < \mathrm{Re}s < 1$.

Доказательство.
Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds,$$

где $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$, а T выбрано так, чтобы для любого ρ имело место соотношение $|T-\gamma| \geq \frac{c}{\ln T}$, $c > 0$. Имеем:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} n\Lambda(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^{s+1}}{s(s+1)}ds.$$

Применим вспомогательную лемму, полагая $a = \frac{x}{n}$:

$$I = \sum_{n<x}\left(n\Lambda(n)\left(\frac{x}{n}-1\right) + O\left(\frac{x^{1+b}}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right)\right)\right) +$$

$$+\sum_{x\leq n}\left(\frac{x^{1+b}}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{n}{x})}, \frac{1}{T}\right)\right).$$

Оценим остаток R, разбив соответствующий ряд следующим образом:

$$R = \sum_{n\leq\frac{x}{2}}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) + \sum_{\frac{x}{2}<n\leq x-10}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) +$$

$$+\sum_{x-10<n\leq x+10}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) + \sum_{x+10<n\leq\frac{3x}{2}}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) +$$

$$+\sum_{n>\frac{3x}{2}}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(n/x)}, \frac{1}{T}\right) = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4 + \sum_5.$$

Оценим $\sum_j$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$\sum_1 = \sum_{n\leq\frac{x}{2}}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) = O\left(\frac{x^{1+b}}{T^2}\sum_{n\leq\frac{x}{2}}\frac{\Lambda(n)}{n^b}\right) = O\left(\frac{x^{1+b}}{T^2}\ln^2 x\right).$$

$$\sum_2 = \sum_{\frac{x}{2}<n\leq x-10}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) = O\left(\frac{x^{1+b}}{T^2}\sum_{\frac{x}{2}<n\leq x-10}\frac{\ln n}{n^b\ln(\frac{x}{n})}\right) = O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right).$$

$$\sum_3 = \sum_{x-10<n\leq x+10}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) = O\left(\frac{x^{1+b}}{Tx}\right) = O\left(\frac{x^b}{T}\right).$$

$$\sum_4 = \sum_{x+10<n\leq\frac{3x}{2}}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(\frac{x}{n})}, \frac{1}{T}\right) = O\left(\frac{x^{1+b}}{T^2}\ln^2 x\right).$$

$$\sum_5 = \sum_{n>\frac{3x}{2}}\frac{x^{1+b}\Lambda(n)}{n^b}\min\left(\frac{1}{T^2\ln(n/x)}, \frac{1}{T}\right) = O\left(\frac{x^{1+b}}{T^2}\ln^2 x\right).$$

Поскольку $O\left(\frac{x^{1+b}}{T^2}\ln^2 x\right) = O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right)$, и $O\left(\frac{x^b}{T}\right) = O\left(\frac{x}{T}\right)$, то

$$I = \sum_{n\le x}\Lambda(n)(x-n) + O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right) + O\left(\frac{x}{T}\right).$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}ds,$$

где Γ_2 — положительно ориентированный прямоугольник с вершинами $b-iT$, $b+iT$, $-0,5+iT$, $-0,5-iT$. По теореме Коши,

$$J = \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right)x.$$

С другой стороны,

$$J = I + O\left(\int_{-0,5}^{b}\frac{x^{\sigma+1}}{\sigma^2+T^2}\left|\frac{\zeta'(\sigma+iT)}{\zeta(\sigma+iT)}\right|d\sigma\right) + O\left(\int_{-T}^{T}\frac{x^{-0,5+1}}{0,25+t^2}\left|\frac{\zeta'(-0,5+it)}{\zeta(-0,5+it)}\right|dt\right).$$

Так как

$$\left|\frac{\zeta'(\sigma+iT)}{\zeta(\sigma+iT)}\right| = O\left(\left|\sum_{|\gamma-T|\le 1}\frac{1}{(\sigma-\beta)+i(T-\gamma)}\right|\right) + O(\ln T) = O\left(\ln^2 T\right),$$

$$\left|\frac{\zeta'(-0,5+it)}{\zeta(-0,5+it)}\right| = O\left(\ln^2 T\right),$$

и остаточный член $O\left(\frac{x}{T}\right)$ при $T\le x$ входит в $O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right)$, а при $T \ge x$ - в $O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right)$, то

$$I = \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right)x + O\left(\sqrt{x}ln^2x\right) + O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right).$$

Теорема доказана.

Отметим, что при $T\le x$ в асимптотической формуле остается только один остаточный член $O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right)$, и мы получаем следующий результат.

Следствие. *Для $x>2$, $T\le 2$ имеет место формула*

$$\psi_1(x) = \sum_{n\le x}\Lambda(n)(x-n) =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \left(\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right)x - \sum_{|\mathrm{Im}\rho|\le T}\frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(\frac{x^2}{T^2}\ln^2 x\right),$$

где $\rho=\beta+i\gamma$ — нетривиальные нули дзета-функции Римана, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в критической полосе $0<\mathrm{Re}s<1$.

4. Заключение

Таким образом, в статье получены новые результаты, связанные с проблемой представления арифметических функций в виде сумм по нетривиальным нулям дзета-функции Римана.

В дальнейшем интересно было бы рассмотреть вопросы получения новых теоретико-числовых результатов, связанных с указанной проблемой. Одной из перспективных задач является получение аналогичных представлений по нетривиальным нулям дзета-функции Римана других арифметических функций, родственных функции Чебышева; такие функции нетрудно построить, если использовать логарифмические производные произведения нескольких L-рядов Дирихле.

С другой стороны, было бы интересно рассмотреть конкретные задачи на применение уже полученных представлений ([6]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза Е. И., Варухина Л. В. Вопросы суммирования арифметических функций, родственных функции Чебышева // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 2. С. 319–333.
2. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.
3. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.
4. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
5. Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Известия АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36, № 3. С. 475–483.
6. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
7. Пантелеева (Деза) Е. И. К вопросу о проблеме делителей Дирихле в числовых полях // Математические заметки. 1988. Т. 44, вып. 4. С. 494–505.
8. Пантелеева (Деза) Е. И. Одно замечание к вопросу о проблеме делителей // Математические заметки. 1993. Т. 53, вып. 4. С. 148–152.
9. Пантелеева (Деза) Е. И. О средних значениях некоторых арифметических функций // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 5. С. 7–12.
10. Пантелеева (Деза) Е. И. Проблема делителей Дирихле в кольце целых Гауссовых чисел // Труды МПГУ. 2001. № 4. С. 23–34.
11. Пантелеева Е. И., Варухина Л. В. Об оценке сумматорных функций рядов Дирихле // Научные труды математического факультета МПГУ. Юбилейный сборник. М.: МПГУ, 2000. С. 45–56.
12. Пантелеева Е. И., Варухина Л. В. Об оценке дзетовой суммы и проблеме делителей Дирихле // Вестник Санкт-петербургского Университета. 2013. Сер. 1, вып. 4. С. 15–24.
13. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
14. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.
15. Титчмарш Е. К. Теория функций. М.: Наука, 1980.
16. Iviĉ A. The Riemann zeta-function. New Jork: J. Wiley & Sons, 1985.

17. Deza E., Varukhina L. On mean values of some arithmetic functions in number fields // Discrete Mathematics. 2008. Vol. 308. P. 4892–4899.

18. Deza E., Varukhina L. Representations of arithmetic sums over non-trivial zeros of the zeta function // Asian-European Journal of Mathematics. 2008. Vol. 1, issue 4. P. 509–519.

REFERENCES

1. Deza, E. I., Varukhina, L. V. 2018, ”Problems of the summation of arithmetical functions, relative to Chebyshev function“, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 19, N 2, pp. 319–333.

2. Borevich, Z. I. & Shafarevich, I. R. 1985, ”Theory of numbers“, *M.: Nauka.*

3. Vinogradov, I. M. 1981, ”Bases of the theory of numbers“, *M.: Nauka.*

4. Voronin, S. M. & Karatsuba, A. A. 1994, ”Riemann zeta function“, *M.: Fizmatlit.*

5. Karatsuba, A. A. 1972, ”Uniform estimate of error term in Dirichlet divisor problem“, *Izv. Acad. of Sci. SSSR, Math.*, Vol. 36, N 3, pp. 475–483.

6. Karatsuba, A. A. 1983, ”Bases of the analytical theory of numbers“, *M.: Nauka.*

7. Panteleeva (Deza), E. I. 1988, ”Dirichlet divisor problem in number fields“, *Mathematical notes*, Vol. 44, issue 4, pp. 494–505.

8. Panteleeva (Deza), E. I. 1993, ”A remark to Divisor problem“, *Mathematical notes*, Vol. 53, issue 4, pp. 148–152.

9. Panteleeva (Deza), E. I. 1994, ” Average values of some arithmetic functions“, *Mathematical notes*, Vol. 55, issue 5, pp. 7–12.

10. Panteleeva (Deza), E. I. 2001, ”Dirichlet divisor problem in the ring of the Gaussian integers“, *Works of MPGU*, N 4, pp. 23–34.

11. Panteleeva (Deza), E. I.& Varukhina, L. V. 2000, ”Estimations of adding function of Dirichlet series“, in *Scientific works of mathematical department of MPGU*, *M.: MPGU*, pp. 45–56.

12. Panteleeva (Deza), E. I. & Varukhina L. V. 2013, ”On estimation of zeta sums and Dirichlet divisor problem“, *Issue of St. Petersburg University*, Series 1, issue 4, pp. 15–24.

13. Prahar, K. 1967, ”Distribution of prime numbers“, -*M.: Mir.*

14. Titchmarsh, E. K. 1953, ”The theory of the Riemann zeta function“, *M.: IL.*

15. Titchmarsh, E. K. 1980, ”The theory of functions“, *M.: Nauka.*

16. Iviĉ, A. 1985, *The Riemann zeta function*, *New Jork: J. Wiley & Sons.*

17. Deza, E. & Varukhina, L. 2008, ”On mean values of some arithmetic functions in number fields“, *Discrete Mathematics*, Vol. 308, pp. 4892–4899.

18. Deza, E. & Varukhina, L. 2008, ”Representations of arithmetic sums over non-trivial zeros of the zeta function“, *Asian-European Journal of Mathematics*, Vol. 1, issue 4. pp. 509–519.

Получено 16.10.2019 г.
Принято в печать 12.11.2019 г.